Klasická pravděpodobnost

Klasická definice pravděpodobnosti:

- Ω je množina všech možných výsledků náhodného pokusu
- $\omega \in \Omega$ elementární jev
- $A \subset \Omega$ náhodný jev
- Nechť Ω obsahuje **konečný** počet prvků, tj. $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$, a nechť všechny elementární jevy ω_i jsou **stejně pravděpodobné**. Pak pravděpodobnost náhodného jevu A definujeme jako $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{n}$, kde $|A|$ = počet prvků množiny A.

Vlastnosti:

- $0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- jestliže $A \subset B$, pak $P(A) \leq P(B)$ a $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B^c)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
- (princip inkluze a exkluze)

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap \ A_n).$$

1. Házíme čtyřmi šestistěnnými hracími kostkami. Určete, jaká je pravděpodobnost, že
   a) padnou čtyři různá čísla,
   b) padnou pouze lichá čísla,
   c) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6,
   d) součet čísel bude větší než 5,
   e) padne alespoň jedna šestka.
2. V regálu je 6 lahví normálního rumu a 4 lahve pančovaného rumu (vizuálně k nerozeznání). Náhodně vybereme z regálu 3 lahve a z každé ochutnáme. Určete, s jakou pravděpodobností
   a) byl právě ve dvou námi ochutnaných lahvích methanol,
   b) byl alespoň v jedné námi ochutnané lahvi methanol.
3. Na svazku máme 8 různých klíčů a pokoušíme se odemknout zámek. Vyzkoušený klíč vždy dáme stranou a náhodně vybereme další klíč ze zbývajících. Jaká je pravděpodobnost, že odemkneme až na pátý pokus?
4. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (s již nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   b) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.
5. (Maxwell - Boltzmannovo schéma) Do vlaku s n vagóny nastupuje r cestujících. Předpokládejme, že každý člověk si vybírá vagón zcela náhodně.
   a) Určete, s jakou pravděpodobností bude v prvním vagóně právě $k \leq r$ cestujících.
   b) Jaká je pravděpodobnost, že žádný vagón nebude prázdný?
   c) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty, r \to \infty$ tak, že $\frac{r}{n} \to \lambda > 0$.
6. (Bose - Einsteinovo schéma) Babička rozděluje r tisícikorun do n obálek pro svých n vnoučat k Vánocům. Peníze rozmístí náhodně (všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná).
   a) Určete pravděpodobnost, že vnuk Karel dostane právě k tisícikorun.
   b) Jaká je pravděpodobnost, že každé z vnoučat dostane alespoň nějaké peníze?
   c) Spočtěte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

Řešení

1. a) $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{6^4} = \frac{5}{18}$,
   b) $\frac{3^4}{6^4} = \frac{1}{16}$,
   c) možnosti, jak dostat součet šest jsou: $1+1+1+3$ a $2+2+1+1$ (až na pořadí). První součet lze dosáhnout čtyřmi způsoby, druhý šesti. Tedy $P(A) = \frac{\binom{4}{1}+\binom{4}{2}}{6^4} = \frac{10}{6^4}$,
   d) označme $(S = k)$ jev, že součet čísel bude k a dále označme A^c jev, že součet bude pět, či méně, pak $P(A^c) = P(S = 5) + P(S = 4) = \frac{4}{6^4} + \frac{1}{6^4}$, tedy $P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{6^4-5}{6^4}$,
   e) označme A^c jev, že nepadne žádná šestka, pak $P(A^c) = \frac{5^4}{6^4}$, tedy $P(A) = \frac{6^4-5^4}{6^4}$.
2. a) $\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$,
   b) $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}+\binom{6}{1}\binom{4}{2}+\binom{6}{0}\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{6}$.
3. $\frac{1}{8}$.

4. a) Označme A_i jev, že i-tý dopis bude ve správné obálce, pak $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$ pro $i \neq j$ atd. Pak

$$\begin{aligned} P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - ...(-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^n A_i) \\ &= n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - ...(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ...(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}\frac{1}{i!}. \end{aligned}$$

b) Jelikož $e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!}$, pak

$$\sum_{i=1}^\infty (-1)^{i+1}\frac{1}{i!} = -\sum_{i=1}^\infty \frac{(-1)^i}{i!} = -\left(\sum_{i=1}^\infty \frac{(-1)^i}{i!} + 1 - 1\right) = -\left(\sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i}{i!} - 1\right) = 1 - \sum_{i=0}^\infty \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - e^{-1}.$$

5. a) Nejdříve vybereme k cestujících, kteří budou v prvním vagónu. To lze udělat $\binom{r}{k}$ způsoby. Ostatní cestující rozdělíme rovnoměrně náhodně do dalších vagónů. $P(A) = \frac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r}$. Toto rozdělení se nazývá Binomické rozdělení (s parametry r a $\frac{1}{n}$), což je dobře vidět, pokud si hledanou pravděpodobnost zapíšeme ve tvaru $P(A) = \binom{r}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-k}$,

b) Označme A_i jev, že i-tý vagón bude prázdný, pak $P(A_i) = \frac{(n-1)^r}{n^r}$, $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)^r}{n^r}$ pro $i \neq j$ ..., tedy

$$\begin{aligned} P(A^c) = P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + ...(-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^n A_i) \\ &= n\frac{(n-1)^r}{n^r} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)^r}{n^r} + ...(-1)^{n+1} \cdot 0 = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(n-i)^r}{n^r}. \end{aligned}$$

Tedy

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1}\binom{n}{i}\frac{(n-i)^r}{n^r} = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i\binom{n}{i}\frac{(n-i)^r}{n^r}.$$

c)

$$\begin{aligned} \lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \frac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r} &= \lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \frac{\binom{r}{k}\left(\frac{n-1}{n}\right)^r}{(n-1)^k} \\ &= \lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \frac{\binom{r}{k}}{(n-1)^k} \cdot \lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\cdot\frac{r}{n}} \\ &= e^{-\lambda} \lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \frac{r(r-1)...(r-k+1)}{(n-1)^k k!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}. \end{aligned}$$

Poznamenejme, že toto limitní rozdělení se nazývá Poissonovo (s parametrem λ).

6. a) Jednotlivá rozdělení r tisícikorun do n obálek lze popsat pomocí uzpořádané $n+r-1$-tice prvků, kde r prvků je jednoho typu (tisícikoruny) a $n-1$ prvků druhého typu (hranice, oddělující jednotlivé obálky), viz obrázek 1. Počet všech možností je tedy $\binom{r+n-1}{n-1}$. Počet příznivých jevů je $\binom{r+n-k-2}{n-2}$, tedy vý sledná pravděpodobnost je

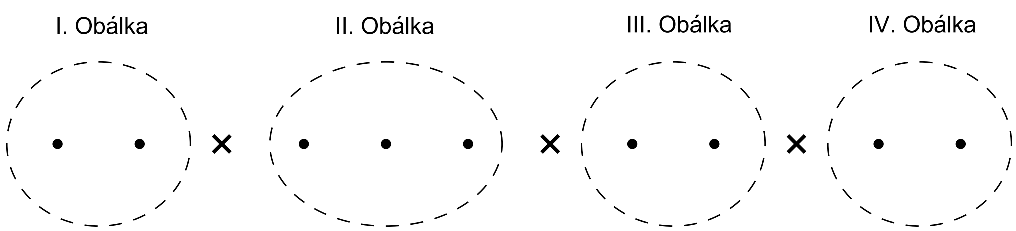
$$P(A) = \frac{\binom{r+n-k-2}{n-2}}{\binom{r+n-1}{n-1}}.$$

b)

$$P(A) = \frac{\binom{r-1}{n-1}}{\binom{r+n-1}{n-1}}.$$

c)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{\binom{r+n-k-2}{n-2}}{\binom{r+n-1}{n-1}} &= \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{(r+n-k-2)!(n-1)!r!}{(r+n-1)!(n-2)!(r-k)!} \\
&= \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{(n-1)r\cdot ...(r-k+1)}{(r+n-1)\cdot ... \cdot (r+n-k-1)} \\
&= \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{n-1}{r+n-1} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{r-i}{r+n-2-i} \\
&= \left(\lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{n-1}{r+n-1} \right) \prod_{i=0}^{k-1} \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{r-i}{r+n-2-i} \\
&= \frac{1}{\lambda+1} \left(\frac{\lambda}{\lambda+1} \right)^k = \frac{\lambda^k}{(\lambda+1)^{k+1}}.
\end{aligned}
$$



Obrázek 1:
Jednotlivé obálky jsou znázorněny čárkovanou čarou, tisícikoruny černým puntíkem a křížek označuje hranici mezi obálkami.

Geometrická pravděpodobnost

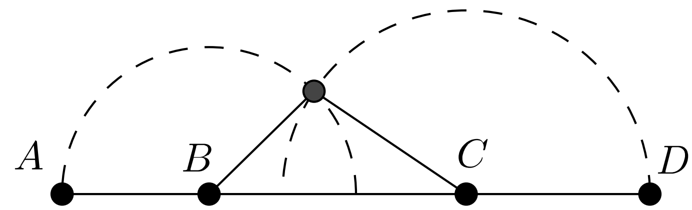
1. Na úsečce délky l jsou náhodně umístěny body, které tuto úsečku rozdělí na tři části. S jakou pravděpodobností je možné z takto vzniklých tří úseček sestrojit trojúhelník?

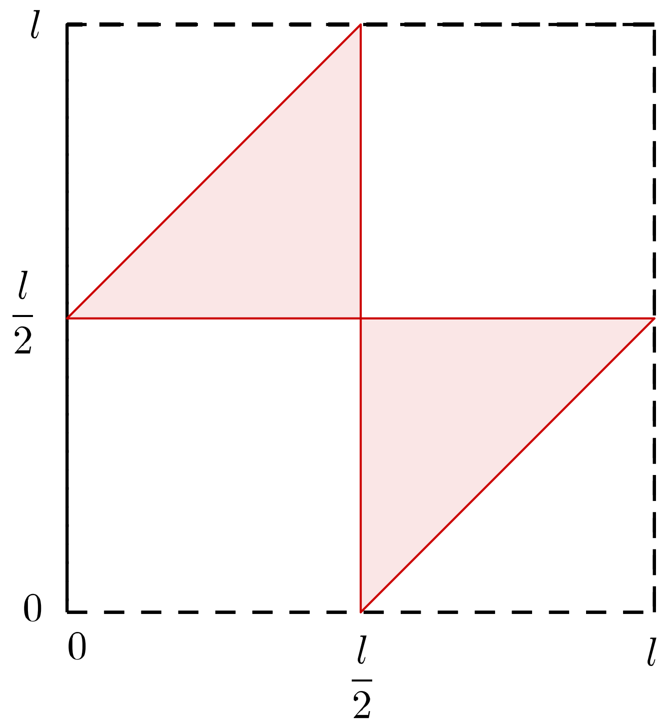
2. (1777 - Buffonova jehla - Georges Louis Leclerc de Buffon) Na podlaze jsou parkety šířky l. Na podlahu spadne jehla délky $r < l$. Jaká je pravděpodobnost, že bude jehla ležet na dvou parketách (šířku mezery mezi parketami zanedbáváme)?

3. (Bertrandův paradox - Joseph Louis François Bertrand) Uvažujme kružnici a zvolme náhodně tětivu této kružnice. Jaká je pravděpodobnost, že délka této tětivy bude větší než délka strany rovnostranného trojuhelníka vepsaného do této kružnice?

Řešení

1. Úsečku AD rozdělme dvěma body B a C na tři části a označme x délku úsečky AB a y délku úsečky AC. Pak aby bylo možné z takto vzniklých úseček sestrojit trpjúhelník, tak musí být $\min\{x,y\} < \frac{l}{2}$, $|y-x| < \frac{l}{2}$ a $l - \max\{x,y\} < \frac{l}{2}$. Tedy prostor všech možných jevů je popsán čtvercem $[0,l]^2$ a oblast příznivých jevů nerovnostmi nahoře (na obrázku 2 znázorněna červeně). Proto $|\Omega| = l^2$, $|A| = \left(\frac{l}{2}\right)^2$, a tedy
$$P(A) = \frac{1}{4}.$$





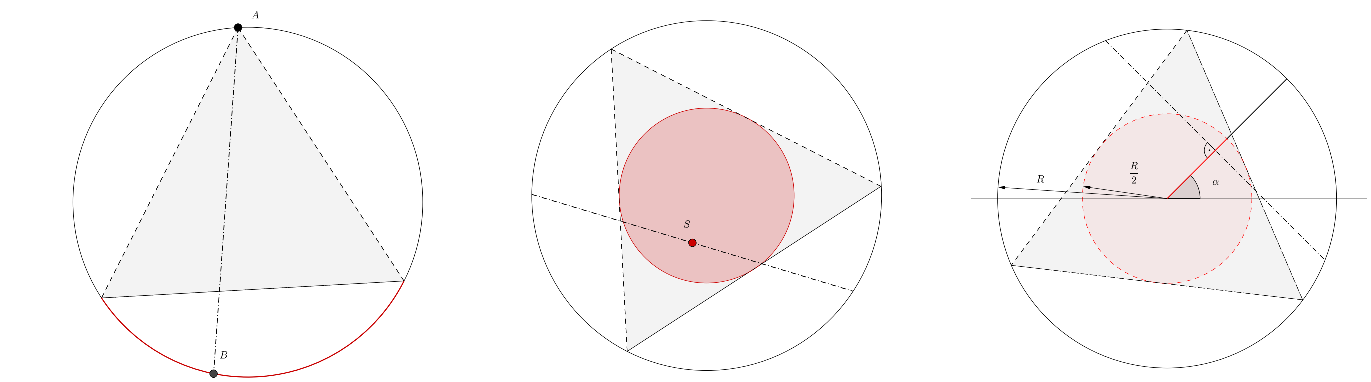
Obrázek 2:
Čtverec vyznačuje množinu všech jevů, které mohou nastat, červeně vyznačená oblast označuje množinu takových dvojic časů příchodů Dana s Igorem, že se oba na smluveném místě potkají.

2. Uvažujme kružnici o poloměru $R > 0$.

   I. Využijeme toho, že každá tětiva je jednoznačně určena dvojicí bodů na kružnici. Zvolíme-li první náhodně, pak druhý musí ležet v nejvzdálenější třetině kružnice (viz obrázek 3, oblast vyznačená červeně). Tedy Ω je reprezentováno celou kružnicí a oblast příznivých jevů jednou třetinou kružnice. Pak $|\Omega| = 2\pi R$, $|A| = \frac{2\pi R}{3}$ a

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

   II. Každá tětiva je také jednoznačně určena svým středem (až na situaci, kdy střed tětivy leží ve středu kružnice. Tento jev má ale nulovou prvděpodobnost a lze ho tedy při výpočtu zanedbat). Jelikož kružnice vepsaná k uvažovanému trojúhelníku má poloměr $\frac{R}{2}$, tak oblast příznivých jevů je popsána body uvnitř této menší kružnice (viz obrázek 4). Proto $|\Omega| = \pi R^2$,



Obrázek 3:
Levý obrázek: První náhodně zvolený konec tětivy označíme A, pak je oblast příznivých jevů označena červeně. Bod B je druhý náhodně zvolený konec tětivy (ta je vyznačena čerchovanou čarou). Rovnostranný trojúhelník vepsaný kružnici je vyznačen čárkovaně.
Prostřední obrázek: Bod S vyznačuje střed tětivy (tětiva je vyznačena čerchovanou čarou). Oblast příznivých jevů je vyznačena červeně.
Pravý obrázek: Značení je podobné jako u předchozích obrázků. Při konkrétní volbě úhlu α je množina středů tětiv určena úsečkou délky R. Polovina úsečky (vyznačena červeně) určuje tětivy delší než délka strany trojúhelníka vyznačeného čárkovanou čarou.

$|A| = \frac{\pi R^2}{4}$ a

$$P(A) = \frac{1}{4}.$$

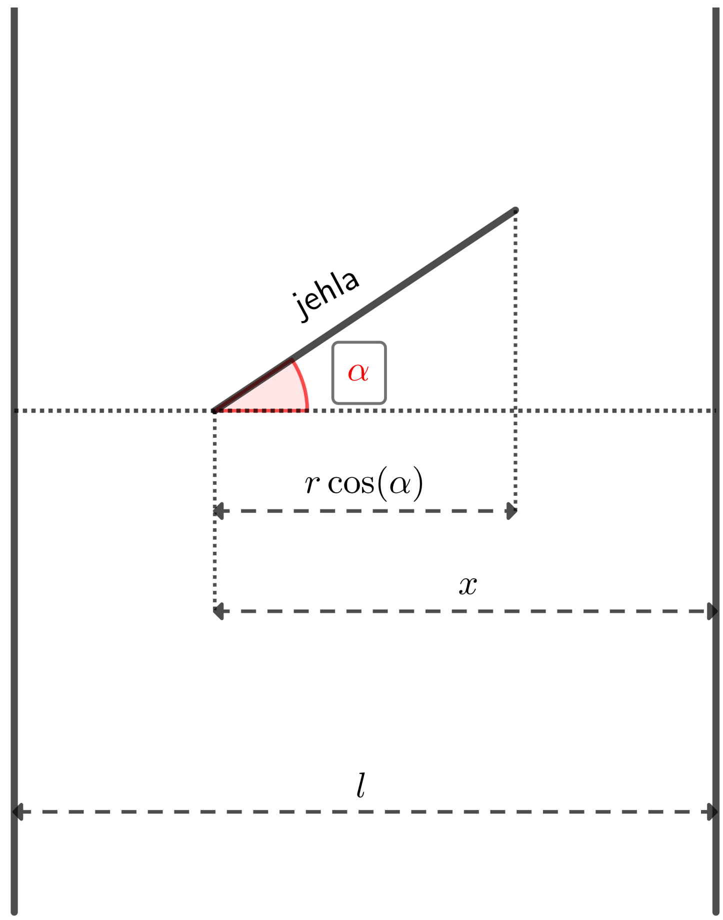
III. Každá tětiva je rovněž určena vzdáleností od středu a úhlem, který svírá s osou x (na obrázku uvažujeme pro jednoduchost kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic). Jelikož o délce tětivy rozhoduje pouze její vzdálenost od středu a na úhlu otočení tato délka nezávisí, lze Ω popsat pomocí bodů v intervalu $[0, R]$, oblast pžíznivých jevů intervalem $[0, \frac{R}{2}]$, a tedy

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

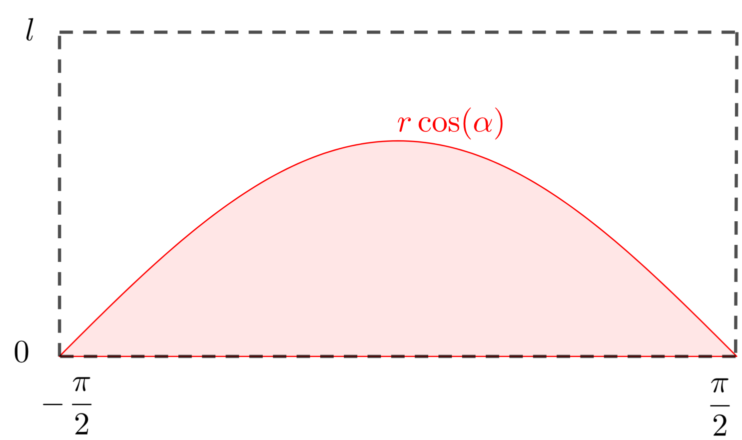
I když se na první pohled zdá, že jsou tato řešení ve vzájemném rozporu, problém je v nejednoznačnosti zadání této úlohy. Každá z uvedených variant prezentuje jednu z možností náhodných voleb tětivy, ale tyto možnosti nejsou stejné a to vede k různosti výsledků. Úloha je tedy nepřesně zadána. Proto nelze ani jednu z prezentovaných variant řešení označit za lepší či správnější, pokud předem nekonkretizujeme zadání úlohy.

3. Uvažujme pouze parketu, ve které leží kraj jehly, který je více vlevo (viz Obrázek 6.). Pak je poloha jehly jednoznačně (až na vertikální posunutí, které pro nás není podstatné) určena vzdáleností levého krajního bodu jehly k pravé spáře (na obrázku vzdálenost označená jako x) a natočením jehly od horizontální osy (na obrázku úhel α. Je-li tedy $r\cos(\alpha) > x$, pak jehla zasahuje i do vedlejší parkety (protíná pravou spáru námi zobrazené parkety). V opačném případě leži celá jehla na jedné parketě. Tedy $\Omega = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, l]$, kde první souřadnice popisuje úhel natočení jehly od horizontální osy (α) a druhá souřadnice popisuje vzdálenost levého okraje jehly od pravé spáry (x). Množina příznivých jevů je ve obdelníku $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, l]$ shora omezena grafem funkce $r\cos(\alpha)$. Tedy

$$P(A) = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\alpha) d\alpha}{\pi l} = \frac{2r}{\pi l}.$$



Obrázek 4:
Zobrazení jehly na podlaze. x popisuje vzdálenost levého krajního bodu jehly od pravého okraje parkety, α je úhel otočení jehly od vertikální osy.



Obrázek 5:
Prostor Ω s vyznačením množiny příznivých elementárních jevů (červeně).

Podmíněná pravděpodobnost, nezávislost jevů

Nechť A, B jsou náhodné jevy, $P(B) > 0$. **Podmíněnou pravděpodobnost** jevu A za podmínky B definujeme jako

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Nezávislost. Náhodné jevy A, B se navzájem nezávislé, jestliže platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Náhodné jevy $A_1, \dots A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro každé $r \leq n$ a každou $\{i_1, \dots, i_r\}$ podmnožinu $\{1, \dots, n\}$ platí

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots P(A_{i_r}).$$

(Tj. souřinovou podmínku musíme ověřit pro všechny dvojice, všechny trojice ... atd.)

Věta o Úplné pravděpodobnosti:
Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$ a $P(B_i) > 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots$. Pak

$$P(A) = \sum_i P(A \cap B_i) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

Bayesova věta:
Nechť $A, B_1, B_2, \dots$ jsou náhodné jevy takové, že $B_i \cap B_j = \emptyset$ pro všechna $i \neq j$, $\bigcup_i B_i = \Omega$, $P(B_i) > 0$ pro všechna i, a nechť $P(A) > 0$. Pak

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_j P(A|B_j)P(B_j)}.$$

Věta o násobení pravděpodobností:
Jestliže náhodné jevy $A_1, \dots, A_n$ splňují $P(\cap_{i=1}^n A_i) > 0$, pak

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = P(A_n | \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot P(A_{n-1} | \cap_{i=1}^{n-2} A_i) \cdot \dots \cdot P(A_2|A_1)P(A_1).$$

Příklady 9. a 10. jsou včetně řešení převzaty z: http://cmp.felk.cvut.cz/∼navara/pms/PMScvic.pdf

1. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.

   a) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka, za podmínky, že celkový součet je 8?

   b) Jsou jevy [padla šestka] a [celkový součet je 8] nezávislé?

2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami - modrou a zelenou. Označme jevy $A =$[na modré kostce padlo sudé číslo], $B =$[na zelené kostce padlo liché číslo], $C =$[součet čísel je lichý].

   a) Jsou náhodné jevy A,B,C po dvou nezávislé?

   b) Jsou jevy A,B,C nezávislé?

3. Házíme dvěma pravidelnými kostkami najednou, dokud nepadne součet 5 nebo součet 7 (na obou kostkách dohromady). S jakou pravděpodobností padne dříve součet 5 než součet 7?

4. Dne 9.10.2020 byla ve večerních zprávách zveřejněna následující zpráva: Ministr zdravotnictví Roman Prymula zvažuje možnost otestování celého národa na COVID 19. Byla uvedena následující data:

   – počet testovaných jedinců . . . 10 000 000,
   – falešně negativních jedinců . . . 20 000,
   – pozitivních jedinců . . . 180 000,
   – falešně pozitivních jedinců . . . 249 000.

   a) Pokud by testování dopadlo dle odhadu a konkrétní pacient by byl testem označen jako pozitivní, jaká je pravděpodobnost, že je skutečně pozitivní?

   b) Určete pravděpodobnost, že bude zdravý jedinec označen testem jako pozitivní.

5. Ve třídě je 70% chlapců a 30% dívek. Dlouhé vlasy má 10% chlapců a 80% dívek.

   a) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?

   b) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

6. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností 1/4 (za předpokladu, že s deštníkem do obchodu přišel). Cestou z Karlína navštívil čtyři obchody a domů přišel bez deštníku. Jaká je pravděpodobnost, že deštník zapomněl ve čtvrtém obchodě?

7. V jednom ze tří trezorů je skryta odměna, ostatní dva jsou prázdné. Soutěžící je vyzván, aby si vybral trezor, ve kterém myslí, že je skryta odměna. V případě, že se trefí, tak odměnu získá. Po vybrání je otevřen jeden z dvou dalších trezorů, ale vždy pouze ten, který je prázdný, o čemž je soutěžící informován. Poté je soutěžící vyzván, zda chce změnit volbu trezoru a vybrat si druhý zbývající. Je pro soutěžícího změna trezoru výhodná?

8. Skříňka má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, v druhé jedna zlatá a jedna stříbrná, v třetí 2 tříbrné mince. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je pravděpodobnost, že v zásuvce zbyde zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

9. Požití alkoholu bylo prokázáno u 1% všech řidičů a u 10% řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu. Kolikrát se požitím alkoholu zvyšuje riziko nehody?

10. Z 60 žijících členů klubu vysloužilých námořních kapitánů jich 5 zažilo ztroskotání (jednou). Podle statistiky při ztroskotání lodi v této oblasti třetina kapitánů zahyne. Odhadněte pravděpodobnost, že kapitán zažije ztroskotání (aspoň jednou za život – možnost opakovaného ztroskotání téhož kapitána i předčasného úmrtí z jiné příčiny zanedbáváme).

11. Náhodně vybereme kladné celé číslo N, rozdělení pravděpodobnosti je $P[N = i] = 2^{-i}$. Poté hodíme N kostkami. Nechť S je součet hodnot, které při hodu padly. Určete podmíněné pravděpodobnosti $P[N = 2|S = 4]$ a $P[S = 4|N$ je sudé$]$.

12. a) Rodina má dvě děti, starší je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

    b) Rodina má dvě děti, (aspoň) jedno z nich je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

13. Jazykový korektor změní 99% chybných slov na správná a 0.01% správných na chybná. Změnil 2% slov. Odhadněte množství chybných slov v jeho výstupu.

Řešení

1. a) Označme A jev, že padla šestka, a B jev, že součet je osm. Jev B je tvořen elementárními jevy $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3)$ a $(6,2)$, kde (i,j) značí jev, že na první kostce padlo i a na druhé j. Tedy $P(B)=\frac{5}{36}$, $P(A\cap B)=P(\{(2,6),(6,2)\})=\frac{2}{36}$, proto $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2}{5}$.

   b) $P(A)=\frac{11}{36}$. Jelikož $P(A\cap B)=\frac{2}{36}\neq\frac{11}{36}\cdot\frac{5}{36}=P(A)P(B)$, nejsou jevy A a B nezávislé.

2. $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{1}{4}$ a $P(A\cap B\cap C)=P(A\cap B)=\frac{1}{4}$. Tedy jevy A, B a C nejsou nezávislé, ale jsou po dvou nezávislé.

3. I. Označme A jev, že v daném kole padl součet 5, a B jev, že padl součet 7. Jev $A\cup B$ tedy označuje jev, že v daném kole hra skončila. Pak

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}}=\frac{2}{5}.$$

   II. Druhý způsob řešení: Označme A_i jev, že v i-tém hodu padne součet 5, a B_i, že v i-tém hodu padne součet 7. Pravděpodobnost, že v i-tém kole bude hra ukončena a padne součet 5, je

$$P(A_i)\prod_{j=1}^{i-1}(1-P(A_j\cup B_j))=P(A_i)\prod_{j=1}^{i=1}(1-P(A_j)-P(B_j))=\frac{4}{36}\left(1-\frac{10}{36}\right)^{i-1}.$$

   Tedy pravděpodobnost, že hra bude ukončena hodem se součtem 5, je

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{4}{36}\left(1-\frac{10}{36}\right)^{i-1}=\frac{4}{36}\frac{1}{1-\frac{26}{36}}=\frac{2}{5}.$$

4. a) Test označil $249000+180000=429000$ lidí za pozitivní. Z toho skutečně pozitivních jedinců bylo 180000. Hledaná pravděpodobnost je tedy $P(A)=\frac{180}{429}=0.4195804$.

   b) Zdravých jedinců je $10000000-(180000+20000)=9800000$ a falešně pozitivních jedinců je 249000, tedy hledaná pravděpodobnost je $P(A)=\frac{249}{9800}=0.02540816$.

5. Označme A jev, že náhodně vybraná osoba má dlouhé vlasy, a B jev, že náhodně vybraná osoba je chlapec.

   I. Pak $P(B)=\frac{7}{10}$, $P(B^c)=\frac{3}{10}$, $P(A|B)=\frac{1}{10}$ a $P(A|B^c)=\frac{8}{10}$.

   a)

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)=\frac{7}{100}+\frac{3\cdot 8}{100}=\frac{31}{100}.$$

   b)

$$P(B^c|A)=\frac{P(A\cap B^c)}{P(A)}=\frac{P(A|B^c)P(B^c)}{P(A)}=\frac{24}{31}.$$

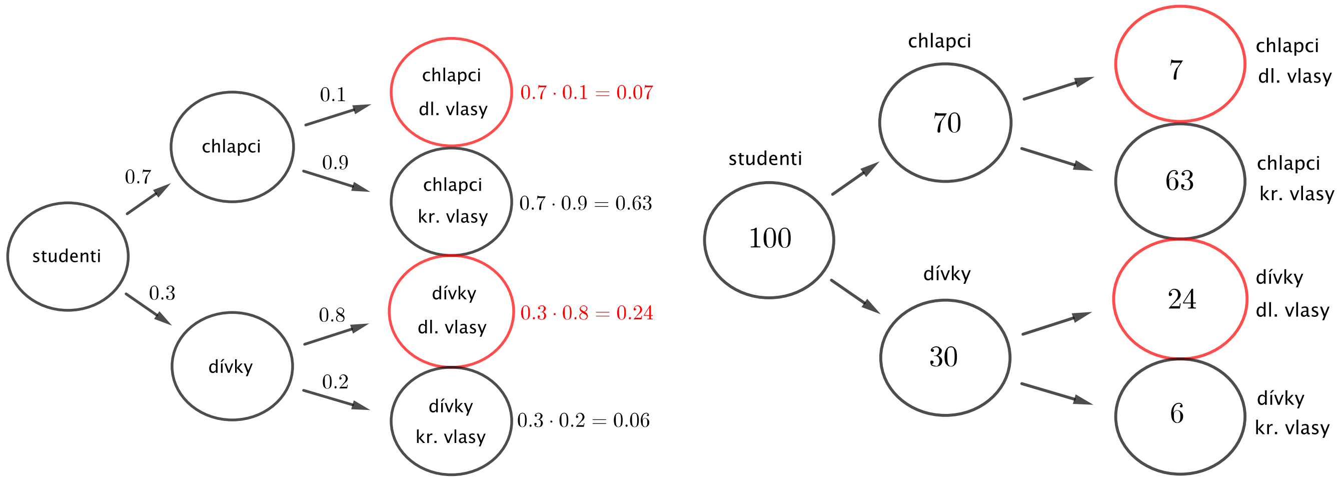
   II. Úloha se dá řešit i graficky:

   Z obrázku (vlevo) vidíme, že pravděpodobost výběru osoby s dlouhými vlasy je $P(A)=0.24+0.07=0.31$ a pravděpodobost výběru dlouhovlasé dívky je 0.24. Pravděpodobnost $P(A|B^c)$ je tedy $P(A|B^c)=\frac{0.24}{0.24+0.07}=\frac{24}{31}$. Někdy je pro studenty příjemnější následující varianta řešení. Uvažujme, že by ve třídě bylo 100 studentů. Pak dostaneme ze zadání následující rozdělení do skupin (obrázek vpravo). Dále postupujeme stejně jako v předchozím řešení.

6. Označme A_i jev, že profesor zapomene deštník v i-tém obchodě. Pak $P(A_1)=P(A_2|A_1^c)=P(A_3|A_1^c,A_2^c)=P(A_4|A_1^c,A_2^c,A_3^c)=\frac{1}{4}$. Poznamenejme, že A_i^c značí jev, že v i-tém obchodě profesor deštník nezapomene. Využijeme toho, že $A_4\subset(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)$ (aby mohl profesor deštník zapomenout v posledním obchodě, tak ho tam musel donést).

$$\begin{aligned}P(A_4)&=P(A_4\cap(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c))=P(A_4|A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)P(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)\\&=P(A_4|A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)P(A_3^c|A_1^c\cap A_2^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_1^c)\\&=P(A_4|A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)(1-P(A_3|A_1^c\cap A_2^c))(1-P(A_2|A_1^c))(1-P(A_1))=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(A_4|A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)&=\frac{P(A_4)}{P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)}=\frac{P(A_4)}{P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)}\\&=\frac{\frac{3^3}{4^4}}{\frac{1}{4}\left(1+\frac{3}{4}+\frac{3^2}{4^2}+\frac{3^3}{4^3}\right)}=\frac{\frac{3^3}{4^4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\frac{3^4}{4^4}}{1-\frac{3}{4}}}=\frac{3^3}{4^4-3^3}.\end{aligned}$$



Obrázek 6:
Levý obrázek: Grafické řešení s pravděpodobnostmi.
Pravý obrázek: Grafické řešení s rozdělením určitého počtu (v tomto případě 100) studentů do skupin.

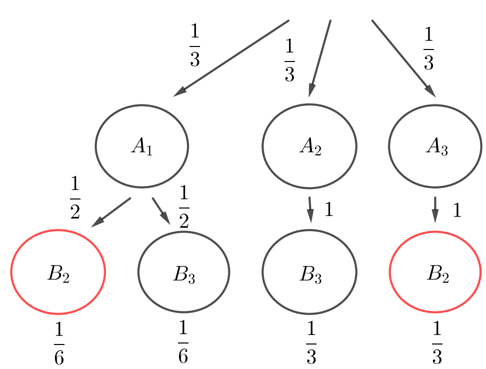
7. Označme A_i, $i = 1, 2, 3$, jevy, že v $i-$tém trezoru je odměna, pak $P(A_i) = \frac{1}{3}$. BÚNO předpokládejme, že jsme na začátku zvolili trezor číslo 1, a označme B_i, $i = 2, 3$, jevy, že je poté otevřen i-tý trezor (který je prázdný). Je-li odměna v námi zvoleném trezoru, pak může být otevřen libovolný ze zbývajících dvou trezorů, ani jedna z těchto variant není preferovaná, a tak $P(B_i|A_1) = \frac{1}{2}$. Jelikož $P(B_i|A_1) = \frac{P(B_i \cap A_1)}{P(A_1)}$ a $P(A_1) = \frac{1}{3}$, tak $P(A_1 \cap B_i) = \frac{1}{6}$. Je-li odměna v i-tém trezoru, $i = 2, 3$, pak nemůže být po první volbě otevřen a musí být otevřen trezor zbývající, proto $P(A_i \cap B_i) = 0$ a $P(B_j|A_i) = 1$ pro $i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{3}$ pro $i = 2, 3$ a $i \neq j$.

   Jelikož jsou jevy A_1, A_2 a A_3 disjunktní a dohromady pokrývají celý pravděpodobnostní prostor (jsou v nich obsaženy všechny možné výsledky pokusu), tak $P(B_i) = \sum_{j=1}^{3} P(A_j \cap B_i) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Pak

$$P(A_1|B_i) = \frac{P(A_1 \cap B_i)}{P(B_i)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(A_j|B_i) = \frac{P(A_j \cap B_i)}{P(B_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad i \neq j,$$

   tedy i po otevření prázdného trezoru zůstane pravděpodobnost výhry pro prvně zvolený trezor stejná, ale pro zbývající trezor je dvojnásobná. Změna truhlic se tedy vyplatí.

   Úloha lze řešit i graficky. Použijeme stejné značení jako v předešlém řešení. Pak dostaneme tento obrázek.

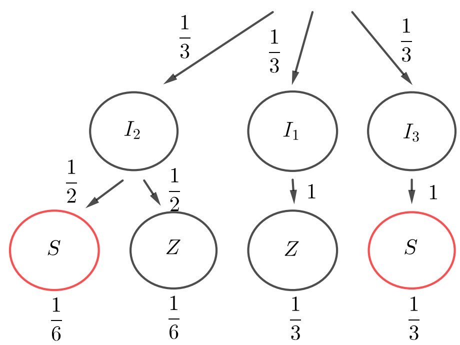


Z obrázku vidíme, že v případě otevření druhé truhly (červeně vyznačené případy), je dvakrát větší šance, že je výhra ve třetím trezoru, než že je v prvním trezoru (který jsme na počátku vybrali).

8. Zavedeme si následující značení: $(1, z_1)$ je jev, že z první zásuvky vytáhneme první zlatou minci, podobně označíme další elementární jevy $(1, z_2)$, $(2, z)$, $(2, s)$, $(3, s_1)$ a $(3, s_2)$. První číslo vždy značí, z jaké zásuvky bylo taženo a s, resp. z, značí tažení stříbrné, resp. zlaté, mince. Označíme-li jev "byla tažena stříbrná mince"písmenem S a jev "v zásuvce zbyla zlatá mince"jako jev A, pak

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(\{(2, s)\})}{P(\{(2, s), (3, s_1), (3, s_2)\})} = \frac{1}{3}.$$

Úloha lze řešit i graficky. Použijeme značení I_i ... vybraly jsme i-tou zásuvku, Z ... vytáhli jsme zlatou minci a S ... vytáhli jsme stříbrnou minci.



Pak $P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(I_2 \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$.

9. Označme jevy

   1. $A =$ „požil alkohol,"
   2. $H =$ „způsobil nehodu."

   Pak máme $P(A) = 0.01$ a $P(A|H) = 0.1$. Tudíž

$$0.1 = P(A|H) = \frac{P(H|A) \cdot P(A)}{P(H|A) \cdot P(A) + P(H|A^c) \cdot P(A^c)} =$$
$$= \frac{P(H|A) \cdot 0.01}{P(H|A) \cdot 0.01 + P(H|A^c) \cdot 0.99} = \frac{1}{1 + \frac{P(H|A^c)}{P(H|A)} \cdot 99}.$$

   A výsledek je

$$\frac{P(H|A)}{P(H|A^c)} = 11 .$$

10. Označme jevy

   $A =$ "kapitán se dožil důchodu,"

   $B =$ "kapitán zažil ztroskotání."

   Pak máme $P(A|B) = \frac{2}{3}$, $P(A|\overline{B}) = 1$, $P(B|A) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ (odhad)
   Bayesova věta:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B})}$$
$$\frac{1}{12} = \frac{\frac{2}{3}P(B)}{\frac{2}{3}P(B) + (1 - P(B))}$$
$$P(B) = \frac{3}{25} = 0.12$$

Alternativní řešení: Na 5 přeživších námořníků připadá v průměru $5 \cdot \frac{3}{2} = 7.5$ účastníků ztroskotání, z toho 2.5 nepřežilo, celkový počet je $60 + 2.5 = 62.5$ a pravděpodobnost, že se jedná o účastníka ztroskotání, je $\frac{7.5}{62.5} = \frac{3}{25}$ (tyto četnosti nám jen názorněji nahrazují pravděpodobnosti, proto není nutné, aby byly celočíselné, pokud vycházíme z toho, že statistika úmrtnosti při ztroskotáních je založena i na dalších případech kromě zde uvažovaných; z těch by nemohla vyjít $\frac{1}{3}$).

11.
$$P[N = 2 \mid S = 4] = \frac{P[N = 2, S = 4]}{P[S = 4]} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{216} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1296}},$$
$$P[S = 4 \mid N \text{ je sudé}] = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{1296}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots} = \frac{4^2 \cdot 3^3 + 1}{4^4 \cdot 3^3}.$$

12. a) Jde o pravděpodobnost, že mladší z dětí je dcera, což nastává s pravděpodobností q blízkou $1/2$, přesněji asi 0.485. (Předpokládáme, že pohlaví dětí jsou nezávislá, což je přibližně správně.)

b) Pokud pro jednoduchost předpokládáme $q = 1/2$, pak předpoklad J, že "rodina má aspoň 1 dceru," je splněn s pravděpodobností $P(J) = 1 - (1-q)^2 = 3/4$, ale to, že "rodina má 2 dcery," je podjev $D \subseteq J$ s pravděpodobností $P(D) = q^2 = 1/4 = P(D \cap J)$. Podmíněná pravděpodobnost je
$$P(D|J) = \frac{P(D \cap J)}{P(J)} = \frac{P(D)}{P(J)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}\,.$$
Obecněji pro pravděpodobnost narození dívky q
$$P(D|J) = \frac{q^2}{1 - (1-q)^2}\,,$$
pro $q = 0.485$
$$P(D|J) = \frac{q^2}{1 - (1-q)^2} \doteq 0.32\,.$$

13. Označme p pravděpodobnost chybného slova před opravou. Opraveno 2% slov, tedy dostaneme rovnici $0.02 = 0.99 \cdot p + 10^{-4} \cdot (1-p)$.
$p = \frac{0.02-0.0001}{0.99-0.0001} = \frac{0.0199}{0.9899} = 2.0103 \cdot 10^{-2}$. Po opravě chybně $0.01 \cdot p + 10^{-4} \cdot (1-p) = 2.9902 \cdot 10^{-4}$.

Náhodné veličiny

1. a) Je náhodná veličina jednoznačně určena svým rozdělením?
   b) Je rozdělení náhodné veličiny jednoznačně určeno příslušnou distribuční funkcí?
   c) Mějme náhodnou veličinu X a funkci $f(x)$. Lze ze znalosti rozdělení náhodné veličiny X určit rozdělení náhodné veličiny $Y = f(X)$?
   d) Mějme dvě náhodná veličiny se stejným rozdělením. Musí být tyto náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru?
   e) Nabývá-li náhodná veličina spočetně mnoha hodnot, musí být její distribuční funkce po částech konstantní?
   f) Nabývá-li náhodná veličina nespočetně mnoha hodnot, musí být její distribuční funkce spojitá?
   g) Lze ze znalosti hustoty $f(x)$ rozdělení náhodné veličiny X určit příslušnou distribuční funkci?

2. Uvažujeme diskrétní náhodnou veličinu X s rovnoměným rozdělením (žádnou z možných hodnot nepreferujeme), která nabývá hodnou $1, 2, ..., n$. Určete její rozdělení, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.

3. Uvažujeme spojitou náhodnou veličinu X s rovnoměrným rozdělením (žádnou z možných hodnot nepreferujeme), která nabývá hodnou z intervalu $[0, 2]$ (všech hodnot z intervalu $[0, 2]$). Určete rozdělení n.v. X, její hustotu, distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.

4. V peněžence máte dvě papírové pětisetkoruny, jednu tisícikorunu a jednu dvoutisícikorunovou bankovku. Zloděj vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.
   a) Určete rozdělení X, tj. jakých hodnot veličina X nabývá a s jakými pravděpodobnostmi.
   b) Nakreslete distribuční funkci veličiny X.
   c) Zloděj následně zaplatí 1000 Kč za špatné parkování a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme Y veličinu udávající částku, která zloději po tom všem zůstane. Určete rozdělení Y.
   – Určete rozptyl veličiny Y.
   d) S jakou pravděpodobností si bude zloděj moci večer v hospodě koupit večeři za 210 Kč?
   e) Určete střední hodnotu $\mathbb{E}X$ a rozptyl $\text{var}X$.

5. Cyril má na svazku 8 klíčů a snaží se odemknout dveře (ke kterým pasuje právě jeden klíč). Náhodně vybere klíč a vyzkouší ho. Po každém neúspěšném pokusu mu klíče spadnou na zem a další klíč znovu volí zcela náhodně. Tak pokračuje, dokud konečně dveře neotevře.
   i) Jaké je rozdělení počtu všech neúspěšných Cyrilových pokusů?
   ii) Jaký je očekávaný počet neúspěšných pokusů?
   iii) Jaký je rozptyl počtu neúspešných pokusů?

6. Uvažujme n nezávislých pokusů, kde každý ma pravděpodobnost úspěchu p.
   i) Jaké je rozdělení počtu všech úspěšných pokusů?
   ii) Jaký je očekávaný počet úspěšných pokusů?
   iii) Jaký je rozptyl počtu úspěšných pokusů?

7. Nechť X značí náhodnou veličinu určující počet přijatých hovorů během jednoho dne na konkrétní telefonní ústředně. Předpokládejme, že rozdělení náhodné veličiny X je $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, 2, ...$
   i) Určete střední hodnotu $\mathbb{E}X$.
   ii) Určete rozptyl $\text{var}X$.

8. Nechť X_1 má Poissonovo rozdělení s parametrem λ_1, X_2 má Poissonovo rozdělení s parametrem λ_2 a X_1 a X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

9. Nechť počet příchozích hovorů na ústředně během daného časového intervalu se řídí Poissonovým rozdělením (parametr λ je přímo úměrný délce časového intervalu). Průměrně přijde během hodiny dvacet hovorů.

a) Jaké je rozdělení počtu příchozích hovorů během deseti minut?

b) Jaká je pravděpodobnost, že během následující minuty přijme ústředna alespoň dva hovory?

c) Jaké je rozdělení doby čekání na další hovor (v minutách)? Určete jeho hustotu.

d) Jaká je rozdělení doby čekání na další hovor, víme-li, že hovor nepřišel během časového intervalu $[0, T]$?

e) Na jak dlouho si operátor v ústředně může odskočit pro kafe, aby s pravděpodobností 0.9 nepromeškal žádný příchozý hovor?

10. Semena mají klíčivost $p \in (0, 1)$. Jaký je optimální počet n semen v jamce, aby byla co nejvyšší pravděpodobnost, že vyklíčí právě jedno? Řešte obecně a pro $p = 1/3$.

11. Do obchodu přijde průměrně 10 zákazníků za hodinu, z toho je průměrně 60% žen. Jaká je pravděpodobnost, že během půl hodiny přijdou do obchodu alespoň 3 zákazníci a všechno to budou ženy?

12. Uvažujme náhodnou veličinu X s hustotou $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0$ (exponenciální rozdělení).

   a) Určete střední hodnotu $\mathbb{E}X$.

   b) Určete rozptyl $\text{var}X$.

   c) Určete pravděpodobnost, že $X > t, \quad t > 0$.

   d) Jaká je pravděpodobnost, že $X > t + s$ za podmínky $X > t$ $(t > 0, s > 0)$? Jinak řečeno, je-li například X doba čekání na příjezd autobusu, tak jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat ještě s minut, za podmínky, že jsme již čekali t minut?

13. Uvažujme, že má náhodná veličina spojité rozdělení, které je bez paměti, tj. $P(X < t + s|X > s) = P(X < t)$. Dále předpokládáme, že pro hustotu tohoto rozdělení $f(t)$ platí:

$$
\begin{aligned}
f(t) = 0 \quad & t < 0, \\
f(t) > 0 \quad & t \geq 0
\end{aligned}
$$

   a hustota f je spojitá na $[0, \infty)$. Jaký tvar tato hustota má a o jaké rozdělení se jedná?

14. Na autě jsou prováděny dvě nezávislé opravy a obě opravy budou hotovy do jedné hodiny. Předpokládejme, že obě opravy jsou v takové fázi, že rozdělení času do ukončení konkrétní opravy je rovnoměrné.

   a) Jaká je střední hodnota a rozptyl čekání na ukončení první opravy?

   b) Jaké je rozdělení doby do ukončení obou oprav?

   c) Určete pravděpodobnost, že obě opravy budou ukončeny do 45 minut.

   d) Uvažujme situaci, kdy opravy nebudou prováděny současně, ale postupně. Jaké rozdělení bude mít čas ukončení obou oprav?

   e) Uvažujme nyní n nezávislých oprav, jejichž doba má rovnoměrné rozdělení $R(0, 60)$. Nechť T_1 je čas, kdy bude dokončena první z oprav, a T_2 čas, kdy bude dokončena poslední z oprav. Jaké je rozdělení n.v. T_1 a T_2?

15. Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením s hustotou $f(x) = Ce^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

   a) Určete konstantu C.

   b) Jaká je střední hodnota náhodné veličiny X?

   c) Jaký je rozptyl n.v. X?

16. Nechť má náhodný vektor (X, Y) rovnoměrné rozdělení na množině $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   a) Určete sdruženou hustotu rozdělení vektoru (X, Y).

   b) Určete marginální hustotu $f_X(x)$ rozdělení n.v. X.

   c) Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?

17. Nechť má náhodný vektor (X, Y) rozdělení s hustotou $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2+2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$ na $\mathbb{R}^2$.

   a) Určete rozdělení n.v. X.

b) Jsou n.v. X a Y nezávislé?

Řešení

1. a) Ne. Uvažujme pravidelnou hrací kostku a nechť si dva různí lidé její strany označí čísly 1,…,6 tak, aby se značení alespoň na některých stranách neshodovalo. Pokud X je náhodná veličina označující, jaké číslo padlo na kostce vzhledem k prvnímu značení, a Y je náhodná veličina označující, jaké číslo padlo na kostce vzhledem k druhému značení, pak rozdělení těchto veličin je stejné ($P(X = k) = P(Y = k) = 1/6$ pro $k = 1, ..., 6$), ale náhodné veličiny X a Y nejsou stejné, jelikož $P(X = Y) < 1$ (existuje $\omega \in \Omega$ takové, že $X(\omega) \neq Y(\omega)$.

   b) Ano. $P_X((a, b)) = P(X \in (a, b)) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b) - \lim_{x\to a+} F(x)$.

   c) Ano. $P_Y((a, b)) = P(Y \in (a, b)) = P(f(X) \in (a, b)) = P(X \in f^{-1}((a, b))) = P_X(f^{-1}((a, b)))$, kde $f^{-1}(M)$ značí vzor množiny M při zobrazení f.

   d) Nemusí.

   e) Ano.

   f) Ne. Uvažujme náhodnou veličinu X s distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

   pak X nabývá nespočetně hodnot, ale F není spojitá funkce.

   g) Ano, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

2. $P_X(k) = P(X = k) = \frac{1}{n}$ pro $k = 1, ..., n$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ \frac{k}{n}, & x \in (k, k+1], k = 1, ..., (n-1), \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 &= \sum_{k=1}^{2} k^2 \cdot \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{(n+1)(2(2n+1) - 3(n+1)}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}. \end{aligned}$$

3.

$$P_X((a, b)) = P(X \in (a, b)) = \frac{\min\{b, 2\} - \max\{a, 0\}}{2},$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & x \in (0, 2] \\ 1, & x > 2, \end{cases}$$

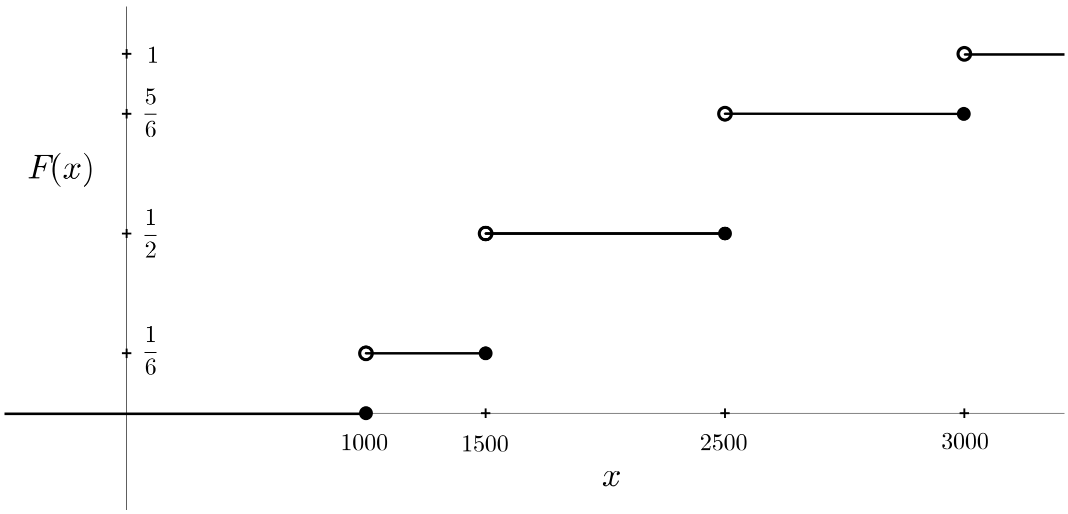
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2], \end{cases}$$

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx = \int_0^2 \frac{x}{2}dx = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = 1,$$

$$\text{var}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \int_0^2 (x-1)^2 \cdot \frac{1}{2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}.$$

4. a)

$$P(X = 1000 = (500 + 500)) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6},$$
$$P(X = 1500 = (1000 + 500)) = \frac{\binom{2}{1} \cdot 1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 2500 = (2000 + 500)) = \frac{\binom{2}{1} \cdot 1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 3000 = (2000 + 1000)) = \frac{1 \cdot 1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}.$$



b)

c) $Y = \frac{X-1000}{5}$, tedy:

$$P(Y = 0) = P(X = 1000) = \frac{1}{6},$$
$$P(Y = 100) = P(X = 1500) = \frac{1}{3},$$
$$P(Y = 300) = P(X = 2500) = \frac{1}{3},$$
$$P(Y = 400) = P(X = 3000) = \frac{1}{6}.$$

d)

$$P(Y > 210) = P(Y = 300) + P(Y = 400) = \frac{1}{2}.$$

e)

$$\mathbb{E}X = \sum_{k \in S} k \cdot P(X = k) = 1000 \cdot \frac{1}{6} + 1500 \cdot \frac{1}{3} + 2500 \cdot \frac{1}{3} + 3000 \cdot \frac{1}{6} = 2000.$$
$$\mathrm{var}X = \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}X)^2 \cdot P(X = k) = 1000^2 \cdot \frac{1}{6} + 500^2 \cdot \frac{1}{3} + 500^2 \cdot \frac{1}{3} + 1000^2 \cdot \frac{1}{6} = 500000.$$

5. i) $P(X = k) = \left(\frac{7}{8}\right)^k \frac{1}{8}, \quad k = 0, 1, \ldots$

ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} kp^k(1-p) = (1-p)p\sum_{k=1}^{\infty} kp^{k-1} = (1-p)p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial p}(p^k) = (1-p)p\frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=1}^{\infty} p^k \\ &= (1-p)p\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{p}{1-p}\right) = (1-p)p\frac{1-p+p}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p},\end{aligned}$$

kde $p = \frac{7}{8}$, tedy $\mathbb{E}X = 7$.

iii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p^k (1-p) = \sum_{k=1}^{\infty}(k(k-1)+k)p^k(1-p) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^k(1-p) + \sum_{k=1}^{\infty} kp^k(1-p)\\ &= (1-p)p^2\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p^{k-2} + \frac{p}{1-p} = \frac{p}{1-p} + (1-p)p^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial^2 p}p^k\\ &= \frac{p}{1-p} + (1-p)p^2\frac{\partial^2}{\partial^2 p}\left(\frac{p^2}{1-p}\right) = \frac{p}{1-p} + (1-p)p^2\frac{2}{(1-p)^3} = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2},\end{aligned}$$

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} - \frac{p^2}{(1-p)^2} = \frac{p}{(1-p)^2},$$

pro $p = \frac{7}{8}$, tedy $\mathrm{var}X = 56$.

6. i) $P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \ k = 1,2,..,n.$

ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(k-1)!}p^k(1-p)^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\\ &= np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} = np(p+(1-p))^{n-1} = np.\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\ &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} + np = \sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(n-k)!(k-2)!}p^k(1-p)^{n-k} + np\\ &= n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}(1-p)^{n-k} + np = n(n-1)p^2 + np\end{aligned}$$

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

7. i)

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda,$$

ii)

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda,$$

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

8.

$$\begin{aligned}P(Y=k) &= P(X_1 + X_2 = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i, X_2 = k-i) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1 = i)P(X_2 = k-i)\\ &= \sum_{i=0}^{k}\frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}\\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k, \quad k = 0,1,...\end{aligned}$$

9. a) Je-li $X_{(60)}$ počet příchozích hovorů za hodinu, pak $\mathbb{E}X_{(60)} = \lambda = 20$. Rozdělení $X_{(10)}$ počtu příchozích hovorů během deseti minut je tedy Poissonovo s parametrem $\lambda = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$, tedy $P(X_{(10)} = k) = e^{-\frac{10}{3}} \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^k}{k!}$, pro $k = 0, 1, ...$

b)

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(X_{(1)} = k) = \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{3^k}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{1} e^{-\frac{1}{3}} \frac{\frac{1}{3^k}}{k!} = 1 - e^{-\frac{1}{3}}(1 + \frac{1}{3}) = 1 - e^{-\frac{1}{3}} \frac{4}{3}.$$

c) Nechť Y je čas mezi dvěma hovory (v minutách). Pak

$$F_Y(t) = P(Y < t) = 1 - P(Y \geq t) = 1 - P(X_{(t)} = 0) = 1 - e^{-\frac{t}{3}} \frac{\left(\frac{t}{3}\right)^0}{0!} = 1 - e^{-\frac{t}{3}}.$$

$$h_Y(t) = F_Y'(t) = \frac{e^{-\frac{t}{3}}}{3}, \quad t > 0.$$

d)

$$F_{Y|Y>T}(t) = P(Y < t | Y > T) = 1 - P(Y \geq t | Y > T) = 1 - \frac{P(Y \geq t)}{P(Y > T)}$$
$$= 1 - \frac{P(X_{(t)} = 0)}{P(X_{(T)} = 0)} = 1 - \frac{e^{-\frac{t}{3}}}{e^{-\frac{T}{3}}} = 1 - e^{-\frac{t-T}{3}} = F_Y(t - T), \quad t \geq T.$$

e) $P(X_t = 0) = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{t}{3}} \geq 0.9$, tedy $-\frac{t}{3} \geq \ln 0.9 \Rightarrow t \leq 3 \ln 0.9 = 0.316$. Operátor má 0.316 minuty, tedy asi $19s$.

10. Počet vyklíčených zrn má o binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n, p)$ a pro $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ nabývá hodnoty 1 s pravděpodobností

$$g(n) = \binom{n}{1} p^1 (1-p)^{n-1} = n\, p\, (1-p)^{n-1}.$$

Taková funkce g je definovaná pro všechna kladná reálná n a je unimodální (do maxima rostoucí, pak klesající), takže maximum nastává v jediném bodě s nulovou derivací

$$g'(n) = p\,(1-p)^{n-1} + n\, p\, (1-p)^{n-1} \ln(1-p) = p\,(1-p)^{n-1}\big(1 + n\, \ln(1-p)\big).$$

Nulová může být pouze poslední závorka, a to pro

$$n = \frac{-1}{\ln(1-p)}.$$

Maximum v oboru přirozených čísel nastává pro jedno ze dvou celých čísel, která jsou nejblíže této hodnotě. Pro $p = 1/3$ je g' nulová v

$$n = \frac{-1}{\ln \frac{2}{3}} \doteq 2.466$$

tedy zde nastává maximum pro $n \in \{2, 3\}$, a to pro obě hodnoty, neboť dosezením zjistíme, že

$$\binom{2}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{2-1} = \frac{4}{9} = \binom{3}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-1}.$$

P.S.: Z ekonomických důvodů se proto vyplatí zasadit jen 2

11. Označme X_1 náhodnou veličinu popisující počet žen během půl hodiny a X_2 náhodnou veličinu popisující počet mužů během půl hodiny. Pak

$$P(X_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \quad \text{a} \quad P(X_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2},$$

kde $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P(X_1 \geq 3, X_2 = 0) = P(X_1 \geq 3) P(X_2 = 0) = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-5} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^k}{k!} = \left(1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{3^k}{k!} e^{-3}\right) e^{-2}.$$

12. a)

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{p.p.}{=} \left[-x \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = 0 + \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.$$

b)

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{p.p.}{=} \left[-x^2 \cdot e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2x e^{-\lambda x} dx = 0 + \frac{2}{\lambda} \int_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}$$
$$\mathrm{var} X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

c)

$$P[X > t] = 1 - F_X(t) = \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_t^\infty = e^{-\lambda t}.$$

d)

$$P[X > t + s | X > t] = \frac{P[X > t + s, X > t]}{P[X > t]} = \frac{P[X > t + s]}{P[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P[X > s].$$

Tento výsledek lze interpretovat tak, že exponenciální rozdělení nemá paměť.

13.

$$\begin{aligned}
P(X < t + s | X > s) &= P(X < t) \\
\frac{P(X < t + s, X > s)}{P(X > s)} &= P(X < t) \\
\frac{P(s < X < t + s)}{P(X > s)} &= P(X < t) \\
\frac{\int_s^{s+t} f(x)dx}{\int_s^\infty f(x)dx} &= \int_0^t f(x)dx \\
\frac{\int_s^{s+t} f(x)dx}{\int_0^t f(x)dx} &= \int_s^\infty f(x)dx \\
\lim_{t\to 0+} \frac{\int_s^{s+t} f(x)dx}{\int_0^t f(x)dx} &= \lim_{t\to 0+} \int_s^\infty f(x)dx \\
\frac{f(s)}{f(0)} &= \int_s^\infty f(x)dx \\
\frac{\partial}{\partial s} \frac{f(s)}{f(0)} &= \frac{\partial}{\partial s} \int_s^\infty f(x)dx \\
\frac{f'(s)}{f(0)} &= -f(s)
\end{aligned}$$

Dostaneme tedy diferenciální rovnici $f'(s) = -f(0)f(s)$, tedy $f(s) = Ce^{-f(0)s}$. Označme $\lambda = f(0)$, pak $f(s) = Ce^{-\lambda s}$. Jelikož $\int_0^\infty f(s)ds = 1$, dostaneme $C = \lambda$, tedy hustota má tvar $f(s) = \lambda e^{-\lambda s}$, což je hustota exponenciálního rozdělení. Pokud tedy chceme spojité rozdělení na $[0, \infty)$ se spojitou hustotou, které nemá paměť, tak máme jedinou možnost a to exponenciální rozdělení.

14. Označme X_i čas v minutách, který musí majitel ještě čekat na dokončení i-té opravy, $i = 1, 2$. Za zadání plyne, že $X_i \sim R(0, 60)$, tj. hustota rozdělení této náhodné veličiny je:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{60}, \quad x \in (0, 60), \\
&= 0, \quad x \notin (0, 60).
\end{aligned}$$

a)

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_\mathbb{R} xf(x)dx = \int_0^{60} \frac{x}{60}dx = 30.$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}X_1 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 &= \int_0^{60} x^2 \frac{1}{60}dx - 30^2 \\
&= \left[\frac{x^3}{180}\right]_0^{60} - 900 = 1200 - 900 = 300.
\end{aligned}$$

Střední doba čekání na ukončení první opravy je tedy 30 minut, rozptyl je 300.

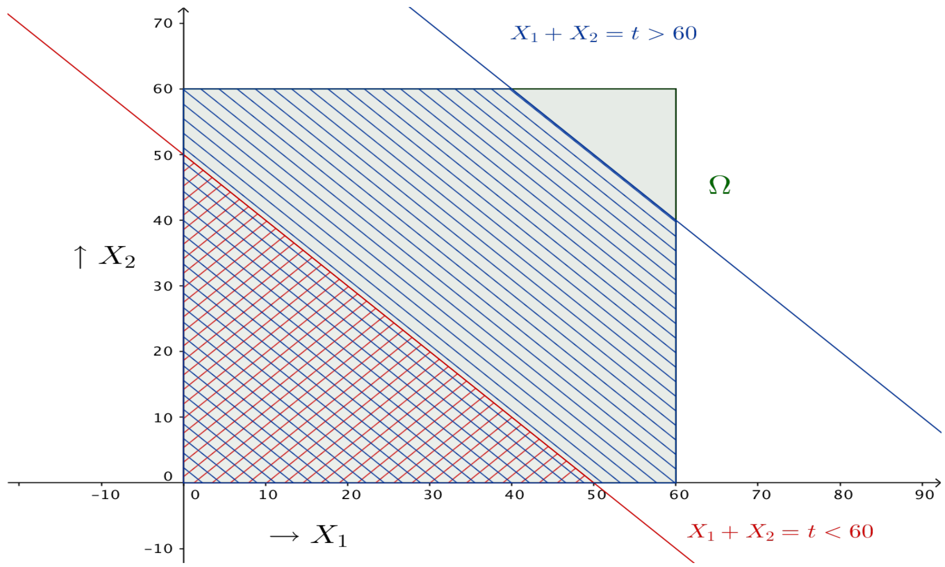
b) Označme X dobu do ukončení obou oprav, pak $X = \max\{X_1, X_2\}$. Určíme distribuční funkci náhodné veličiny X.

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X < x) = P(X_1 < x, X_2 < x) = P(X_1 < x)P(X_2 < x) \\
&= \left(\int_0^x \frac{1}{60}dt\right)^2 = \left(\frac{x}{60}\right)^2 = \frac{x^2}{3600}.
\end{aligned}$$

Z distribuční funkce F_X určíme hustotu f_X n.v. X.

$$f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x}F_X(x) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2}{3600} = \frac{x}{1800}, x \in (0, 60.)$$

Rozdělení ukončení obou oprav je určeno uvedenou distribuční funkcí nebo ekvivalentně vypočítanou hustotou.



Obrázek 7:
Zelený čtverec $[0,60]^2$ zobrazuje množinu všech realizací náhodných veličin X_1, X_2 (tj. prostor Ω), červeně vyšrafovaná oblast je oblast, kde $Y < t$ pro $t < 60$ (část 1.), modře vyšrafovaná oblast je oblast, kde $Y < t$ pro $t > 60$ (část 2.).

c)
$$P(X \leq 45) = \int_0^{45} \frac{x}{1800} dx = \left[\frac{x^2}{3600}\right]_0^{45} = \frac{2025}{3600} = \frac{9}{16}.$$

d) Označme Y čas ukončení obou oprav, pak $Y = X_1 + X_2$. Sdružená hustota $f_{X_1,X_2}(x,y) = f_{X_1}(x) f_{X_2}(y) = \frac{1}{3600}$ pro $(x,y) \in [0,60]^2$ (Jelikož jsou n.v. X_1 a X_2 nezávislé). Pro jednoduchost rozdělíme výpočet na dvě situace.

I. $t \leq 60$, pak
$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X_1 + X_2 < t) = \int_0^t \int_0^{t-x} \frac{1}{3600} dy dx = \frac{1}{3600} \int_0^t (t-x) dx$$
$$= \frac{1}{3600} \left[\frac{(t-x)^2}{-2}\right]_0^t = \frac{t^2}{7200}, \quad t \in (0,60),$$
tedy $f_Y(t) = \frac{t}{3600}, \quad t \in (0,60)$.

II. $t > 60$, pak
$$F_Y(t) = P(Y < t) = P(X_1 + X_2 < t) = \int_0^{60} \int_0^{\min\{60, t-x\}} \frac{1}{3600} dy dx$$
$$= \frac{1}{3600}\left(\frac{t^2}{2} - (t-60)^2\right) = \frac{1}{3600}\left(\frac{-t^2}{2} + 120t - 3600\right) = -\frac{t^2}{7200} + \frac{t}{30} - 1,$$
tedy $f_Y(t) = -\frac{t}{3600} + \frac{1}{30}, \quad t \in (60,120)$.

e) $T_1 = \min\{X_1, ..., X_n\}$ a $T_2 = \max\{X_1, .., X_n\}$. Pak
$$F_{T_2}(x) = P(T_2 < x) = P(X_1 < x, ..., X_n < x) = \prod_{i=1}^n P(X_i < x) = \left(\int_0^x \frac{1}{60} dt\right)^n$$
$$= \left(\frac{x}{60}\right)^n,$$
$$f_{T_2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{60}\right)^n = \frac{n x^{n-1}}{60^n},$$

$$\begin{aligned}F_{T_1}(x) &= P(T_1 < x) = P(\min\{X_1,...,X_n\} < x) = 1 - P(\min\{X_1,...,X_n\} \geq x)\\ &= 1 - P(X_1 \geq x, ..., X_n \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^n \int_x^{60} \frac{1}{60} dt\\ &= 1 - \left(\frac{60-x}{60}\right)^n\end{aligned}$$

a

$$f_{T_1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \left(\frac{60-x}{60}\right)^n\right) = \frac{n(60-x)^{n-1}}{60^n}.$$

15. a) Jelikož je f hustota, tak platí:

$$\int_{\mathbf{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} Ce^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1$$

a proto

$$\frac{1}{C} = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Jelikož ale neumíme přímo vypočítat integrál $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$, pomůžeme si následujícím trikem. Postupně použijeme substituce: $(*)$ $\left|\begin{array}{cc} v = x-\mu, & w = y-\mu \\ dv = dx, & dw = dy\end{array}\right|$, $(\star)$ $\left|\begin{array}{cc} v = r\cos(\alpha), & w = r\sin(\alpha) \\ dvdw = rdrd\alpha & \end{array}\right|$ a $(\bullet)$ $\left|t = \frac{r^2}{2\sigma^2},\ dt = \frac{r}{\sigma^2}dr\right|$

$$\begin{aligned}\frac{1}{C^2} &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dydx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dydx \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2+w^2}{2\sigma^2}} dwdv \overset{(\star)}{=} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} rdr\alpha dr\\ &= 2\pi \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} rdr \overset{(\bullet)}{=} 2\pi \int_0^\infty e^{-t}\sigma^2 dt = 2\pi\sigma^2 \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 2\pi\sigma^2.\end{aligned}$$

Tedy

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \int_{\mathbb{R}} x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \overset{\left|\begin{array}{c} t = x-\mu \\ dv = dx\end{array}\right|}{=} \int_{\mathbb{R}} (t+\mu)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt\\ &= \mu\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt + \int_{\mathbb{R}} t\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt =^{1} \mu.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx - \mu^2\\ &\overset{\left|\begin{array}{c} t = x-\mu \\ dv = dx\end{array}\right|}{=} \int_{\mathbb{R}} (t+\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt - \mu^2 = \int_{\mathbb{R}} (t^2 + 2t\mu + \mu^2)\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt - \mu^2\\ &= \int_{\mathbb{R}} t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \overset{p.p.}{=} \left[t\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\left(-\sigma^2 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}\right)\right]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt\\ &= \sigma^2.\end{aligned}$$

16. a) Jelikož má n.v. (X, Y) rovnoměrné rozdělení na Ω, tak

$$\begin{aligned}f_{X,Y}(x,y) &= c, \quad (x,y) \in \Omega\\ &= 0, \quad (x,y) \notin \Omega.\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} cdxdy = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}.$$

[1] První integrál je roven jedné, jelikož integrujeme hustotu, druhý je roven nule, jelikož integrujeme lichou funkci.

b)

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{y\in\mathbb{R}:x^2+y^2\leq 1} \frac{1}{\pi}dy = \frac{1}{\pi}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1dy = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, \quad x \in [-1,1].$$

c) X a Y jsou nezávislé, když $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. Jelikož je úloha symetrická, tak $f_X(x) = f_Y(x)$. Dostáváme $f_{X,Y}(x,y) = 0 \neq f_X(x)f_Y(x)$ pro $(x,y) \in [-1,1]^2 \setminus \Omega$, tedy veličiny X a Y jsou závislé. To lze také snadno nahlédnout z tvaru množiny Ω[2]

17. a)

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2+2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(\rho x+y)^2+(1-\rho^2)x^2}{2(1-\rho^2)}} dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(\rho x+y)^2}{2(1-\rho^2)}} dy \overset{3}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Tedy $X \sim N(0,1)$.

b) Ze symetrie dostaneme $Y \sim N(0,1)$ a $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. To platí pouze pro $\rho = 0$, v ostatních případech jsou n.v. X a Y závislé.

---

[2] Aby mohly být n.v. X a Y nezávislé, tak by musela být tato množina obdelníková. Takto nabývá sice n.v. X hodnot z intervalu $[-1,1]$, ale pro konkrétní hodnoty y, kterých nabývá n.v. Y už nabývá n.v. X pouze hodnoty z intervalu $[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$.

[3] Jelikož $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{(\rho x+y)^2}{2(1-\rho^2)}}$ je hustota normálního rozdělení s parametry $\mu = -\rho x$ a $\sigma^2 = 1-\rho^2$.

Náhodný vektor a centrální limitní věta

1. Oštěpařka Anna má průměrnou délku hodu 67 m se směrodatnou odchylkou 6 m. Oštěpařka Barbora má průměrnou délku hodu 75 m se směrodatnou odchylkou 3 m. Předpokládejme, že délky hodů mají nezávislá normální rozdělení. Spočtěte pravděpodobnost, že při jednom hodu hodí Anna dál než Barbora.

2. Uvažujme nezávislé náhodné veličiny X_i, kde $X_i \sim R(0, a)$.

   a) Nechť $Y = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Určete $\mathbb{E}Y$ a var$Y$.

   b) Nechť $Z = \max\{X_1, ..., X_n\}$. Určete $\mathbb{E}Z$ a var$Z$.

   c) Zamyslete se nad výsledky z částí a) a b). Co se lze domnívat o konvergnenci náhodných veličin Y a Z pro $n \to \infty$?

3. Na rodinné farmě se narodí průměrně 8 kuřat za jeden den. Předpokládejme, že počet narozených kuřat se řídí Poissonovým rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že se v dubnu narodilo na této farmě více než 230 kuřat?

4. Student matfyzu jezdí každý pracovní den do školy kolem devaté hodiny ranní a ze školy kolem páté hodiny večerní, pouze v pátek student odjíždí ze školy již kolem druhé hodiny. K cestě do školy a zpět používá linku metra B, která má kolem deváte ranní hodiny i páté odpolední hodiny intervaly 3 minuty a kolem druhé odpolední hodiny má intervaly 7 minut. Semestr má 14 týdnů a předpokládejme pro jednoduchost, že v každý pracovní den semestru probíhá výuka, na kterou student jel. Odhadněte pravděpodobnost, že student strávil čekáním na metro B v daném semestru více jak 4 hodiny? Řešte pomocí CLV.

5. Letecká společnost prodává letenky a chce co nejvíce ušetřit. Letadlo Boeing Nexh Generation 737-900 má 220 míst, ale ví se, že zhruba 5 % lidí se k odletu nedostaví.

   a) Jaká je pravděpodobnost, že pokud společnost prodá 225 letenek, nepřesáhne počet cestujících kapacitu letadla?

   b) Kolik může společnost prodat letenek na jeden let, chce-li držet pravděpodobnost, že nepřesáhne kapacitu, kolem 90 %?

6. Plavčík v létě pomáhá tonoucímu průměrně jednou za dva dny. Jaká je pravděpodobnost, že během letních prázdnin (červenec a srpen) bude pomáhat tonoucímu více než 26 krát?

Tabulka 1: Distribuční funkce $\Phi(x)$ normovanáno normálního rozdělení.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.24	0.5948	0.48	0.6844	0.72	0.7642	0.96	0.8315
0.01	0.5040	0.25	0.5987	0.49	0.6879	0.73	0.7673	0.97	0.8340
0.02	0.5080	0.26	0.6026	0.50	0.6915	0.74	0.7703	0.98	0.8365
0.03	0.5120	0.27	0.6064	0.51	0.6950	0.75	0.7734	0.99	0.8389
0.04	0.5160	0.28	0.6103	0.52	0.6985	0.76	0.7764	1.00	0.8413
0.05	0.5199	0.29	0.6141	0.53	0.7019	0.77	0.7794	1.01	0.8438
0.06	0.5239	0.30	0.6179	0.54	0.7054	0.78	0.7823	1.02	0.8461
0.07	0.5279	0.31	0.6217	0.55	0.7088	0.79	0.7852	1.03	0.8485
0.08	0.5319	0.32	0.6255	0.56	0.7123	0.80	0.7881	1.04	0.8508
0.09	0.5359	0.33	0.6292	0.57	0.7157	0.81	0.7910	1.05	0.8531
0.10	0.5398	0.34	0.6331	0.58	0.7190	0.82	0.7939	1.06	0.8554
0.11	0.5438	0.35	0.6368	0.59	0.7224	0.83	0.7967	1.07	0.8577
0.12	0.5478	0.36	0.6406	0.60	0.7257	0.84	0.7995	1.08	0.8599
0.13	0.5517	0.37	0.6443	0.61	0.7291	0.85	0.8023	1.09	0.8621
0.14	0.5557	0.38	0.6480	0.62	0.7324	0.86	0.8051	1.10	0.8643
0.15	0.5596	0.39	0.6517	0.63	0.7357	0.87	0.8078	1.11	0.8665
0.16	0.5636	0.40	0.6554	0.64	0.7389	0.88	0.8106	1.12	0.8686
0.17	0.5675	0.41	0.6591	0.65	0.7422	0.89	0.8133	1.13	0.8708
0.18	0.5714	0.42	0.6628	0.66	0.7454	0.90	0.8159	1.14	0.8729
0.19	0.5753	0.43	0.6664	0.67	0.7486	0.91	0.8186	1.15	0.8749
0.20	0.5793	0.44	0.6700	0.68	0.7517	0.92	0.8212	1.16	0.8770
0.21	0.5832	0.45	0.6736	0.69	0.7549	0.93	0.8238	1.17	0.8790
0.22	0.5871	0.46	0.6772	0.70	0.7580	0.94	0.8264	1.18	0.8810
0.23	0.5910	0.47	0.6808	0.71	0.7611	0.95	0.8289	1.19	0.8830

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.20	0.8849	1.48	0.9306	1.76	0.9608	2.08	0.9812	2.64	0.9959
1.21	0.8869	1.49	0.9319	1.77	0.9616	2.10	0.9821	2.66	0.9961
1.22	0.8888	1.50	0.9332	1.78	0.9625	2.12	0.9830	2.68	0.9963
1.23	0.8907	1.51	0.9345	1.79	0.9633	2.14	0.9838	2.70	0.9965
1.24	0.8925	1.52	0.9357	1.80	0.9641	2.16	0.9846	2.72	0.9967
1.25	0.8944	1.53	0.9370	1.81	0.9649	2.18	0.9854	2.74	0.9969
1.26	0.8962	1.54	0.9382	1.82	0.9656	2.20	0.9861	2.76	0.9971
1.27	0.8980	1.55	0.9394	1.83	0.9664	2.22	0.9868	2.78	0.9973
1.28	0.8997	1.56	0.9406	1.84	0.9671	2.24	0.9875	2.80	0.9974
1.29	0.9015	1.57	0.9418	1.85	0.9678	2.26	0.9881	2.82	0.9976
1.30	0.9032	1.58	0.9429	1.86	0.9686	2.28	0.9887	2.84	0.9977
1.31	0.9049	1.59	0.9441	1.87	0.9693	2.30	0.9893	2.86	0.9979
1.32	0.9066	1.60	0.9452	1.88	0.9699	2.32	0.9898	2.88	0.9980
1.33	0.9082	1.61	0.9463	1.89	0.9706	2.34	0.9904	2.90	0.9981
1.34	0.9099	1.62	0.9474	1.90	0.9713	2.36	0.9909	2.92	0.9982
1.35	0.9115	1.63	0.9484	1.91	0.9719	2.38	0.9913	2.94	0.9984
1.36	0.9131	1.64	0.9495	1.92	0.9726	2.40	0.9918	2.96	0.9985
1.37	0.9137	1.65	0.9505	1.93	0.9732	2.42	0.9922	2.98	0.9986
1.38	0.9162	1.66	0.9515	1.94	0.9738	2.44	0.9927	3.00	0.99865
1.39	0.9177	1.67	0.9525	1.95	0.9744	2.46	0.9931	3.20	0.99931
1.40	0.9192	1.68	0.9535	1.96	0.9750	2.48	0.9934	3.40	0.99966
1.41	0.9207	1.69	0.9545	1.97	0.9756	2.50	0.9938	3.60	0.999841
1.42	0.9222	1.70	0.9554	1.98	0.9761	2.52	0.9941	3.80	0.999928
1.43	0.9236	1.71	0.9564	1.99	0.9767	2.54	0.9945	4.00	0.999968
1.44	0.9251	1.72	0.9573	2.00	0.9772	2.56	0.9948	4.50	0.999997
1.45	0.9265	1.73	0.9582	2.02	0.9783	2.58	0.9951	5.00	0.999999
1.46	0.9279	1.74	0.9591	2.04	0.9793	2.60	0.9953		
1.47	0.9292	1.75	0.9599	2.06	0.9803	2.62	0.9955		