Kapitola 1

Úvod

1.1 Značení

- $\mathbb{N}$ ... přirozená čísla $(1, 2, 3, ...)$.
- $\mathbb{Z}$ ... celá čísla $(-3, -2, -1, 0, 1, 2, ...)$.
- $\mathbb{Q}$ ... racionální čísla ($\frac{p}{q}$, kde $p \in \mathbb{Z}$ a $q \in \mathbb{N}$)
- $\mathbb{R}$ ... reálná čísla
- $\mathbb{C}$ ... komplexní čísla

1.2 Výroky - opakování

Definice 1.1 ***Výrok*** *je formule, která má nějakou pravdivostní hodnotu (má smysl rozhodnout, zda je toto tvrzení pravdivé nebo nepravdivé). Pokud výrok platí, říkáme, že má pravdivostní hodnotu* 1*, v opačném případě říkáme, že má pravdivostní hodnotu* 0*.*

Příklad 1.1 *Výrokem jsou například věty "Součet dvou sudých čísel je sudé číslo", nebo "Vsetín je největší město světa". Naopak věty "Ať žije první máj!"nebo "Učte se na zkoušky."výroky nejsou.*

Definice 1.2 *Nechť V a W jsou výroky, pak zavedeme pojmy*

- $\neg$ ... ***negace*** *(ne)*

- $\wedge$ ... ***konjunkce*** *(a)*
- $\vee$ ... ***disjunkce*** *(nebo)*
- $\Rightarrow$ ... ***implikace***
- $\Leftrightarrow$ ... ***ekvivalence***

následující tabulkou:

V	W	$\neg V$	$V \vee W$	$V \wedge W$	$V \Rightarrow W$	$V \Leftrightarrow W$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Dále zaveďme kvantifikátory

- $\exists$ ... **existenční kvantifikátor** (existuje)
- $\forall$ ... **obecný kvantifikátor** (pro všechna)

Příklad 1.2 *Negace implikovaná na výrok s kvantifikátorem:*

$$\neg(\forall x : V(x)) \Leftrightarrow \exists x : \neg V(x)$$
$$\neg(\exists y : W(y)) \Leftrightarrow \forall y : \neg W(y)$$

Například

$$\neg(\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} : x = y + 1) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \neg(\exists y \in \mathbb{R} : x = y + 1) \Leftrightarrow$$
$$\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : \neg(x = y + 1) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} : x \neq y + 1$$

1.3 Množiny - opakování

Uvedeme nepřesnou "naivní"definici množiny (George Cantor 1845-1918).

Definice 1.3 ***Množina*** *je soubor objektů, které jsou přesně určené a různé a kde vždy nastává pouze jedna z následujících možností:*

- *$a \in M$ ... a patří do množiny M.*

- $a \notin M$ .. *a nepatří do množiny* M.

Tyto objekty nazveme ***prvky množiny****.*

Poznámka 1.1 *Množina je svými prvky jednoznačně určena.*

Definice 1.4 *Nechť* A *a* B *jsou množiny.*

- $A \subset B$ ... A *je* ***podmnožina*** *množiny* B*, tj.* $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$.
- $A \cup B$ ... ***sjednocení*** *množin* A *a* B*, tj. množina všech prvků* x*, které jsou alespoň v jedné z množin* A, B. $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B$ ... ***průnik*** *množin* A *a* B*, tj. množina všech prvků* x*, které jsou jak v* A *tak v* B. $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- $A \setminus B$ ... ***rozdíl*** A *a* B*, tj. množina všech prvků* x*, které leží v* A *a zároveň neleží v* B. $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- $\emptyset$ ... ***prázdná množina****, tj. množina která neobsahuje žádný prvek.*

Nechť A_i *jsou množiny, pak*

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup ... = \{x : \exists i \in \mathbb{N} : x \in A_i\}$
- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap ... = \{x : \forall i \in \mathbb{N} : x \in A_i\}$

Definice 1.5 ***Kartézský součin*** A *a* B *značený* $A \times B$ *je množina všech uspořádáných dvojic* (a, b) *takových, že* $a \in A$ *a* $b \in B$*, tj.* $A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Příklad 1.3 *Nechť* $A = \{\{1\}, \{2\}\}$ *a* $B = \{\{0\}, \{3\}\}$*, pak*

$$A \times B = \{(1, 0), (1, 3), (2, 0), (2, 3)\}$$

.

Definice 1.6 *Nechť* $K \subset \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$.

- *Řekněme, že* m *je* ***horní odhad*** *(horní závora) množiny* K*, právě tehdy, když* $\forall x \in K : x \leq m$.
- *Řekněme, že* m *je* ***dolní odhad*** *(dolní závora) množiny* K*, právě tehdy, když* $\forall x \in K : x \geq m$.

- *Řekněme, že m je* ***maximální prvek*** *množiny K $(\max K)$, právě tehdy, když $m \in K$ a $\forall x \in K : x \leq m$.*

- *Řekněme, že m je* ***minimální prvek*** *množiny K $(\min K)$, právě tehdy, když $m \in K$ a $\forall x \in K : x \geq m$.*

- *Řekněme, že m je* ***supremum*** *množiny K $(\sup K)$, právě tehdy, když*

  – $\forall x \in K : x \leq m$,

  – $\forall m' < m\ \exists x \in K : x > m'$.

- *Řekněme, že m je* ***infimum*** *množiny K $(\inf K)$, právě tehdy, když*

  – $\forall x \in K : x \geq m$,

  – $\forall m' > m\ \exists x \in K : x < m'$.

- *Řekněme, že K je* ***shora omezená****, právě tehdy, když existuje horní odhad K.*

- *Řekněme, že K je* ***zdola omezená****, právě tehdy, když existuje dolní odhad K.*

- *Řekněme, že K je* ***omezená****, právě tehdy, když existuje horní i dolní odhad K $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in K : |x| < m$.*

Příklad 1.4 *$K = \{1, 2, 3\}$, pak $1 = \min K = \inf K$ a $3 = \max K = \sup K$.*

Příklad 1.5 *$K = \{\frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$. Pak $\min K = \inf K = 0$, $\sup K = 1$ a maximum K neexistuje. Skutečně, $0 \in K$ (pro $n = 1$) a $\frac{n-1}{n} \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, proto $0 = \min K = \inf K$. 1 je horní závora, neboť $1 > \frac{n-1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$. Nechť $m < 1$, pak pro n splňující $\frac{1}{n} < 1 - m$ dostaneme, že $\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} > 1 - (1 - m) = m$. Proto $\sup K = 1$ a $\max K$ neexistuje.*

Příklad 1.6 *$\emptyset \neq K \subset \mathbb{Z}$, K je shora omezená, potom $\sup K \in \mathbb{Z}$.*

Důkaz

Ukážeme, že $\sup K = \max K$. Nechť $\sup K \notin K$. Označme $m' = \sup(K) - 1 \Rightarrow \exists a \in K, a > m'$. Zároveň ale platí, že $a < \sup K$ (neboť $\sup K \notin K$). Pak ale $\exists b \in K$ takové, že $b > a$, tedy $\sup K - 1 < a < b < \sup K$ a zároveň $a - b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ SPOR. □

Příklad 1.7 *$\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ je shora omezená množina, nechť navíc $\sup A \notin A$, pak má A nekonečně mnoho prvků.*

Důkaz

$$\begin{aligned}
&x_0 = \sup A - 1 && \Rightarrow \exists x_1 \in A : x_0 < x_1 \\
&x_1 < \sup A && \Rightarrow \exists x_2 \in A : x_1 < x_2 \\
&x_2 < \sup A && \Rightarrow \exists x_3 \in A : x_2 < x_3 \\
&\quad\vdots \\
&x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < \sup A
\end{aligned}$$

□

Následující větu uvedeme bez důkazu. Její důkaz lze nalézt např. ve skriptech Martina Rmoutila (https://www2.karlin.mff.cuni.cz/ rmoutil/NMTM101/MA1.pdf).

Věta 1.1 (Existence suprema) *Každá neprázdná shora omezená podmnožina* $\mathbb{R}$ *má supremum.*

Kapitolu uzavřem rozšířenou definicí suprema a infima:

Definice 1.7 *Nechť* $M \subset \mathbb{R}$ *je shora neomezená množina, tak její* ***supremum*** *definujeme jako* $\sup M = \infty$*. Je-li* $M \subset \mathbb{R}$ *zdola neomezená množina, tak její* ***infimum*** *definujeme jako* $\inf M = -\infty$*. Dále zavedeme* $\sup \emptyset = -\infty$ *a* $\inf \emptyset = \infty$*.*

1.4 Zobrazení

Definice 1.8 *Nechť* M, N *jsou neprázdné množiny, pak* $f \subset M \times N$ *nazýváme* ***zobrazení*** *z množiny* M *do množiny* N*, jestliže*

$$\forall x \in M \ \forall y_1, y_2 \in N : \ ([x, y_1] \in f \wedge [x, y_2] \in f) \Rightarrow y_1 = y_2.$$

Pro přehlednost používáme pro zobrazení značení $f(x) = y$*.* ***Definičním oborem*** *zobrazení* f *nazýváme množinu*

$$D_f = \{x \in M; \exists y \in N : f(x) = y\}.$$

Nechť $X \subseteq D_f$*, pak* $f(X) := \{y \in N; \exists x \in X : f(x) = y\}$ *nazýváme* ***obraz*** *množiny* X *při zobrazení* f*.*

Nechť $Y \subseteq N$*, pak* $f^{-1}(Y) := \{x \in D_f; \exists y \in Y : f(x) = y\}$ *nazýváme* ***vzor*** *množiny* Y *při zobrazení* f*.*

$f(D_f)$ *nazýváme* ***obor hodnot*** *zobrazení* f *a značíme* H_f*.*

Poznámka 1.2 *Nechť M a N jsou množiny, pak symbolem $f : M \to N$ značíme fakt, že*

- *f je zobrazení z množiny M do množiny N,*
- *M je definiční obor zobrazení f,*
- *Obor hodnot f je podmnožinou množiny N.*

Poznámka 1.3 *Speciální případy:*

- *Je-li $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak f nazýváme **reálnou funkcí reálné proměnné**.*
- *Je-li $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pak f nazýváme **posloupností reálných čísel**.*

Definice 1.9 *Nechť $f : M \to N$.*

- *f je **prosté zobrazení**, jestliže $\forall x_1, x_2 \in D_f : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*
- *f je **zobrazení na**, jestliže $\forall y \in N\ \exists x \in D_f : y = f(x)$.*
- *f je **bijekce**, jestliže je prosté a na.*
- *f je **identita** (značíme I), jestliže $\forall x \in D_f : f(x) = x$.*
- *f je **konstantní zobrazení**, jestliže $\exists c \in N$ takové, že $\forall x \in D_f : f(x) = c$.*
- *Nechť f je prosté zobrazení, pak $f^{-1} : H_f \to D_f$ takové, že $(x, y) \in f \Rightarrow (y, x) \in f^{-1}$, je **inverzní zobrazení** k zobrazení f.*
- *Řekněme, že zobrazení f a g se **rovnají**, jestliže $D_f = D_g$ a $\forall x \in D_f : f(x) = g(x)$.*
- *Nechť $D_f \subset D_g$ a $f(x) = g(x)\ \forall x \in D_f$, pak f je **zúžením** zobrazení g a g je **rozšířením** zobrazení f. Je-li $D_f = B$, značíme $f = g|_B$.*

Příklad 1.8 *Nechť $f(x) = x^2$ na celém D_f. Pak pro $D_f = \mathbb{R}^+$ je f prosté zobrazení, pro $D_f = \mathbb{R}$ f není prosté ($f(-1) = f(1)$). Nechť $D_f = \mathbb{R}$, pak pro $N = \mathbb{R}^+$ je f zobrazení na, pro $N = \mathbb{R}$ není na (např. $y = -3$).*

Definice 1.10 *Nechť $f : M \to N$, $g : N \to P$. Pak zobrazení $g \circ f : M \to P$ takové, že $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $x \in M$, se nazývá **složené** zobrazení, kde f nazýváme **vnitřním** zobrazením a g nazýváme **vnějším** zobrazením.*

Příklad 1.9 *Nechť* $f(x) = \sin x$ *a* $g(x) = x^2$*, pak* $f \circ g(x) = \sin x^2$ *a* $g \circ f(x) = \sin^2 x$*.*

Otázka:

- Nechť $f(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$, pak $f^{-1}(x) = \ln x$. Rovnají se zobrazení $f \circ f^{-1}$ a $f^{-1} \circ f$?

Kapitola 2

Posloupnosti

Definice 2.1 *Zobrazení z* $\mathbb{N}$ *do* $\mathbb{R}$ *nazýváme posloupností (reálných čísel). Značíme* $\{a_1, a_2, ...\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *nebo* $\{a_n\}$.

Definice 2.2 *Posloupnost* $\{a_n\}$ *je*

- *konstantní, jestliže* $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n = a$.
- *rostoucí, jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1}$.
- *klesající, jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1}$.
- *nerostoucí, jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}$.
- *neklesající, jestliže* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1}$.
- *monotónní, jestliže platí jedna z předchozích variant.*
- *shora omezená, jestliže* $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n < K$.
- *zdola omezená, jestliže* $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : a_n > K$.
- *omezená, jestliže* $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| < K$.

Příklad 2.1 *Posloupnost* $a_n = 3 + 2n$ *(aritmeticka posloupnost) je rostoucí, zdola omezená.*

Příklad 2.2 *Posloupnost* $a_n = \frac{n-1}{n}$ *je rostoucí a omezená. Skutečně,*

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &< n^2 \\ (n-1)(n+1) &< n^2 \\ a_n = \frac{n-1}{n} &< \frac{n}{n+1} = a_{n+1}, \end{aligned}$$

navíc $0 \leq \frac{n-1}{n} < 1$.

Otázka:

- Je geometrická posloupnost $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ monotónní?
- Je geometrická posloupnost omezená?

Otázka:

- Které z následujících výroků jsou ekvivalentní z výrokem: Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená?
  a) Posloupnost $\{a_n\}$ je omezená shora i zdola.
  b) $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n| \leq K$.
  c) Množina $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ je omezená.
  d) Existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ a $K \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n > n_0 :\ |a_n| < K$.

Definice 2.3 *Řekněme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *má vlastní limitu* $A \in \mathbb{R}$, *jestliže* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 :\ |a_n - A| < \varepsilon$. *Značíme* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ *nebo* $a_n \to A$. *Řekněme, že posloupnost* $\{a_n\}$ *je konvergentní, má-li vlastní limitu, tj. existuje-li* $A \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. *Jestliže posloupnost nemá vlastní limitu, říkáme, že diverguje (je divergentní).*

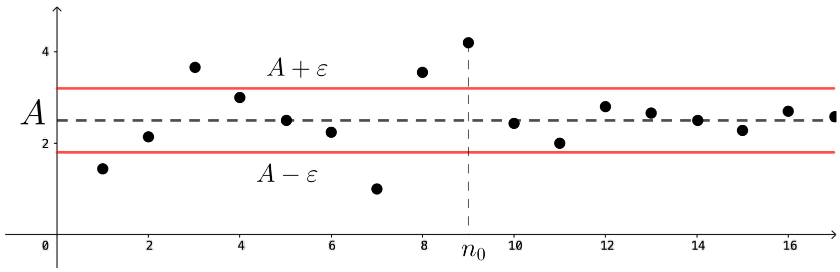
Příklad 2.3

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Důkaz

Chceme ukázat: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 :\ |\frac{n-1}{n} - 1| < \varepsilon$.

Mějme $\varepsilon > 0$ *a hledejme* n_0. *Chceme, aby* $|\frac{n-1}{n} - 1| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$, *tedy* $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. □



Příklad 2.4 *Posloupnost* $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, \ldots$ *nemá limitu.*

Důkaz SPOREM: Nechť existuje limita této posloupnosti. Označme ji A. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{4}$, *pak* $|a_{2n-1} - A| = |1 - A| < \frac{1}{4} \Rightarrow A \in (\frac{3}{4}, \frac{5}{4})$. *Zároveň platí, že* $|a_{2n} - A| < \frac{1}{4}$ *a* $\forall n \in \mathbb{N} : a_{2n} \leq \frac{1}{2}$, *tedy* $A \leq \frac{3}{4} \Rightarrow$ *SPOR.*

Otázka:
Rozhodněte o platnosti tvrzení: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ právě tehdy, když existuje $K > 0$ takové, že platí $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < K\varepsilon$.

Odpověď: Tvrzení je pravdivé. *Důkaz*

($\Rightarrow$) Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tak $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$, tedy stačí volit $K = 1$.

($\Leftarrow$) Nechť existuje $K > 0$ takové, že platí $\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon}$. A mějme $\varepsilon > 0$. Pak pro $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{K}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : |a_n - A| < K\tilde{\varepsilon} = K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

□

Otázka:
Které z následujících výroků jsou ekvivalentní s výrokem: "posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní"?

i) $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n| > K$.

ii) $\forall A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.

iii) $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n > n_0 : |a_n - A| > \varepsilon$.

iv) $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n \in \mathbb{N} : |a_n - A| > \varepsilon$.

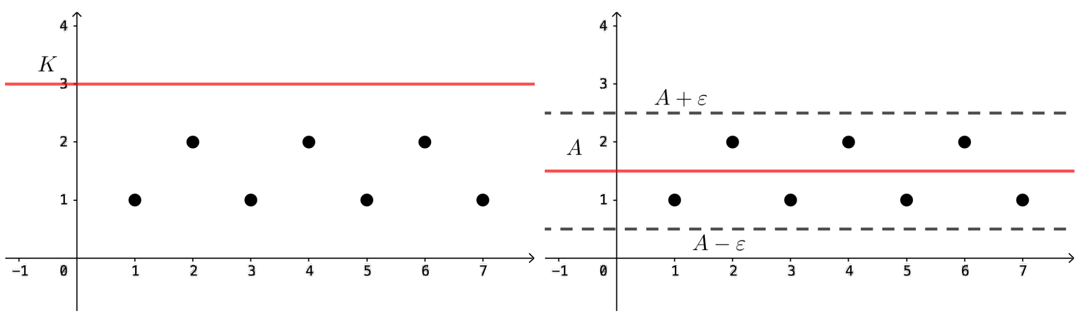
Odpověď: Ekvivalentní je pouze výrok iii). Výrok i) je negací omezenosti posloupnosti $\{a_n\}$. Tedy posl. $\{a_n\}$ není omezená, když splňuje podmínku i). To sice již implikuje, že posloupnost $\{a_n\}$ není konvergentní, ale není to ekvivalentní výrok.

Příklad omezené divergentní posloupnosti je na následujícím obrázku. Podmínka ii) také zaručuje, že posloupnost $\{a_n\}$ bude divergovat, ale není ekvivalentní s tvrzením, že je posloupnost divergentní (existují divergentní posloupnosti, které tuto podmínku nesplňují viz následující obrázek). Poslední podmínku nesplňuje žádná posloupnost. Stačí zvolit $A = a_1$ (nebo zvolit za A libovolný jiný člen posloupnosti $\{a_n\}$). Příklady divergentních posloupností, které nesplňují podmínky i) a ii) jsou znázorněny na následujícím obrázku.

Ukážeme si ekvivalenci výroku "posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní"s bodem iii). Posloupnost $\{a_n\}$ je divergentní právě tehdy, když není konvergentní, tedy když nemá vlastní limitu. Tedy

$$\begin{aligned}\forall A \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} a_n \neq A &\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} : \neg(\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} \exists \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n > n_0 : |a_n - A| \geq \varepsilon).\end{aligned}$$

Je třeba si uvědomit, že zda je zde nerovnost $|a_n - A| \geq \varepsilon$ ostrá či neostrá nehraje roli. Existuje-li $\varepsilon > 0 : |a_n - A| > \varepsilon$, pak platí i $|a_n - A| \geq \varepsilon$. Existuje-li $\varepsilon > 0$ splňující $|a_n - A| \geq \varepsilon$, pak pro $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2$ platí ostrá nerovnost (a tedy existuje i $\tilde{\varepsilon} > 0$, pro které platí ostrá nerovnost).



Definice 2.4 *Řekneme, že posloupnost reálných čísel* $\{a_n\}$ *má nevlastní limitu* $+\infty$ *(resp.* $-\infty$*), jestliže* $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ *takové, že* $\forall n > n_0 : a_n > K$(*resp.* $a_n < K$). *Píšeme* $\lim_{n\to\infty} = \infty$ (*resp.* $\lim_{n\to\infty} = -\infty$).

Příklad 2.5 $\lim_{n\to\infty} n = \infty$. *Stačí zvolit* $n_0 = \lceil K \rceil$.

Věta 2.1 *(o jednoznačnosti limity) Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz

- Nechť $a_n \to A$, $a_n \to B$ a $A \neq B$ (obě limity vlastní). BÚNO $B > A$, volme $\varepsilon = \frac{B-A}{3}$, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$ $|a_n - A| < \frac{B-A}{3}$ a $|a_n - B| < \frac{B-A}{3}$, tedy $a_n \in (A - \frac{B-A}{3}, A + \frac{B-A}{3}) \cap (B - \frac{B-A}{3}, B + \frac{B-A}{3}) = \emptyset \Rightarrow$ SPOR.

- Nechť $a_n \to A$ je vlastní a zároveň $a_n \to \infty$. Pak pro $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0 :$ $|a_n - A| < \varepsilon$ a zároveň pro každé $K \in \mathbb{R}$ $\exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > \tilde{n}_0 : a_n > K$. Zvolme $K > a + \varepsilon$, pak pro $n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$ platí $a_n < a + \varepsilon$ a zároveň $a_n > a + \varepsilon \Rightarrow$ SPOR. Obdobně pro $a_n \to A$ a $a_n \to -\infty$.

- Nechť $a_n \to \infty$ a $a_n \to -\infty$. Zvolme libovolné $K \in \mathbb{R}$, pak $a_n > K$ pro $n > n_0$ a zároveň $a_n < K$ pro $n > \tilde{n}_0 \Rightarrow$ SPOR.

$\square$

Věta 2.2 *(o limitě monotónní posloupnosti) Nechť a_n je monotónní posloupnost.*

i) Je-li posloupnost a_n omezená, pak existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

ii) Je-li posloupnost a_n neomezená neklesající, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

iii) Je-li posloupnost a_n neomezená nerostoucí, pak $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Důkaz

i) a_n omezená a neklesající, pak existuje $s = \sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Zvolme $\varepsilon > 0$, pak existuje a_{n_0} takové, že $a_{n_0} > s - \varepsilon$, tedy $\forall n > n_0$ platí $s - \varepsilon < a_n \leq s$ $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = s$. Obdobně pro nerostoucí posloupnosti.

ii) Je-li a_n neklesající a neomezená, pak $a_n \geq a_1$, tedy a_n je omezená zdola $\Rightarrow a_n$ není omezená shora. Zvolme K, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > K$, z monotónie plyne $a_n \geq a_{n_0} > K$ $\forall n > n_0$.

iii) Důkaz obdobně jako v předešlém případě.

$\square$

Věta 2.3 *Každá konvergentní posloupnost je omezená. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ (resp. $-\infty$), pak je posloupnost a_n omezená zdola (resp. shora).*

Důkaz

- Nechť a_n je konvergentní, pak existuje $A \in \mathbb{R}$ takové, že pro $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0$: $|a_n - A| < 1$, tedy $\forall n > n_0$: $a_n < A + 1$. Pro $M = \max\{a_1, a_2, ..., a_{n_0}, A + 1\} + 1$ tedy platí, že $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n < M$.

- Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak stačí zvolit K, k němu najdeme n_0 takové, že $a_n > K$ $\forall n > n_0$, a zvolme $M = \min\{a_1, ..., a_{n_0}, K\} - 1$. Pak $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > M$. Obdobně u nevlastní limity $-\infty$.

$\square$

Věta 2.4 *Uvažujme posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a nechť existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : a_n = b_n$. Pak platí:*

i) Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, *pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

ii) Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \ (-\infty)$, *pak* $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty \ (-\infty)$.

Důkaz

i) Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$. Jelikož pro každé $n > n_0$ platí $a_n = b_n$, tak $\forall n > \tilde{n}_0 = \max\{n_0, n_1\} : |b_n - A| = |a_n - A| < \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

ii) Mějme $K \in \mathbb{R}$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : a_n > K$. Tedy $\forall n > \tilde{n}_0 = \max\{n_0, n_1\} : b_n = a_n > K$, proto $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.

$\square$

Poznámka 2.1 *Předchozí větu lze interpretovat i takto. Změníme-li u posloupnosti $\{a_n\}$ konečně mnoho členů, tak její limitu nezměníme.*

Definice 2.5 *Označme $\mathbb{R}^*$ množinu $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Věta 2.5 *(o dvou policajtech) Nechť $\{a_n\}, \{b_n\}$ a $\{c_n\}$ jsou tři posloupnosti, pro něž platí*

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 :\ a_n \leq b_n \leq c_n$,
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A \in \mathbb{R}^*$,

pak

$$\lim_{n\to\infty} b_n = A.$$

Důkaz

- $A \in \mathbb{R}$. Mějme $\varepsilon > 0$, pak existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_1 : |a_n - A| < \varepsilon$ a také existuje $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_2 : |c_n - A| < \varepsilon$. Pak $\forall n > \max\{n_0, n_1, n_2\} :\ A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.
- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak $\forall n > n_0$: $b_n \geq a_n > K$, tedy $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$. Obdobně pro $\lim_{n\to\infty} c_n = -\infty$.

$\square$

Věta 2.6 *Nechť posloupnosti* $\{a_n\}$ *a* $\{b_n\}$ *mají limity (vlastní či nevlastní) a* $\forall n > n_0 \in \mathbb{N}$: $a_n \leq b_n$, *pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Důkaz

Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n > \lim_{n\to\infty} b_n$, pak existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n > q > \lim_{n\to\infty} b_n$. Tedy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0$: $(a_n > q \wedge b_n < q)$, což je spor s předpokladem $a_n \leq b_n$.

$\square$

Otázka:
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A < \lim_{n\to\infty} b_n = B$ $(A, B \in \mathbb{R}^*)$. Která z následujících tvrzení lze z tohoto předpokladu vyvodit?

i) $\exists n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$

ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n| < |b_n|$

iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n < b_n$

iv) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \leq b_n$

Odpověď: Z předpokladu lze odvodit tvrzení i), iii) a iv). Stačí ukázat, že platí tvrzení iii), jelikož to přímo implikuje platnost tvrzení i) a iv). Důkaz platnosti tvrzení iii) je téměř stejný, jako důkaz předcházející věty, ale rozepíšeme ho trochu podrobněji. Jelikož $\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$, tak existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} a_n < q < \lim_{n\to\infty} b_n$. To lze ukázat například rozborem možností. Pro $A, B \in \mathbb{R}$ můžeme volit $q = \frac{B-A}{2}$, pro $A = -\infty$ a $B \in \mathbb{R}$ lze použít třeba volbu $q = B - 1$. Rozbor dalších variant necháme na čtenáři. Existenci $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že $\forall n > n_1 : a_n < q$ dostaneme vhodnou volnou ε pro $A \in \mathbb{R}$ (např. $\varepsilon = q - A$) či volnou K pro $A = -\infty$ (např. $K = q$). Obdobně existuje $n_2 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_2 : q < b_n$. Pak pro všechna $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$: $a_n < q < b_n$, čímž je důkaz hotov. Neplatnost druhého tvrzení lze ukázat na protipříkladu, např. u konstantních posloupností $\{a_n = -2\}$ a $\{b_n = 1\}$.

Otázka:
Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A \leq \lim_{n\to\infty} b_n = B$ $(A, B \in \mathbb{R}^*)$. Která z následujících tvrzení lze z tohoto předpokladu vyvodit?

i) $\exists n \in \mathbb{N} : a_n < b_n$

ii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n| < |b_n|$

iii) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n < b_n$

iv) $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : a_n \le b_n$

Odpověď: Příklad posloupností, kde $\forall n \in \mathbb{N}:\ a_n = \frac{1}{n} \wedge b_n = -\frac{1}{n}$ ukazuje, že z předpokladu $\lim_{n\to\infty} a_n = A \le \lim_{n\to\infty} b_n = B$ nelze vyvodit ani jedno z tvrzení i)-iv).

Věta 2.7 *(o limitě součtu) Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B.$$

Důkaz

Mějme $\varepsilon > 0$, pak $\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$ a $\exists \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > \tilde{n}_0 : |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pro $n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}$ platí $|a_n + b_n - (A+B)| \le |a_n - A| + |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

□

Věta 2.8 *(o limitě součinu) Nechť $A, B \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, pak*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = A \cdot B.$$

Důkaz

$$\begin{aligned} |a_n b_n - AB| &= |(a_n - A)(b_n - B) + Ab_n + a_n B - 2AB| \\ &= |(a_n - A)(b_n - B) + A(b_n - B) + (a_n - A)B| \\ &\le |(a_n - A)(b_n - B)| + |A(b_n - B)| + |(a_n - A)B| \end{aligned}$$

Pro $\varepsilon > 0$ stačí najít n_0^1, n_0^2 a n_0^3 takové, že:

- $\forall n > n_0^1 : |(a_n - A)(b_n - B)| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- $\forall n > n_0^2 : |A(b_n - B)| < \frac{\varepsilon}{3}$,
- $\forall n > n_0^3 : |B(a_n - A)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Pak $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2, n_0^3\}$.

□

Lemma 2.9 *Nechť $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $B \ne 0$ a $b_n \ne 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Pak $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{B}$.*

Důkaz

BÚNO $B > 0$, pak existuje n_0 takové, že $\forall n > n_0 : b_n > \frac{B}{2}$.

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{B \cdot b_n}\right| \leq \frac{2|B - b_n|}{B^2} \quad \forall n > n_0.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ a nechť pro $\forall n > \tilde{n}_0 \in \mathbb{N}$ platí $|B - b_n| < \frac{\varepsilon B^2}{2}$, pak

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon \quad \forall n > \max\{n_0, \tilde{n}_0\}.$$

□

Věta 2.10 *(o limitě podílu) Nechť* $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$, $B \neq 0$ *a* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Důkaz

Viz lemma 2.9 a věta 2.8

□

Otázka:

Nechť $A \in \mathbb{R}$. Který z následujících výroků je ekvivalentní výroku $\lim_{n\to\infty} a_n = A$?

i) $\lim_{n\to\infty}(a_n - A) = 0$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |a_n - A| = 0$.

Odpověď: Oba výroky jsou ekvivalentní s výrokem $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Stačí pracovat s tím, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$ a pak si uvědomit, že $(|a_n - A| < \varepsilon) \Leftrightarrow (|(a_n - A) - 0| < \varepsilon) \Leftrightarrow ||a_n - A| - 0| < \varepsilon$.

Otázka:

Uvažujme posloupnost $\{a_n\}$ a nechť $A \in \mathbb{R}$. Jsou následující výroky ekvivalentní?

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

ii) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$.

Odpověď: Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Pak $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : ||a_n| - |A|| < \varepsilon$, tedy $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$. Zde vycházíme s nerovnosti $||a| - |b|| \leq |a - b|$. Mějme $\{a_n = (-1)^n\}$, pak $\lim_{n\to\infty} a_n$ neexistuje, ale $\lim_{m\to\infty} |a_n| = 1$. Na tomto protipříkladu vidíme, že výrok $\lim_{n\to\infty} |a_n| = |A|$ neimplikuje výrok $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, tedy výroky nejsou ekvivalentní.

Lemma 2.11 *Je-li posloupnost a_n omezená zdola (resp. shora) a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (resp. $-\infty$), pak*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty \ (resp. \ -\infty).$$

Důkaz

Existuje $L \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N} : a_n > L$ a $\forall K \ \exists n_0 \forall n > n_0 : b_n > K$.
Mějme $M \in \mathbb{R}$, pak pro volbu $K = M - L$ dostáváme $\forall n > n_0 : \ a_n + b_n > L + K = L + (M - L) = M$, tedy $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty$.

□

Lemma 2.12 *Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\{b_n\}$ je omezená posloupnost, pak*

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0.$$

Důkaz

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$ a $\exists K \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} : |b_n| < K$.
Mějme $\varepsilon > 0$, pak $|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n|K \leq \varepsilon K$. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

□

Lemma 2.13 *Uvažujme posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$.*

i) Existuje-li $\alpha > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : \ a_n \geq \alpha$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (resp. $-\infty$), pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty \ (resp. \ -\infty).$$

ii) Existuje-li $\alpha < 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n > n_0 : a_n \leq \alpha$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ (resp. $-\infty$), pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = -\infty \ (resp. \ +\infty).$$

iii) Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$(resp. $-\infty$), pak

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \pm\infty \ (resp. \ \mp\infty).$$

Důkaz

i) $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, tedy $\forall K \in \mathbb{R} \ \exists n_1 \ \forall n > n_1 : b_n > K$.

Mějme $M > 0$ a volme $K = \frac{M}{\alpha}$. Pak $\forall n > \max\{n_0, n_1\} : a_n b_n > \alpha K = M$. Tedy $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$.

ii) Viz i)

iii) Plyne z i) a ii).

□

Lemma 2.14 *Nechť je $\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$ a $\forall n \in \mathbb{N} : b_n \neq 0$. Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0.$$

Důkaz

$\lim_{n\to\infty} |b_n| = \infty$, tedy $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |b_n| > K$.

Mějme $\varepsilon > 0$, pak pro volbu $K = \frac{1}{\varepsilon}$ dostáváme: $\forall n > n_0 : \left|\frac{1}{b_n} - 0\right| = \frac{1}{|b_n|} < \frac{1}{K} = \varepsilon$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = 0$.

□

Lemma 2.15 *Nechť* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*,* $b_n > 0$ *(resp.* $b_n < 0$*)* $\forall n > n_0$*, pak*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = +\infty \ (\textit{resp. } -\infty).$$

Důkaz

$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, tedy $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_1 : |b_n| < \varepsilon$. Přidáme-li předpoklad $\forall n > n_0 : b_n > 0$, dostaneme $\forall n > \max\{n_0, n_1\} : 0 < b_n < \varepsilon$.

Mějme $K > 0$, pak pro volbu $\varepsilon = \frac{1}{K}$ dostaneme, že $\forall n > \max\{n_0, n_1\} : \frac{1}{b_n} > \frac{1}{\varepsilon} = K$. Tedy $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \infty$.

□

Definice 2.6 *Pro každé* $a \in \mathbb{R}$ *definujme*

$$\begin{aligned}
-\infty < a < \infty& \\
a \pm \infty = \pm\infty& \\
a(\pm\infty) = \pm\infty& \quad \textit{pro } a > 0 \\
a(\pm\infty) = \mp\infty& \quad \textit{pro } a < 0 \\
\frac{a}{\pm\infty} = 0& \\
\frac{\pm\infty}{b} = \pm\infty& \quad \textit{pro } b > 0 \\
\frac{\pm\infty}{b} = \mp\infty& \quad \textit{pro } b < 0 \\
|\pm\infty| = \infty& \\
+\infty + \infty = \infty& \\
-\infty - \infty = -\infty& \\
+\infty \cdot (\pm\infty) = \pm\infty& \\
-\infty \cdot (\pm\infty) = \mp\infty&
\end{aligned}$$

Nedefinujeme výrazy: $0 \cdot (\pm\infty), +\infty - \infty, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \frac{a}{0}$ pro $a \in \mathbb{R}^*$, 0^0, ∞^0 a 1^∞.

Věta 2.16 *(aritmetice limit) Nechť* a_n, b_n *jsou posloupnosti, potom platí:*

i)

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n,$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n,$$

iii)
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n},$$
pokud jsou pravé strany definovány.

iii') Je-li $b_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \lim_{n\to\infty} a_n > 0$ $($*resp.* $< 0)$, *pak*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty \ (\textit{resp. } -\infty).$$

iii") Je-li $b_n < 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0, \lim_{n\to\infty} a_n > 0$ $($*resp.* $< 0)$, *pak*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = -\infty \ (\textit{resp. } +\infty).$$

Důkaz

i) Viz. věta 2.7 (vlastní limity), věta 2.3 a lemma 2.11 (nevlastní limity).

ii) Viz. věta 2.8 (vlastní limity), lemma 2.13 (nevlastní limity).

iii), iii') a iii") Viz. věta 2.10 (vlastní limity), ii) + lemma 2.14 a lemma 2.15 (nevlastní limity).

□