Obsah

Kapitola 1

Základy pravděpodobnosti

*„Teorie pravděpodobnosti je
v podstatě zdravý rozum,
přeměněný na kalkulus.“*
—Pierre Simon de Laplace

1.1 Úvod

Náhoda a náhodné jevy provázejí lidstvo od nepaměti. Hazardní hry byly oblíbené již v Egyptě, starověkém Řecku či Římě. Dle řecké mytologie bohové Zeus, Poseidón a Hádés losovali o rozdělení částí, kterým budou vládnout (Zeus získal nadvládu nad zemí, Poseidón nad mořem a Hádés nad podsvětím) [22]. Římský vojevůdce Gaius Julius Caesar zase pronesl 10. ledna 49 př. n. l., když překračoval řeku Rubikon se svými legiemi, slavné ,,Alea iacta est" (kostky jsou vrženy). S hracími kostkami je také spojeno i slovo hazard, které vychází z arabského slova az-zahr, což je právě výraz pro hrací kostky [34].

Přestože jsou hazardní hry známé už od pradávna, pravděpodobnost se začala rozvíjet až v 17. století. Za počátek teorie pravděpodobnosti bývá často považována korespondence mezi Blaisem Pascalem (1623-1662) a Pierrem de Fermatem (1607-1665) v roce 1654 [32]. Už v 16. století sice napsal Gerolamo Cardano (1501-1576) své pojednání o hrách náhody [8], to však bylo prvně publikováno až přibližně o sto let později v roce 1663 v rámci prvního svazku jeho sebraných spisů (Hald [13] uvádí rok 1663 za pravděpodobný rok vzniku, Mačák [19] píše již o roku 1526).

Proč se do té doby o pravděpodobnost nezajímali ani Řekové, kteří jinak přispěli téměř ke všem budoucím vědeckým disciplínám, se můžeme dočíst v [13]. Aristotelés dělil události do tří skupin. Na události, které se musí stát, události které se pravděpodobně stanou a na události nepředpověditelné a náhodné, které se nedají předem odhadnout, a proto jsou nedostupné vědeckému zkoumání. Takový pohled studium pravděpodobnosti skutečně vylučoval. V pozdější křesťanské Evropě, kdy byla většina znalosti pod dohledem církve, byla náhoda považována buď za projev Boží vůle (a tedy nebylo co zkoumat), nebo za synonymum pro neznalost všech příčin daného jevu (tedy byla existence náhody odmítána). Jako příklad tohoto pohledu si uveďme následující citáty z Etiky od Barucha Spinozy (1632-1677) [30] (zde převzato z [19]), které pocházejí z dob počátků teorie pravděpodobnosti:

- *"V přírodě neexistuje nic náhodného, nýbrž všechny věci jsou přirozeností Boha nutně determinovány k určitému modu existence a působení."*

- *"... jako náhodnou však označujeme věc jen z důvodů tkvících v nedostatečnosti našeho poznání. Ta věc, o níž nevíme, zda její esence nezahrnuje protiklad, nebo o níž bezpečně víme, že žádný protiklad nezahrnuje, a přesto o její existenci nemůžeme nic s jistotou tvrdit, protože řád příčin je nám skryt, taková věc se nám nemůže jevit ani jako nutná, ani jako nemožná, a proto ji nazýváme náhodnou nebo možnou."*

Ačkoliv pravděpodobnost nebyla systematicky zkoumána až do 17. století, první úlohy zahrnující pravděpodobnost lze najít dříve. Uvedeme si jednu velmi starou úlohu, která byla zformulována v italském rukopise již v roce 1380 a kterou nejspíše přivezli do Itálie Arabové [2]. Tato úloha se někdy nazývá problém bodů a byla mimo jiné řešena i v již zmíněné korespondenci mezi B. Pascalem a P. Fermatem.

Příklad 1.1 *Dva hráči A a B spolu hrají sérii partií, které nemohou skončit remízou. Předpokládáme, že jednotlivé hry jsou spravedlivé, tj. každý hráč má stejnou šanci, že vyhraje. Dále předpokládejme, že jednotlivé hry jsou na sobě nezávislé, tj. v další hře nehraje žádnou roli to, jak dopadla hra předchozí. Hráči hrají o určitou částku, kterou získá ten, který první vyhraje* 6 *partií. Hráči museli hru přerušit za stavu* $5:3$ *pro hráče A. Jak si mají hráči rozdělit výhru?*

Řešení:
Uvedeme řešení, které je založené na metodě popsané v již zmíněné korespondenci mezi Pascalem a Fermatem. Předpokládejme, že bychom hráli ještě tři partie (i když ve většině případů by byl vítěz znám již dříve). Vítězství hráče A označíme písmenem a a vítězství hráče B písmenem b. Pak máme následujících osm možností, jak může hra pokračovat, a to:

$$aaa,\quad aab,\quad aba,\quad baa,\quad abb,\quad bab,\quad bba \quad \text{a} \quad bbb.$$

Jelikož jsou tyto varianty stejně pravděpodobné a jen poslední varianta vede k vítězství hráče B, je tedy spravedlivý poměr rozdělení výhry $7:1$.

O tom, že lze v pravděpodobnostních úlohách snadno udělat chybu, svědčí i to, že předešlou úlohu chybně vyřešil jak Fra Luca Paccioli (1445-1514), tak Niccolo Tartaglia (1499-1557). Pravděpodobnost si ale pohrála i s dalšími slavnými matematiky. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) i Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) chybně vyřešili následující úlohu [2].

Příklad 1.2 *S jakou pravděpodobností padne při dvou hodech mincí alespoň jednou líc?*

Přitom podobnou úlohu nelze považovat za extrémně obtížnou, můžeme ji nalézt hned jako první úlohu v kapitole 2 (pravděpodobnost) v učebnici [7]. Je zkrátka třeba k podobným úlohám přistupovat s vědomím, že v nich může udělat chybu skutečně každý a není vždy lehké svou chybu v úvaze či postupu odhalit.

Poznámka 1.1 *V předchozím příkladě intuitivně předpokládáme, že pravděpodobnost padnutí líce je stejná jako pravděpodobnost, že padne rub. Je však tento předpoklad v pořádku? Nedávný výzkum ukázal [3], že pravděpodobnost strany, která na minci padne, je ovlivněna tím, jak je mince před hodem natočena. Přesněji pravděpodobnost, že padne ta strana, které byla před hodem mince nahoře, je příbližně* 0.508*, zatímco opačná strana padne pouze s pravděpodobností* 0.492*. Zde ale nebudeme tímto faktem úlohy o hodu mincí komplikovat a budeme předpokládat, že líc i rub padají se stejnou pravděpodobností. V reálu by tohoto výsledku šlo docílit tím, že bychom před každým hodem vždy s poloviční pravděpodobností vybírali jako horní stranu líc a s poloviční pravděpodobností rub.*

1.2 Zavedení pravděpodobnosti

1.2.1 Klasická definice pravděpodobnosti

Vraťme se nejdříve k příkladu 1.2 a ukažme si správné řešení. Možný výsledek rozdělíme na čtyři stejně pravděpodobné situace, a to na dvojice padlých stran líc-líc, líc-rub, rub-líc a rub-rub. Z těchto možností tři popisují situaci, kdy padne alespoň jednou líc, tedy hledaná pravděpodobnost je $\frac{3}{4}$. Intuitivně jsme v tomto řešení využili ideu klasické pravděpodobnosti, kterou si následně zadefinujeme. Nejprve si ale zavedeme následující pojmy, které nás budou provázet celou teorií pravděpodobnosti.

Uvažujme nějaký náhodný pokus (třeba hod dvěma mincemi), pak množinu všech možných výsledků tohoto pokusu označíme Ω a nazýváme ji **prostor elementárních jevů** . Jednotlivé výsledky tohoto pokusu (které již nelze rozložit na menší podvýsledky) nazveme **elementární jevy** a značíme je ω (různé elementární jevy budeme rozlišovat pomocí indexů). Libovolnou podmnožinu $A \subset \Omega$ pak nazýváme **náhodný jev** .

V předchozím příkladu bychom tedy měli $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, kde $\omega_1 = \{$líc-líc$\}$, $\omega_2 = \{$líc-rub$\}$, $\omega_3 = \{$rub-líc$\}$, $\omega_4 = \{$rub-rub$\}$ a náhodný jev A je například jev, že padne alespoň jeden líc, tedy $A = \{$líc-líc, líc-rub, rub-líc$\}$.

Dále pak zavedeme:

1) **sjednocení jevů** A**,** B ... jev, který nastane právě tehdy, nastane-li aspoň jeden z jevů A, B; značení: $A \cup B$;

2) **průnik jevů** A**,** B ... jev, který nastane právě tehdy, nastanou-li oba dva jevy současně; značení: $A \cap B$;

3) **rozdíl jevu** B **a** A ... jev, který nastane právě tehdy, když nastane jev B a zároveň nenastane jev A; značení: $B \setminus A$;

4) A **je podjev jevu** B ...jev B nastane, kdykoliv nastane jev A; značení: $A \subset B$;

5) **doplněk jevu** A ... jev, který nastane právě tehdy, když nenastane jev A; značení: $A^c = \Omega \setminus A$;

6) A, B jsou **disjunktní jevy** ... jevy A a B nemohou nastat současně; značení: $A \cap B = \emptyset$;

7) **jev nemožný** ... jev, který nenastává nikdy; značení: $\emptyset$;

8) **jistý jev** ... jev, který nastane vždy - lze ho ztotožnit s prostorem Ω; značení: Ω.

Uveďme nyní klasickou definici pravděpodobnosti, která se též někdy nazývá Laplaceova definice podle Pierra Simona de Laplace (1749-1827). Ten v roce 1820 publikoval knihu Théorie analytique des probabilités [17], ve které je shrnuto veškeré soudobé poznání z teorie pravděpodobnosti a kde je mimo jiné i uvedena tato definice. Nutno dodat, že toto rozsáhlé dílo však předběhlo svou dobu a bylo pro tehdejší čtenáře těžko stravitelné.

Definice 1.1 *Prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazveme* ***klasickým pravděpodobnostním prostorem****, jestliže* *i) množina $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$ je konečná a všechny elementární jevy jsou stejně možné (stejně pravděpodobné, tj. označíme-li $p_i = P(\omega_i)$, $i = 1, ..., n$, pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů, pak $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = \frac{1}{n}$),*

ii) $\mathcal{F}$ je množina všech podmnožin Ω,

iii) pravděpodobnost P náhodného jevu A je rovna

$$P(A) = \frac{n_A}{n},$$

kde n_A je počet elementárních jevů příznivých jevu A.

Poznámka 1.2 *Poznamenejme, že v předchozí definici používáme nematematický pojem ,,všechny elementární jevy jsou stejně možné", který se ale v předpokladech u zavedení klasické pravděpodobnosti většinou v nějaké verzi vyskytuje. Pokud použijeme místo toho formulaci ,,... stejně pravděpodobné", pak zase používáme pojem, který ještě nemáme definován. Bod iii) v sobě ale obsahuje informaci, že všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost, tedy lze tento předpoklad vynechat. Druhá možnost by byla nejdříve zavést axiomatickou definici pravděpodobnosti, a pak použít již zadefinovaný pojem ,,všechny elementární jevy mají stejnou pravděpodobnost".*

Příklad 1.3 *Uvažujme dva hody vyváženou kostkou. Jaká je pravděpodobnost jevu A, že padne součet 6?*

Řešení

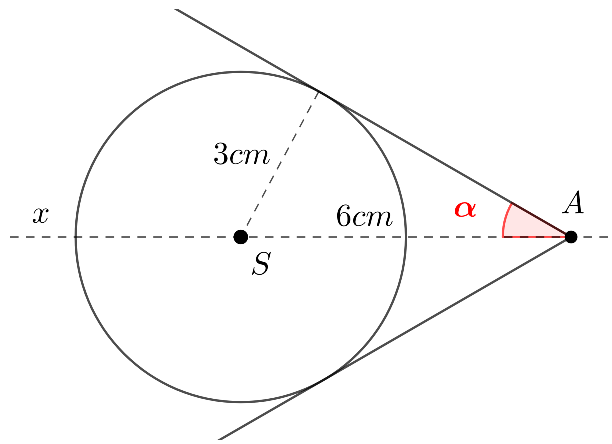
Označíme-li (i, j) elementární jev, že na první kostce padlo číslo i a na druhé kostce padlo číslo j, pak $\Omega = \{(i, j)\}_{i,j=1}^{n}$ a všechny elementární jevy (i, j), $i, j = 1, ..., 6$, jsou stejně pravděpodobné, tedy $P(i, j) = \frac{1}{36}$, $i, j = 1, ..., 6$. Jev $A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$, tedy $|A| = 5$ a hledaná pravděpodobnost je $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}$.

Poznamenejme, že někdy se při řešení podobných úloh uvažují pouze možnosti padlých dvojic čísel na kostkách bez rozlišování pořadí. Pak obsahuje množina Ω pouze 21 elementárních jevů, neboť se například jevy $(1, 6)$ a $(6, 1)$ spojí do jednoho elementárního jevu ,,padla jednička a šestka". Při takto zavedené množině elementárních jevů ale neplatí, že všechny elementární jevy jsou stejně pravděpodobné, a tedy nelze aplikovat ideu klasické pravděpodobnosti. Právě této chyby se dopustil při řešení úlohy o mincích (příklad 1.2) d'Alembert, když uvažoval pouze elementární jevy $\{2\times$ líc$\}$, $\{1\times$ líc $+ 1\times$ rub$\}$ a $\{2\times$ rub$\}$ a neuvědomil si, že tyto elementární jevy nejsou stejně pravděpodobné. Tato chyba ho vedla k nesprávnému výsledku, že hledaná pravděpodobnost, že při dvou hodech mincí padne alespoň jednou líc, je $\frac{2}{3}$.

1.2.2 Geometrická pravděpodobnost

V učebnici [21] je následující úloha (kap. 20, př. 42, b)):

Příklad 1.4 *S jakou pravděpodobností polopřímka vedená z bodu A má s kružnicí $k(S; 3\ cm)$ alespoň jeden společný bod, je-li $|AS| = 6\ cm$?*



Obrázek 1.1: Grafické znázornění příkladu 1.4.

Řešení

Při řešení této úlohy si s klasickou pravděpodobností nevystačíme, jelikož máme nekonečně (dokonce nespočetně) mnoho možností, jak vést z bodu A polopřímku, a tedy nekonečně (nespočetně) mnoho elementárních jevů. Zkusme tedy tuto úlohu řešit intuitivně. Nejdříve si celou situaci znázorníme graficky (Obrázek 1.1). Na obrázku jsou znázorněny hraniční případy, tedy situace, kdy má polopřímka s kružnicí $k(S; 3\ cm)$ právě jeden společný bod. Snadno z obrázku dopočítáme, že vyznačený hraniční úhel α je roven $\frac{\pi}{6}$. Jelikož úhel α mezi libovolnou polopřímkou vedenou z bodu A a polopřímkou AS může být libovolný z intervalu $[0, \pi]$ a pro $\alpha \in [0, \frac{\pi}{6}]$ nastane situace, kdy má zmíněná polopřímka s kružnicí $k(S; 3\ cm)$ alespoň jeden společný bod, je hledaná pravděpodobnost rovna $\frac{\frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{1}{6}$.

V této úloze je množina elementárních jevů množina všech možných polopřímek vedených z bodu A, tedy jde - jak již bylo zmíněno v řešení - o nespočetnou množinu. Jelikož je každá polopřímka z bodu A jednoznačně určena úhlem α, pak lze za množinu elementárních jevů považovat množinu všech úhlů, tedy například interval $\Omega = [0, 2\pi)$. Při této volbě dostaneme $A = [0, \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{11\pi}{6})$. V úloze tiše předpokládáme, že všechny elementární jevy jsou stejně možné (stejně preferované). Přirozená volba, jak určit pravděpodobnost jevu A, je určit podíl $\frac{|A|}{|\Omega|}$, kde $|A|$ a $|\Omega|$ jsou délky příslušných intervalů. Dostaneme tedy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6}$. Tato úvaha nás může přivést k následující definici.

Definice 1.2 *Nechť platí:*

- $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *(obvykle $d = 1, 2, 3$) a* $\mu^d(\Omega) < \infty$[1]*, tedy všechny elementární jevy lze vyjádřit jako body nějaké podmnožiny $\mathbb{R}^d$ s konečnou mírou.*
- $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$ *je Borelovská σ-algebra* [2] *na Ω.*
- $P(A) = \frac{\mu^d(A)}{\mu^d(\Omega)},\ \forall A \in \mathcal{F}$.

Pak trojici $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazveme ***geometrickým pravděpodobnostním prostorem*** *a P* ***geometrickou pravděpodobností****.*

Poznámka 1.3 *Dále budeme $\mu^d(A)$ a $\mu^d(\Omega)$ nahrazovat pouze značením $|A|$, resp. $|\Omega|$, a budeme o $|A|$ a $|\Omega|$ hovořit jako o délce, ploše či objemu A, resp. $|\Omega|$, dle toho, v jaké dimenzi se budeme pohybovat.*

Příklad 1.5 *Přátelé Igor a Dano si domluví schůzku mezi 10:00 a 11:00. Jejich příchody na dané místo jsou náhodné* [3] *v rámci smluveného časového intervalu. Každý bude čekat 10 minut, a pak odejde. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají?*

Řešení

Každou možnou dvojici časů příchodů lze popsat pomocí bodu $[x, y] \in [10, 11]^2$ (první souřadnice popisuje čas příchodu Igora a druhá čas příchodu Dana). Dano s Igorem se potkají, je-li $|x - y| \leq \frac{1}{6}$ (viz obrázek 1.2, oblast vyznačená červeně). Tedy $|\Omega| = 1^2 = 1$ ... plocha čtverce $[10, 11]^2$, $|A| = \frac{2}{6} \cdot 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{11}{36}$ a hledaná pravděpodobnost je tedy

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{11}{36}.$$

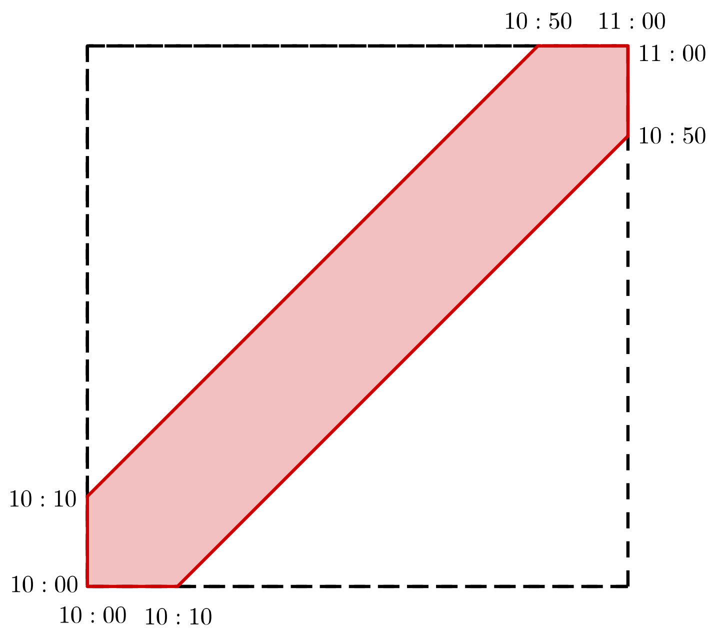
Popišme si nyní jednu známou metodu, tzv. metodu Monte Carlo, která mj. s geometrickou pravděpodobností úzce souvisí. Uvažujme následující pokus, který se dá provést i na středních školách. Mějme na větším listu papíru čtvercovou síť a v každém čtverci této sítě mějme vepsaný kruh. Házejme na tuto síť malá zrnka (například zrna čočky), označme n počet hozených zrnek a n_A počet zrnek, které padnou do vnitřku některého z kruhů (Obrázek 1.3).

---

[1] μ^d značí d-rozměrnou Lebesgueovu míru.

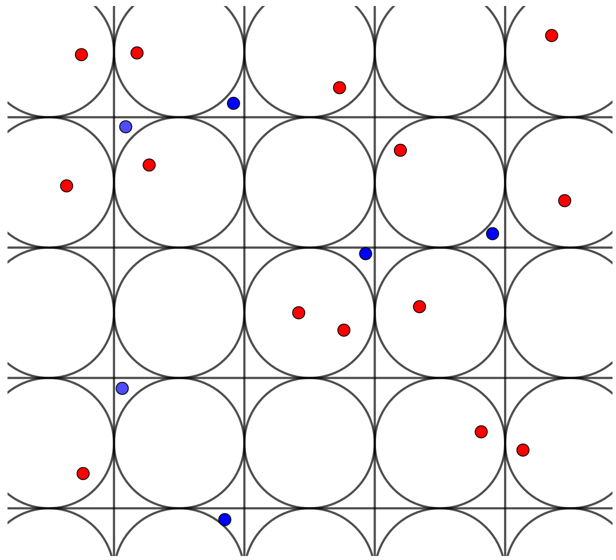
[2] Pojem σ-algebra zadefinujeme později s axiomatickým zavedením pravděpodobnosti, zde jen poznamenejme, že Borelovská σ-algebra je nejmenší σ-algebra obsahující všechny otevřené podmnožiny Ω, a tedy i všechny uzavřené podmnožiny a kombinace obou těchto typů.

[3] Slovem „náhodné" se v tomto smyslu míní rovnoměrně rozdělené, tedy že žádný z možných časů příchodů není preferován.



Obrázek 1.2: Čtverec vyznačuje množinu všech elementárních jevů (dvojic časů příchodů), které mohou nastat, červeně vyznačená oblast označuje množinu takových dvojic časů příchodů Dana s Igorem, že se oba na smluveném místě potkají.

Pravděpodobnost, že náhodně hozené zrnko padne do vnitřku některého z kruhů, je $\frac{\pi}{4}$. Provedeme-li dostatečný počet hodů, pak lze očekávat, že se **relativní četnost** $\frac{n_A}{n}$ bude blížit této pravděpodobnosti, tedy $\frac{n_A}{n} \doteq \frac{\pi}{4}$. Z toho dostaneme aproximaci $\pi \doteq \frac{4 \cdot n_A}{n}$. Této metodě, kdy na základě provedení velkého počtu náhodných pokusů či simulací získáme hledaný odhad, se říká metoda **Monte Carlo** . Za otce této metody je považován Stanislaw Marcin Ulma (1909-1984), který na tuto metodu přišel při hraní hry Solitaire („The idea for what was later called the Monte Carlo method occurred to me when I was playing Solitaire during my illness") v období, kdy pracoval na vývoji vodíkové bomby v rámci projektu Manhattan [28]. První náznak použití této metody ale pochází z roku 1777, kdy Georges Louis Leclerc de Buffon (1707-1788) publikoval řešení své úlohy o jehle (Zadání této úlohy je v části



Obrázek 1.3: Aplikace Monte Carlo metody pro odhad čísla π. Červené body označují hody, v nichž házené předměty padly do některého z kruhů, modré body označují hody, v nichž házené předměty padly vně kruhů. V tomto obrázku je $n = 20$, $n_A = 14$, tedy odhad čísla π by byl $\frac{4 \cdot 14}{20} = 2.8$.

1.2.4, úloha 9.). Ač bylo řešení této úlohy publikováno až v roce 1777 v [6], byla tato úloha formulována již v roce 1733 v [5].

1.2.3 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Uvažujme následující úlohu.

Příklad 1.6 *Rodina má dvě děti. Jaká je pravděpodobnost, že má alespoň jednoho syna?*

Řešení

Pokud budeme vycházet z předpokladu, že pravděpodobnosti narození syna a dcery jsou si rovny, pak je tato úloha stejná jako příklad 1.2 (když ztotožníme jevy "padne líc"a "narodí se syn"). Tedy si vystačíme s klasicou pravděpodobností a hledaná pravděpodobnost bude $\frac{3}{4}$. Pravděpodobnost narození syna a dcery však není stejná a dokonce se liší podle země původu. V České republice se uvádí většinou že na 100 narozených dívek připadne $105 - 106$ narozených chlapců. Nejnižší počet narozených chlapců se uvádí u Zambie (100.39), Namibie (100.46) a Mozambiku (101.22), nejvyžší u

Azerbajdžánu (111.63), Číny (110.63) a Wietnamu (110.48). Poznamejeme, že tato data jsou z roku 2023 a pocházejí ze stránky https://ourworldindata.org/grapher/sex-ratio-at-birth?time=2023, kde je vidět, jak se tato data během jednotlivých let celkem výrazně mění. Například Čína dosáhla největšího poměru v roce 2006 (117.48), ale před zavedením politiky jednoho dítěte v roce 1979 se počet narozených chlapců na sto dívek pohyboval v rozemzí (104.85-106.31). U České republiky ja k tomuto roku uveden údaj 105.12 narozených chlapců na sto dívek. Pokud budeme uvažovat pravděpodobnost narození chlapce $p = \frac{105}{205}$, pak je hledaná pravděpodobnost $2p(1-p) + p^2 = p(2-p) = \frac{105}{205} \cdot \frac{410-105}{205} = 0.76205$.

Klasickou i geometrickou pravděpodobnost lze použít pouze v případě, že nepreferujeme žádný z elementárních jevů. Jak vidíme na předchozím příkladu, to bohužel nepostihuje všechny typy úloh, které v pravděpodobnosti potřebujeme řešit. Proto je nutné formulovat definici, která pokud možno všechny myslitelné situace zastřešuje. S takovou definicí, která vychází z teorie míry, přišel v roce 1933 Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903-1987). Ten je proto považován za zakladatele moderní pravděpodobnosti [32].

Definice 1.3 *Nechť Ω je libovolná neprázdná množina. Pak libovolný neprázdný systém podmnožin $\mathcal{F}$, pro který platí:*

i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

ii) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$, *(uzavřenost na doplňky)*

iii) $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$, *(uzavřenost na spočetné sjednocení)*

nazveme ***σ-algebrou*** *a dvojici $(\Omega, \mathcal{F})$ nazýváme* ***měřitelný prostor****.*

Poznámka 1.4 *Bod i) je v předchozí definici nadbytečný, jelikož přímo plyne z bodů ii) a iii). Přesto se často tento bod v definici σ-algebry uvádí, viz [18], [33]. Z předchozí definice plyne, že σ-algebra obsahuje i prázdnou množinu či že je uzavřena na spočetné průniky ($A_1, A_2, ... \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$) [18].*

Poznámka 1.5 *Požadované vlastnosti z definice 1.3 jsou celkem přirozené. Při práci s náhodnými jevy se nám často hodí, aby v systému (v σ-algebře), se kterým pracujeme, byl jak jistý, tak nemožný jev, a aby byl tento systém uzavřen na doplňky, sjednocení a průniky jevů.*

Příklad 1.7 *Uvažujme hod kostkou a označme $\{i\}$, $i = 1, ..., 6$, jev, že padla na kostce hodnota i. Pak $\Omega = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\}$ a $\mathcal{F}$ bude obsahovat prázdnou* *množinu, všechny elementární jevy $\{i\}$, všechny dvojice elementárních jevů $\{\{i\},\{j\}\}$, $i \neq j$, všechny trojice, čtveřice i pětice těchto elementárních jevů i celé Ω. Tedy $\mathcal{F}$ bude obsahovat $\sum_{i=0}^{6}\binom{6}{i}$ množin.*

Pokud bychom se zajímali pouze o to, zda padne na kostce sudé, či liché číslo, pak by nejmenší σ-algebra, se kterou můžeme pracovat, vypadala takto

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{\{1\},\{3\},\{5\}\}, \{\{2\},\{4\},\{6\}\}, \Omega\}.$$

Máme-li zadefinovaný pojem měřitelný prostor, můžeme přejít k axiomatické definici pravděpodobnosti.

Definice 1.4 (Kolmogorova axiomatická definice pravděpodobnosti) *Uvažujme měřitelný prostor $(\Omega, \mathcal{F})$ a nechť P je množinová funkce definovaná na $\mathcal{F}$ s vlastnostmi:*

i) $P(\Omega) = 1$,

ii) $\forall A \in \mathcal{F}$ *platí* $P(A) \geq 0$, *(P je nezáporná)*

iii) nechť $A_i \in \mathcal{F}$ *a* $\forall i, j : i \neq j$ *platí* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *pak* $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ *(σ-aditivita).*

*Pak funkci P nazýváme **pravděpodobností (pravděpodobnostní mírou)** a trojici $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazýváme **pravděpodobnostním prostorem**.*

Z předchozí definice lze dokázat následující tvrzení o vlastnostech pravděpodobnosti.

Tvrzení 1.1 *Uvažujme libovolný pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pak má pravděpodobnost P následující vlastnosti:*

i) $0 \leq P(A) \leq 1, \quad \forall A \in \mathcal{F}$,

ii) P je monotónní: $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,

iii) $P(A^c) = 1 - P(A), \quad \forall A \in \mathcal{F}$,

iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \quad \forall A, B \in \mathcal{F}$,

v) $A, B \in \mathcal{F}, A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

1.2.4 Cvičení

1. Házíme čtyřmi šestistěnnými hracími kostkami. Určete, jaká je pravděpodobnost, že
   a) padnou čtyři různá čísla,
   b) padnou pouze lichá čísla,
   c) součet čísel na všech kostkách dohromady bude roven 6,
   d) součet čísel bude větší než 5,
   e) padne alespoň jedna šestka.
2. V regálu je 6 lahví normálního rumu a 4 lahve pančovaného rumu (vizuálně k nerozeznání). Náhodně vybereme z regálu 3 lahve a z každé ochutnáme. Určete, s jakou pravděpodobností
   a) byl právě ve dvou námi ochutnaných lahvích methanol,
   b) byl alespoň v jedné námi ochutnané lahvi methanol.
3. Na svazku máme 8 různých klíčů a pokoušíme se odemknout zámek. Vyzkoušený klíč vždy dáme stranou a náhodně vybereme další klíč ze zbývajících. Jaká je pravděpodobnost, že odemkneme až na pátý pokus?
4. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek (s již nadepsanou adresou). Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.
   a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?
   b) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$.
5. (Maxwell-Boltzmannovo schéma) Do vlaku s n vagóny nastupuje r cestujících. Předpokládejme, že každý člověk si vybírá vagón zcela náhodně.
   a) Určete, s jakou pravděpodobností bude v prvním vagóně právě $k \leq r$ cestujících.
   b) Jaká je pravděpodobnost, že žádný vagón nebude prázdný?
   c) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty, r \to \infty$ tak, že $\frac{r}{n} \to \lambda > 0$.
6. (Bose-Einsteinovo schéma) Babička rozděluje r tisícikorun do n obálek pro svých n vnoučat k Vánocům. Peníze rozmístí náhodně (všechna rozmístění jsou stejně pravděpodobná).

a) Určete pravděpodobnost, že vnuk Karel dostane právě k tisícikorun.

b) Jaká je pravděpodobnost, že každé z vnoučat dostane alespoň nějaké peníze?

c) Spočtěte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

7. Na úsečce délky l jsou náhodně umístěny dva body, které tuto úsečku rozdělí na tři části. S jakou pravděpodobností je možné z takto vzniklých tří úseček sestrojit trojúhelník?

8. (1777 - Buffonova jehla - Georges Louis Leclerc de Buffon) Na podlaze jsou parkety šířky l. Na podlahu spadne jehla délky $r < l$. Jaká je pravděpodobnost, že bude jehla ležet na dvou parketách? Šířku mezery mezi parketami zanedbáváme.

9. (Bertrandův paradox - Joseph Louis François Bertrand) Uvažujme kružnici a zvolme náhodně tětivu této kružnice. Jaká je pravděpodobnost, že délka této tětivy bude větší než délka strany rovnostranného trojuhelníka vepsaného do této kružnice?

10. Dokažte tvrzení 1.1.

1.3 Podmíněná pravděpodobnost a nezávislost náhodných jevů

1.3.1 Podmíněná pravděpodobnost

Uvažujme následující hypotetický příklad.

Příklad 1.8 *Ve třídě máme* 15 *studentek a* 12 *studentů studující učitelství matematiky, z čehož* 3 *studentky a* 6 *studentů studují kombinaci s učitelstvím fyziky. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba z této třídy bude studovat kombinaci s fyzikou? Elementárním jevem je jeden konkrétní výběr osoby z této třídy, tedy prostor elementárních jevů* Ω *lze ztotožnit s osobami v této třídě (bez vyučujícího).*

Zavedeme následující značení:

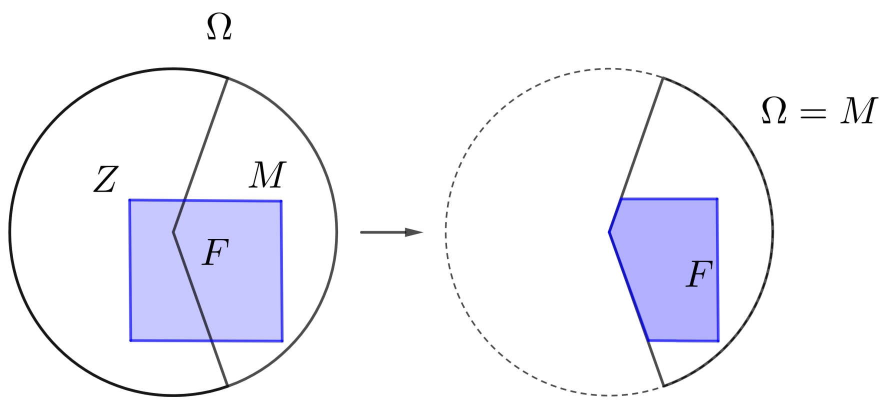
- F *… náhodně vybraná osoba studuje kombinaci s fyzikou,*
- M *… náhodně vybraná osoba je student,*

- *Z … náhodně vybraná osoba je studentka.*

Dostáváme $\Omega = M \cup Z$, $M \cap Z = \emptyset$, $P(M) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$ *a* $P(Z) = \frac{5}{9}$. *Jelikož jevy* M *a* Z *jsou disjunktní (v této hypotetické třídě), pak dle bodu iii) v definici 1.4 máme*

$$P(F) = P(F \cap M) + P(F \cap Z) = \frac{6}{27} + \frac{3}{27} = \frac{1}{3}.$$

Položme si nyní otázku, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student stu-



Obrázek 1.4: Obrázek ukazuje, jak se redukuje prostor elementárních jevů Ω při přechodu z pravděpodobnosti P na podmíněnou pravděpodobnost $P(.|M)$.

duje kombinaci s fyzikou? Prostor elementárních jevů Ω *se nyní redukuje na soubor studentů (Obrázek 1.4). Ptáme se vlastně na otázku, jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba studuje kombinaci s fyzikou, víme-li předem, že je to student (tj. za podmínky, že je to student). Hledaná pravděpodobnost je tedy rovna* $P(F|M) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

Položme si poslední otázku. Jaká je pravděpodobnost, že vybraná osoba bude student Vojta Šesták? Zodpovězení této otázky ponecháme jako cvičení pro případného zvídavého čtenáře.

Definice 1.5 *Nechť je dán pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *a náhodné jevy* A, B, *kde* $P(B) > 0$. ***Podmíněnou pravděpodobnost*** *jevu* A *za podmínky, že nastal jev* B, *definujeme vztahem*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Věta 1.2 *Nechť je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a náhodný jev B, kde $P(B) > 0$. Potom pro libovolný jev $A \in \mathcal{F}$ platí:*

i) $P(\Omega|B) = 1$,

ii) $P(A|B) \geq 0$,

iii) $P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$ *pro každou posloupnost* $\{A_n\}$ *disjunktních jevů.*

Důkaz.

i) Z definice 1.5 plyne, že

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

ii) Jelikož $P(A \cap B) \geq 0$ (z definice 1.4, bod ii)) a $P(B) > 0$, pak $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$.

iii) Jelikož A_1, $A_2, \dots$ jsou disjunktní, pak i $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots$ jsou disjunktní. Z předpokladu iii) v definici 1.4 a z definice 1.5 plyne

$$P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) = \frac{P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n \cap B)}{P(B)} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B).$$

□

Poznámka 1.6 *Předchozí věta říká, že podmíněná pravděpodobnost má stejné vlastnosti (vlastnosti i), ii) a iii) z definice 1.4) jako pravděpodobnost nepodmíněná. Tedy podmíněná pravděpodobnost je také pravděpodobnost.*

Pomocí podmíněné pravděpodobnosti lze řešit následující příklad z reálného života.

Příklad 1.9 *Dne 9. 10. 2020 byla ve večerních zprávách zveřejněna následující informace: Ministr zdravotnictví Roman Prymula zvažuje možnost otestování celého národa na COVID 19. Byla přitom uvedena následující data:*

- *počet testovaných jedinců: 10 000 000,*
- *pozitivních jedinců: 180 000,*

- *falešně negativních jedinců: 20 000,*
- *falešně pozitivních jedinců: 249 000.*

Pokud by testování dopadlo dle odhadu a konkrétní pacient by byl testem označen jako pozitivní, jaká je pravděpodobnost, že je skutečně pozitivní?

Řešení:

Označme + jev, že testovanému jedinci vyšel pozitivní test, a N jev, že je testovaný jedinec skutečně nemocný. Pak $P(+) = \frac{249000+180000}{10000000} = 0.0429$ a $P(N \cap +) = \frac{180000}{10000000} = 0.018$. Tedy $P(N|+) = \frac{0.018}{0.0429} = 0.4195804$.

Zkusme nyní tuto úlohu přeformulovat tak, že nebudeme znát jednotlivé předpokládané počty jedinců v daných skupinách, ale budeme znát počty nemocných a úspěšnost prováděného testu.

Příklad 1.10 *Předpokládejme, že v uvedené době jsou nemocí COVID 19 nakažena* 2 % *populace a prováděný test má úspěšnost* 97.46 % *při testování zdravých jedinců a* 90 % *při testovaní nakažených jedinců. Je-li testovaný jedinec označen testem jako pozitivní, jaká je pravděpodobnost, že je skutečně nemocný?*

Takto formulovaná úloha vede na takzvanou Bayesovu větu. Ukážeme si nejdříve různá řešení této úlohy, a pak si teprve tuto větu zformulujeme.

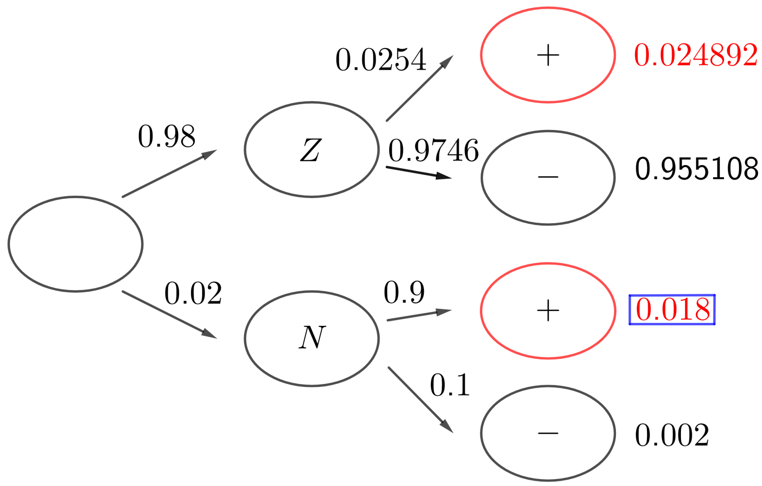
Řešení:

Zavedeme si následující značení (stejné jako v předchozím řešení):

- N ... jev, že je testovaný jedinec nemocný,
- Z ... jev, že je testovaný jedinec zdravý,
- $+$ ... jev, že je testovaný jedinec testem označen jako pozitivní (nemocný),
- $-$ ... jev, že je testovaný jedinec testem označen jako negativní.

I. Nejdříve uvedeme grafické řešení této úlohy viz obrázek 1.5.
Tedy $P(N|+) = \frac{P(N \cap +)}{P(+)} = \frac{0.018}{0.024892+0.018} = \frac{0.018}{0.42892} = 0.4196587$.

II. Řešení pomocí Bayesovy věty (kterou si zde intuitivně odvodíme) spočívá v tom, že ze zadání dostaneme $P(N) = 0.02$, $P(Z) = 1 - P(N) = 0.98$, $P(+|N) = 0.9$ a $P(+|Z) = 1 - P(-|Z) = 1 - 0.9746 = 0.0254$.
Abychom mohli spočítat podmíněnou pravděpodobnost $P(N|+)$, potřebuje nejdříve určit pravděpodobnosti $P(N \cap +)$ a $P(+)$. Jelikož $P(+|N) = \frac{P(N \cap +)}{P(N)}$, pak $P(N \cap +) = P(+|N) \cdot P(N) = 0.9 \cdot 0.02 = 0.018$. Podobně dostaneme $P(Z \cap +) = P(+|Z) \cdot P(Z) = 0.0254 \cdot 0.98 = 0.024892$. Pak si už stačí uvědomit, že $+ = (N \cap +) \cup (Z \cap +)$ a tyto dva jevy jsou disjunktní. Tedy $P(+) = P(N \cap +) + P(Z \cap +) = 0.018 + 0.024892 = 0.42892$. Hledaná pravděpodobnost je tedy $P(N|+) = \frac{P(N \cap +)}{P(+)} = \frac{0.018}{0.42892} = 0.4196587$.



Obrázek 1.5: Grafické řešení příkladu 1.10. Červenou barvou je zobrazený jev ,,testovaný jedinec měl pozitivní test", tedy jev podmínky. Modrým obdelníčkem jev ,,pozitivně testovaný jedinec je nemocný".

Ve druhém řešení předchozí úlohy jsme došli k následujícím vzorcům, které vycházejí z předpokladu, že $N \cup Z = \Omega$ a tyto jevy jsou navíc disjunktní.

$$P(+) = P(N \cap +) + P(Z \cap +) = P(+|N) \cdot P(N) + P(+|Z) \cdot P(Z),$$
$$P(N|+) = \frac{P(N \cap +)}{P(+)} = \frac{P(+|N) \cdot P(N)}{P(+|N) \cdot P(N) + P(+|Z) \cdot P(Z)}.$$

Než zformulujeme tyto vzorce v obecnější podobě, zadefinujeme si následující pojem.

Definice 1.6 *Uvažujme pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Pak náhodné jevy* $A_1, A_2, \ldots$ *tvoří* ***úplný systém jevů****, jestliže platí:*

i) $\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$ *(jevy jsou disjunktní),*

ii) $\bigcup_{i=1} A_i = \Omega$ *(jevy tvoří rozklad prostoru elementárních jevů* Ω*).*

Poznámka 1.7 *Nejjemnější úplný systém tvoří systém všech elementárních jevů. Často se používá i systém* A, A^c*, jako tomu bylo v předchozím příkladu, v němž* $A = N$ *a* $A^c = Z$*.*

Věta 1.3 (O celkové pravděpodobnosti) *Uvažujme úplný systém jevů $A_1, A_2, \ldots$ a nechť $P(A_i) > 0$, $\forall i$. Pak pro libovolný jev $B \in \mathcal{F}$ platí:*

$$P(B) = \sum_i P(A_i) \cdot P(B|A_i). \tag{1.1}$$

Důkaz.

Jevy $A_1, A_2, \ldots$ tvoří disjunktní rozklad, tedy $(A_i \cap B) \cap (A_j \cap B) = \emptyset \quad \forall i \neq j$ a $\cup_i (A_i \cap B) = B$. Potom

$$P(B) = P(\cup_i (A_i \cap B)) = \sum_i P(A_i \cap B) = \sum_i P(A_i) \cdot P(B|A_i).$$

□

Věta 1.4 (Bayesova věta) *Nechť jsou splněny předpoklady věty 1.3 a navíc $P(B) > 0$. Pak*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P(A_j) \cdot P(B|A_j)}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{1.2}$$

Důkaz.

Podle vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost je

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}. \tag{1.3}$$

Po dosazení (1.1) do (1.3) dostáváme

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{\sum_j P(A_j) \cdot P(B|A_j)} = \frac{P(B|A_i) \cdot P(A_i)}{\sum_j P(A_j) \cdot P(B|A_j)}. \tag{1.4}$$

□

Věta 1.5 (O násobení pravděpodobnosti) *Uvažujme náhodné jevy $A_1, \ldots, A_n$ a nechť platí $P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. Pak*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

Důkaz.

Jelikož $\cap_{i=1}^{n-1} A_i \subset \cap_{i=1}^{n-2} A_i \subset \ldots \subset A_1 \cap A_2 \subset A_1$, pak $P(A_1) \geq P(A_1 \cap A_2) \geq \ldots \geq P(\cap_{i=1}^{n-1} A_i) > 0$. Důkaz provedeme indukcí:

I. Z definice 1.5 přímo dostaneme $P(A_2 \cap A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1)$.

II. Nechť tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left((\cap_{i=1}^{n} A_i) \bigcap A_{n+1}\right) = P(\cap_{i=1}^{n} A_i) \cdot P(A_{n+1}|(\cap_{i=1}^{n} A_i))$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot P(A_n| \cap_{i=1}^{n-1} A_i) \cdot P(A_{n+1}|(\cap_{i=1}^{n} A_i)).$$

□

Příklad 1.11 *Jaká je pravděpodobnost, že při hře Člověče, nezlob se! nasadíme figurku až při třetím hodu kostkou? Uvažujeme pravidla, kdy hráč bez nasazené figurky má až tři pokusy na hození šestky (pokud byly předchozí hody neúspěšné).*

Řešení:
Označme A_i jev, že při i-tém hodu padne šestka. Pak $P(A_1^c) = 1 - P(A_1) = \frac{5}{6}$, $P(A_2^c|A_1^c) = 1 - P(A_2|A_1^c) = \frac{5}{6}$ a $P(A_3|A_1^c \cap A_2^c) = \frac{1}{3}$. Tedy

$$P(A_3) = P(A_3 \cap A_2^c \cap A_1^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c|A_1^c) \cdot P(A_3|A_2^c \cap A_1^c) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}.$$

1.3.2 Nezávislost náhodných jevů

Vraťme se nyní k příkladu 1.2, který drobně přeformulujeme.

Příklad 1.12 *Jaká je pravděpodobnost, že při druhém hodu mincí padne rub, pokud při prvním hodu padnul líc, a jaká je pravděpodobnost tohoto jevu, pokud podmínku na první hod vynecháme?*

Řešení:
Označme B jev, že při prvním hodu padne líc, a A jev, že při druhém hodu padne rub. Pak $\Omega = \{$líc-líc, líc-rub, rub-líc, rub-rub$\}$, $B = \{$líc-líc, líc-rub$\}$, $A = \{$líc-rub, rub-rub$\}$ a $A \cap B = \{$líc-rub$\}$. Dostaneme

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}},$$

Tedy $P(A) = P(A|B) = \frac{1}{2}$. Tuto rovnost můžeme interpretovat tak, že výsledek druhého hodu není ovlivněn výsledkem prvního hodu nebo také, že výsledky prvního a druhého hodu jsou nezávislé.

Pojďme nyní pojem nezávislosti jevů zadefinovat.

Definice 1.7 *Náhodné jevy A a B jsou* ***nezávislé****, jestliže platí*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{1.5}$$

Poznámka 1.8 *Poznamenejme, že rovnost $P(A) = P(A|B)$ přímo implikuje rovnost (1.5), a tedy i nezávislost jevů A a B. Tyto rovnosti ale nejsou ekvivalentní, jelikož rovnost $P(A) = P(A|B)$ předpokládá, že $P(B) > 0$. Tento předpoklad ale u nezávislosti jevů A a B nemáme. Naopak, pokud platí $P(B) = 0$, pak jsou jevy A a B nezávislé pro libovolnou volbu jevu $A \in \mathcal{F}$.*

Pojem nezávislosti můžeme rozšířit i na skupinu náhodných jevů následujícím způsobem.

Definice 1.8 *Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ jsou náhodné jevy.*

- *Řekneme, že jsou tyto jevy* ***sdruženě nezávislé****, jestliže pro všechna $r = 2, \ldots, n$ a libovolnou posloupnost indexů $\{k_1, k_2, \ldots, k_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$, platí*

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{k_r}). \tag{1.6}$$

- *Řekneme, že jsou tyto jevy* ***po dvou nezávislé****, jestliže jsou jevy A_i, A_j nezávislé pro všechna $i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j$.*

Vraťme se naposledy k příkladu o dvou hodech mincí.

Příklad 1.13 *Uvažujme dva hody vyváženou mincí a označme jevy*

- *B ... jev, že při prvním hodu padne líc,*
- *A ... jev, že při druhém hodu padne rub,*
- *C ... jev, že při obou hodech padne stejná strana mince.*

Jsou tyto jevy nezávislé? Jsou tyto jevy po dvou nezávislé?

Řešení:

Jelikož $\Omega = \{$líc-líc, líc-rub, rub-líc, rub-rub$\}$, $B = \{$líc-líc, líc-rub$\}$, $A = \{$líc-rub, rub-rub$\}$, $C = \{$líc-líc, rub-rub$\}$, $A \cap B = \{$líc-rub$\}$, $A \cap C = \{$rub-rub$\}$, $B \cap C = \{$líc-líc$\}$ a $A \cap B \cap C = \emptyset$, pak $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ a $P(A \cap B \cap C) = 0$. Tedy jevy A, B a C nejsou nezávislé, ale jsou po dvou nezávislé.

Následující příklad nám ukazuje, proč pro určení nezávislosti tří jevů A, B a C nestačí ověřit platnost rovnosti $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Příklad 1.14 *Uvažujme hod osmistěnnou vyváženou kostkou a uvažujme následující jevy*

- A *... jev, že padne liché číslo* ($A = \{1, 3, 5, 7\}$),
- B *... jev, že padne* 1, 2, 3 *nebo* 5 ($B = \{1, 2, 3, 5\}$),
- C *... jev, že padne* 1, 2, 4 *nebo* 7 ($C = \{1, 2, 4, 7\}$).

Jsou jevy A, B a C nezávislé?

Řešení:
Jelikož $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A \cap B = \{1, 3, 5\}$, $A \cap C = \{1, 7\}$, $B \cap C = \{1, 2\}$ a $A \cap B \cap C = \{1\}$, pak $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{3}{8}$, $P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ a $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8}$. Tedy

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A) \cdot P(B) \cdot P(C), \\ P(A \cap B) &\neq P(A) \cdot P(B), \\ P(A \cap C) &= P(A) \cdot P(C), \\ P(B \cap C) &= P(B) \cdot P(C), \end{aligned}$$

a proto nejsou A, B a C nezávislé.

Následující věta nám říká, že máme-li n nezávislých náhodných jevů a některé z nich nahradíme jejich doplňky, získáme zase nezávislé jevy.

Věta 1.6 *Uvažujme nezávislé náhodné jevy $A_1, ..., A_n$. Zvolme libovolnou podmnožinu indexů $I \subset \{1, ..., n\}$ a označme $B_i = A_i^c$ pro $i \in I$ a $B_i = A_i$ pro $i \notin I$. Pak jsou jevy $B_1, ..., B_n$ nezávislé.*

Důkaz. Uvažujme $r - 1 < n - 1$ jevů $A_{k_1}, ..., A_{k_{r-1}} \subset \{A_1, ..., A_{n-1}\}$ a nechť $B_n = A_n^c$. Pak

$$\begin{aligned} P(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_{r-1}} \cap B_n) &= P(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_{r-1}}) - P(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_{r-1}} \cap B_n^c) \\ &= P(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_{r-1}}) - P(A_{k_1} \cap ... \cap A_{k_{r-1}} \cap A_n) \\ &= \prod_{i=1}^{r-1} P(A_{k_1}) - P(A_n) \cdot \prod_{i=1}^{r-1} P(A_{k_i}) \\ &= (1 - P(A_n)) \prod_{i=1}^{r-1} P(A_{k_i}) = P(A_n^c) \prod_{i=1}^{r-1} P(A_{k_i}) \\ &= P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_1}) \cdot ... \cdot P(A_{k_{r-1}}) \cdot P(B_n). \end{aligned}$$

Ukázali jsme, že přidáme-li k libovolné $(r-1)$-tici jevů A_{k_i} jev $B_n = A_n^c$, pak tato r-tice splňuje rovnost (1.6), tedy jsou jevy $A_1, ..., A_{n-1}, A_n^c$ nezávislé. Má-li indexová množina I m prvků, pak důkaz provedeme m-tým opakováním předchozího postupu (případně počátečním přeindexováním jevů).

□

1.3.3 Cvičení

1. Házíme dvěma pravidelnými kostkami.

   a) Jaká je pravděpodobnost, že padla šestka za podmínky, že celkový součet je 8?

   b) Jsou jevy ,,padla šestka" a ,,celkový součet je 8" nezávislé?

2. Házíme dvěma pravidelnými kostkami - modrou a zelenou. Označme A jev, že na modré kostce padlo sudé číslo, B jev, že na zelené kostce padlo liché číslo a C jev, že součet čísel je lichý.

   a) Jsou náhodné jevy A,B,C po dvou nezávislé?

   b) Jsou jevy A,B,C nezávislé?

3. Házíme dvěma pravidelnými kostkami najednou, dokud nepadne součet 5 nebo součet 7 (na obou kostkách dohromady). S jakou pravděpodobností padne dříve součet 5 než součet 7?

4. Ve třídě je 70 % chlapců a 30 % dívek. Dlouhé vlasy má 10 % chlapců a 80 % dívek.

   a) Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraná osoba dlouhé vlasy?

   b) Vybraná osoba má dlouhé vlasy. Jaká je pravděpodobnost, že je to dívka?

5. Roztržitý profesor zapomene v obchodě deštník s pravděpodobností 1/4 (za předpokladu, že s deštníkem do obchodu přišel). Cestou z Karlína navštívil čtyři obchody a domů přišel bez deštníku. Jaká je pravděpodobnost, že deštník zapomněl ve čtvrtém obchodě? (převzaté z [2])

6. (Monty Hallův problém) V jednom ze tří trezorů je skryta odměna, ostatní dva jsou prázdné. Soutěžící je vyzván, aby si vybral trezor, ve kterém myslí, že je skryta odměna. V případě, že se trefí, odměnu získá. Po vybrání je otevřen jeden z dvou dalších trezorů, ale vždy pouze ten, který je prázdný, o čemž je

soutěžící informován. Poté je soutěžící vyzván, zda chce změnit volbu trezoru a vybrat si druhý zbývající. Je pro soutěžícího změna trezoru výhodná?

7. Skříňka má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé jedna zlatá a jedna stříbrná a ve třetí 2 tříbrné mince. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je pravděpodobnost, že v zásuvce zbyde zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná? (převzaté z [7])

8. Požití alkoholu bylo prokázáno u 1 % všech řidičů a u 10 % řidičů, kteří způsobili dopravní nehodu. Kolikrát se požitím alkoholu zvyšuje riziko nehody? (převzaté z [14])

9. Z 60 žijících členů klubu vysloužilých námořních kapitánů jich 5 zažilo ztroskotání (jednou). Podle statistiky při ztroskotání lodi v této oblasti třetina kapitánů zahyne. Odhadněte pravděpodobnost, že kapitán zažije ztroskotání (aspoň jednou za život – možnost opakovaného ztroskotání téhož kapitána i předčasného úmrtí z jiné příčiny zanedbáváme). (převzaté z [14])

10. Náhodně vybereme kladné celé číslo N, rozdělení pravděpodobnosti je $P[N = i] = 2^{-i}$. Poté hodíme N kostkami. Nechť S je součet hodnot, které při hodu padly. Určete podmíněné pravděpodobnosti $P[N = 2|S = 4]$ a $P[S = 4|N \text{ je sudé}]$.

11. a) Rodina má dvě děti, starší je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

    b) Rodina má dvě děti, (aspoň) jedno z nich je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že mají dvě dcery?

12. Jazykový korektor změní 99 % chybných slov na správná a 0.01 % správných na chybná. Změnil 2 % slov. Odhadněte množství chybných slov v jeho výstupu.

Kapitola 2

Náhodná veličina

„Není pravdy, je jen pravděpodobnosti.“

—Prótagorás

2.1 Zavedení náhodné veličiny

Uvažujme následující příklad.

Příklad 2.1 *Anička navštívila dětský den, na kterém jsou pro děti připraveny různé soutěže, přičemž v každé soutěži může soutěžící získat penízky. Ty pak lze v přilehlém obchůdku vyměnit za různé sladkosti a hračky. Anička zatím soutěžila ve dvou soutěžích, a to v házení tří kroužků na tyčku a ve shazování plechovek míčkem. V první soutěži má pravděpodobnost úspěšného hodu* $\frac{1}{2}$ *a za každý úspěšný hod dostane* 10 *penízků, ve druhé má pak pravděpodobnost* p_i*, že shodí právě* i *plechovek, kde* $p_0 = p_1 = p_2 = p_6 = 0.1$ *a* $p_3 = p_4 = p_5 = 0.2$*. Za každou shozenou plechovku Anička získá* 4 *penízky. Jaká je pravděpodobnost, že po těchto dvou soutěžích si bude moct Anička koupit velké lízátko, které stojí* 20 *penízků.*

Řešení:
Pro snadnější zápis zavedeme následující značení: X_1 bude počet penízků, které Anička získala v první soutěži, a X_2 počet penízků, které získala ve druhé soutěži. Pak

$$P(X_1 = 10k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k}\frac{1}{8}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

tedy $P(X_1 = 0) = P(x_1 = 30) = \frac{1}{8}$ a $P(X_1 = 10) = P(X_2 = 20) = \frac{3}{8}$. Ze zadání rovněž víme, že $P(X_2 = 0) = P(X_2 = 4) = P(X_2 = 8) = P(X_2 = 24) = 0.1$ a $P(X_2 = 12) = P(X_2 = 16) =$

$P(X_2 = 20) = 0.2$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\begin{aligned}P(X_1 + X_2 \geq 20) =& P(X_1 = 0, X_2 \geq 20) + P(X_1 = 10, X_2 \geq 10) + P(X_1 = 20, X_2 \geq 0)\\ &+ P(X_1 = 30, X_2 \geq -10)\\ =& P(X_1 = 0)P(X_2 \geq 20) + P(X_1 = 10)P(X_2 \geq 10)\\ &+ P(X_1 = 20)P(X_2 \geq 0) + P(X_1 = 30)P(X_2 \geq -10)\\ =& \frac{1}{8} \cdot 0.3 + \frac{3}{8} \cdot 0.7 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{1}{8} \cdot 1 = \frac{6.4}{8} = \frac{8}{10}.\end{aligned}$$

Zde jsme využili vztahů $P(X_2 \geq 20) = P(X_2 = 20) + P(X_2 = 24) = 0.2 + 0.1 = 0.3$, $P(X_2 \geq 10) = P(X_2 = 12) + P(X_2 = 16) + P(X_2 = 20) + P(X_2 = 24) = 0.2 + 0.2 + 0.2 + 0.1 = 0.7$ a $P(X_2 \geq 0) = P(X_2 \geq -10) = 1$.

V předchozím příkladu jsme použili pro počet získaných penízků v první, resp. druhé, hře značení X_1, resp. X_2. Toto značení v sobě obsahuje myšlenku náhodné veličiny, která se nám hodí v situacích, kdy je pro nás výhodné elementárním jevům přiřadit nějaká reálná čísla. Formální definici uvedeme v následující části textu.

Nejdříve zadefinujeme pojem Borelovská σ-algebra, který jsme již zmínili výše v definici 1.2.

Definice 2.1 *Uvažujme prostor všech reálných čísel $\mathbb{R}$. Pak nejmenší σ-algebru obsahující všechny otevřené intervaly označíme $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ a nazveme ji* ***Borelovskou σ-algebrou*** *.*

Poznámka 2.1 *Borelovská σ-algebra obsahuje také všechny uzavřené intervaly, všechny polouzavřené intervaly či všechny jednobodové množiny, jejich sjednocení atd. Výčet všech typů podmnožin této σ-algebry je ale ještě výrazně širší, viz [18].*

Definice 2.2 *Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravděpodobnostní prostor. Reálnou funkci X definovanou na Ω nazýváme* ***náhodnou veličinou****, jestliže X je* ***měřitelné zobrazení*** *$X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tj. pro libovolnou množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ platí*

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}. \tag{2.1}$$

Poznámka 2.2 *Náhodné veličiny budeme značit velkými písmeny $X, Y, Z \ldots$ Hodnoty, kterých mohou náhodné veličiny nabývat, budeme značit malými písmeny $x, y, z \ldots$*

Pro jevy $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$, resp. $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}$, budeme používat zjednodušené značení $\{X \in B\}$, resp. $\{X < x\}$, a pro jejich pravděpodobnosti značení $P(X \in B)$, resp. $P(X < x)$.

Poznámka 2.3 *Součty, součiny, podíly, minima a maxima náhodných veličin jsou opět náhodné veličiny.*

Věta 2.1 *Nechť X je náhodná veličina a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je borelovsky měřitelná funkce (tj. g je měřitelné zobrazení z $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ do $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$). Pak $Y = g(X)$ je také náhodná veličina.*

Důkaz. Mějme libovolnou množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, pak $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, a tedy

$$\{\omega \in \Omega : Y(\omega) \in B\} = \{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in g^{-1}(B)\} \in \mathcal{F}.$$

□

Poznámka 2.4 *Požadavek na měřitelnost náhodné veličiny je přirozený. Tento požadavek nám umožňuje pracovat s jevy $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ a přiřadit jim jejich pravděpodobnost. Pokud by $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \notin \mathcal{F}$, pak bychom nemohli určit pravděpodobnost tohoto jevu, jelikož je pravděpodobnost P definovaná pro jevy ze σ-algebry $\mathcal{F}$, viz definice 1.4.*

Příklad 2.2 *Uvažujme jeden hod kostkou a označme ω_i jev, že padlo na kostce číslo $i = 1, ..., 6$. Pak náhodná veličina popisující počet puntíků, které na kostce v tomto hodu padly, je $X(\omega_i) = i$, $i = 1, ..., 6$. Budeme-li uvažovat hru Člověče nezlob se! a bude-li nás zajímat pouze, zda nasadíme novou figurku, pak můžeme pracovat s náhodnou veličinou $Y(\omega_i) = 0$, $i = 1, ..., 5$ a $Y(\omega_6) = 1$ popisující, zda padla šestka ($Y = 1$), či nikoliv ($Y = 0$) neboli počet šestek, které padly v jednom hodu.*

2.2 Rozdělení a základní charakteristiky

2.2.1 Rozdělení a distribuční funkce

Příklad 2.3 *Uvažujme francouzskou ruletu, v níž máme čísla 0 až 36, z čehož vybraných 18 čísel je červených, 18 černých a nula je zelená, viz obrázek 2.1. Uvažujme dva hráče. První hráč vsadí 100 \$ na sudá čísla a druhý hráč vsadí 100 \$ na černou barvu. Označme X_1 a X_2 náhodnou veličinu určující zisk prvního, resp. druhého hráče (zde jen poznamenejme, že zisk může být i záporný, což znamená hráčovu ztrátu). Pak náhodné veličiny X_1 a X_2 jsou různé, jelikož např. pro elementární jev ω_{34} … padlo číslo 34 platí $X_1(\omega_{34}) = -100 \neq 100 = X_2(\omega_{34})$, jelikož číslo 34 je červené . Z hlediska pravděpodobnosti výhry i případné velikosti výhry jsou na tom však oba hráči stejně, neboť pravděpodobnost výhry je pro každého $\frac{18}{37}$.*

Obrázek 2.1: .

Situaci, kdy se dvě různé náhodné veličiny z hlediska pravděpodobností jednotlivých výsledků chovají stejně, se říká, že mají stejné rozdělení. Tento pojem nyní zadefinujeme.

Definice 2.3 *Uvažujme náhodnou veličinu X na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Pak množinovou funkci $P_X(B) = P(X \in B) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\})$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ nazveme* ***rozdělením*** *náhodné veličiny X.*

Poznámka 2.5 *Rozdělení P_X je pravděpodobnostní míra na měřitelném prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

Příklad 2.4 *Rozdělení náhodné veličiny X_1 z příkladu 2.3 je $P_{X_1}(\{100\}) = \frac{18}{37}$ a $P_{X_1}(\{-100\}) = \frac{19}{37}$. Častěji ale používáme zápis $P(X_1 = 100) = \frac{18}{37}$ a $P(X_1 = -100) = \frac{19}{37}$.*

Striktně vzato potřebujeme k určení rozdělení náhodné veličiny X určit $P_X(B)$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. V případě, kdy náhodná veličina nabývá konečně (nebo i spočetně) mnoha hodnot, si můžeme vystačit s určením pravděpodobností pro tyto hodnoty (tak jako v předchozím příkladu), jelikož z těchto pravděpodobností už lze $P_X(B)$ pro každou množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ určit. Přímý popis $P_X(B)$ pro každou množinu B je však v praxi obtížný. Proto volíme jiné způsoby popisu rozdělení náhodné veličiny. Jedním z nich je distribuční funkce, kterou nyní zadefinujeme.

Definice 2.4 *Nechť X je náhodná veličina. Její **distribuční funkcí** nazýváme reálnou funkci F reálné proměnné x definovanou*

$$F(x) = P(X < x) = P(\{\omega : X(\omega) < x\}), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Z definic 2.3 a 2.4 dostaneme rovnost

$$P_X([a, b)) = F(b) - F(a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

tedy rozdělení P_X je zároveň **Lebesgueova-Stieltjesova míra** určená distribuční funkcí F, viz [10] a [18]. O tom, že je příslušná Lebesgueova-Stieltjesova míra (rozdělení) určena vztahem (2.3) jednoznačně, hovoří Hopfova věta, viz [10] a [18].

Poznámka 2.6 *Díky vztahu mezi rozdělením P_X a distribuční funkcí F se často používá značení $\int 1dF(x)$ místo $\int 1dP_X(x)$.*

Poznámka 2.7 *Pokud potřebujeme specifikovat, k jaké náhodné veličině příslušná distribuční funkce patří, používáme značení $F_X(x)$ pro distribuční funkci náhodné veličiny X, $F_Y(x)$ pro distribuční funkci náhodné veličiny Y atd.*

Poznámka 2.8 *Distribuční funkce není ve všech zdrojích definována vztahem* (2.2)*. Někdy se lze setkat s definicí*

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

viz např. [10], [15].

Řekněme si nyní něco o vlastnostech distribuční funkce. Nejdříve si ale dokážeme následující lemma o limitě posloupnosti vnořených jevů.

Lemma 2.2 *Uvažujme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a jevy $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$.*

i) Je-li $A_1 \subset A_2 \subset ...$, pak $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

ii) Je-li $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$*, pak* $P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Důkaz.

i) Jelikož $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus A_2) \cup \ldots)$, máme

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{i+1} \setminus A_i) = \lim_{n\to\infty} \left(P(A_1) + \sum_{i=1}^{n} P(A_{i+1} \setminus A_i) \right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup \ldots \cup (A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

ii)

$$P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = P((\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c)^c) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c) = 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (1 - P(A_n^c)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

□

Věta 2.3 *Nechť* $F(x)$ *je distribuční funkce, pak platí:*

i) $F(x)$ *je neklesající,*

ii) $F(x)$ *je zleva spojitá,*

iii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

Důkaz.

i) Je-li $x < y$, pak jev $\{X < x\}$ je podjevem jevu $\{X < y\}$, a tedy $F(x) = P(X < x) \leq P(X < y) = F(y)$ z tvrzení 1.1, bod ii).

ii) Uvažujme $x \in \mathbb{R}$ a označme $A = \{X \geq x\}$ a $A_n = \{x - 1/n \leq X < x\}$. Pak $A_m \subset A_n$ pro $m > n$ a $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \in [x - 1/n, x)\} = \emptyset$, jelikož $\cap_{n=1}^{\infty} [x - 1/n, x) = \emptyset$. Tedy

$$\lim_{t\to x-} F(t) = \lim_{n\to\infty} F(x - 1/n) = \lim_{n\to\infty} P(X < x - 1/n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (1 - P(X \geq x - 1/n)) = 1 - \lim_{n\to\infty} (P(A \cup A_n))$$
$$= 1 - \lim_{n\to\infty} (P(A) + P(A_n)) = 1 - P(A) - \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$
$$= 1 - P(A) = P(A^c) = P(X < x) = F(x).$$

iii) Použijeme lemma 2.2.

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(-n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}(X < -n)) = P(\emptyset) = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty}(X < n)) = P(\Omega) = 1.$$

□

Poznámka 2.9 *Pokud bychom distribuční funkci definovali vztahem (2.4), pak by se vlastnosti lišily pouze tím, že by $F(x)$ byla zprava spojitá funkce, avšak vlastnosti z bodů i) a iii) by byly zachovány. Pokud je $F(x)$ spojitá, pak*

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

a obě tyto definice splývají.

Příklad 2.5 *Uvažujme náhodnou veličinu X popisující počet puntíků, které padly na kostce při jednom hodu, tj. $P(X = i) = \frac{1}{6}$, $i = 1, ..., 6$. Pak distribuční funkce této náhodné veličiny je*

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 & x &\leq 0, \\ &= \frac{i}{6} & x &\in (i-1, i],\ i = 1, ..., 6, \\ &= 1 & x &> 6, \end{aligned}$$

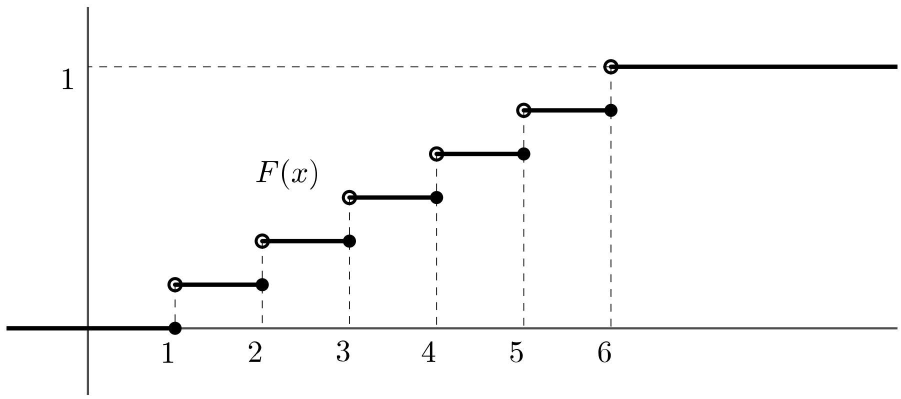
viz obrázek 2.2.

Věta 2.4 *Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné veličiny X, pak pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $P(X = x) = \lim_{t\to x+} F(t) - F(x)$.*

Důkaz.

$$\begin{aligned} P(X = x) &= P(X \leq x) - P(X < x) = P(X \leq x) - F(x) \\ &= P(\bigcap_{n=1}^{\infty}(X < 1 + 1/n) - F(x) = \lim_{n\to\infty} P(X < x + 1/n) - F(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(x + 1/n) - F(x) = \lim_{t\to x+} F(t) - F(x). \end{aligned}$$

□



Obrázek 2.2: Graf distribuční funkce $F(x)$ k příkladu 2.5.

Věta 2.5 *Každá distribuční funkce má nejvýše spočetně bodů nespojitosti.*

Důkaz. Uvažujme distrubuční funkci $F(x)$ náhodné veličiny X. Je-li x_i bod nespojitosti distribuční fubkce $F(x)$, pak velikost tohoto skoku je dle předchozí věty rovna $P(X = x_i)$. Označme $M_n = \{x \in \mathbb{R} : P(X = x) > \frac{1}{n}\}$, pak $\#M_n < n$ (počet prvků množiny $M_n < n$). Označme M množinu všech bodů nespojitosti funkce $F(x)$, pak $M = \bigcup_{n=2}^{\infty} M_n$. Jelikož M je spočetné sjednocení konečných množin, je tato množina spočetná.

□

Ve většině případů si vystačíme se dvěma typy náhodných veličin, jmenovitě s diskrétní náhodnou veličinou (tu používáme pro popis situace, kdy nastává konečně nebo spočetně mnoho možných výsledků) a se spojitou náhodnou veličinou (tu použijeme tehdy, pokud možné výsledky tvoří celý interval). V některých aplikacích se můžeme setkat i se směsmi (také nazývanými mixing), viz [20], avšak tyto náhodné veličiny zde uvažovat nebudeme.

Definice 2.5 *náhodná veličina se nazývá* ***diskrétní*** *(X má* ***diskrétní rozdělení****), jestliže existuje konečná nebo spočetná množina reálných čísel $\{x_k\}_{k\in I}$ a k ní příslušná posloupnost nezáporných čísel $\{p_k\}_{k\in I}$ splňující $\sum_{k\in I} p_k = 1$ a $P(X = x_k) = p_k$, $\forall k \in I$ a I je nějaká indexová množina.*

Příkladem diskrétní náhodné veličiny je náhodná veličina X použitá v příkladu 2.5, udávající počet puntíku, které padly na kostce při jednom hodu.

Definice 2.6 *Náhodná veličina se nazývá* ***absolutně spojitá*** *(X má* ***absolutně spojité rozdělení****), jestliže existuje nezáporná integrovatelná funkce $f(x)$ taková, že*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkci $f(x)$ se říká ***hustota*** *rozdělení náhodné veličiny X.*

Poznámka 2.10 *Často používáme kratší pojem ,,spojitá náhodná veličina X" místo ,,absolutně spojitá náhodná veličina X".*

U spojitých rozdělení je často užitečnější pracovat s hustotou $f(x)$ místo s distribuční funkcí $F(x)$. Uveďme si následující větu o vlastnostech hustoty.

Věta 2.6 *Nechť $f(x)$ je hustota rozdělení s distribuční funkcí $F(x)$, pak platí:*

i)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

ii) $F'(x) = f(x)$ ve všech bodech spojitosti hustoty $f(x)$.

Důkaz.

i) $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ z věty 2.3.

ii) Nechť $x \in \mathbb{R}$ je bod spojitosti hustoty $f(x)$. Pak

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x+h} f(t)dt - \int_{-\infty}^{x} f(t)dt}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{x}^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x). \end{aligned}$$

□

Poznámka 2.11 *Rovnost $F'(x) = f(x)$ platí dokonce pro* ***skoro všechna*** *x, což znamená pro všechna x, které jsou vně nějaké množiny nulové míry[1] viz [38]. Hustota $f(x)$ není ale distribuční funkcí určena jednoznačně. Je-li $f(x)$ nějaká hustota a $\tilde{f}(x)$ se od hustoty $f(x)$ liší pouze ve spočetně bodech definičního oboru, pak jsou obě hustoty stejného rozdělení, neboť $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \tilde{f}(t)dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*

[1] Není-li uvedeno jinak, myslíme Lebesgueovu míru.

2.2.2 Střední hodnota

Definice 2.7 *Uvažujme náhodnou veličinu X, pak* ***střední hodnotu*** *této náhodné veličiny definujeme vztahem*

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega), \tag{2.5}$$

pokud má integrál $\int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$ smysl.

- *Je-li X diskrétní náhodná veličina, pak*

$$\mathbb{E}X = \sum_{k\in I} x_k \cdot p_k.$$

- *Je-li X spojitá náhodná veličina, pak*

$$\mathbb{E}X = \int_\mathbb{R} x \cdot f(x)dx,$$

  kde $f(x)$ je hustota rozdělení náhodné veličiny X.

Poznámka 2.12 *Střední hodnotu můžeme interpretovat jako hodnotu, kolem které náhodná veličina X kolísá. Jde tedy o charakteristiku polohy.*

Poznámka 2.13 *Střední hodnota diskrétní náhodné veličiny je vážený průměr hodnot $\{x_k\}$, kterých daná náhodná veličina nabývá. Jako váhu pro každou hodnotu x_k používáme pravděpodobnost p_k nabytí příslušné hodnoty.*

Poznámka 2.14 *Je-li $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pak z předchozí definice a věty 2.1 plyne*

$$\mathbb{E}g(X) = \int_\Omega g(X(\omega))dP(\omega).$$

Tedy pro diskrétní náhodnou veličinu X je $\mathbb{E}g(X) = \sum_{k\in I} g(x_k) \cdot p_k$ a pro spojitou náhodnou veličinu X (s hustotou rozdělení $f(x)$) je $\mathbb{E}g(X) = \int_\mathbb{R} g(x) \cdot f(x)dx$.

Příklad 2.6 *Uvažujme francouzskou ruletu (ruleta s jednou nulou) a hráče hrající systém martingale [23] s počátečním vkladem 1 \$. Při hře tohoto systému hráč sází na polovinu pole (pokud nezapočítáváme nulu), tj. např. na barvu, na sudá čísla apod.*

Pokud prohraje, pak v dalším kole zdvojnásobí vsazenou částku. To se opakuje do první výhry. Označme Z náhodnou veličinu ztráty hráče před první výhrou. Pak

$$\begin{aligned} P(Z=0) &= \frac{18}{37}, \\ P(Z=1) &= \frac{19}{37}\cdot\frac{18}{37}, \\ P(Z=1+2) = P(Z=3) &= \left(\frac{19}{37}\right)^2\cdot\frac{18}{37}, \\ &\dots \\ P(Z=2^k-1) &= \left(\frac{19}{37}\right)^k\cdot\frac{18}{37}. \end{aligned}$$

Určete střední ztrátu hráče před první výhrou.

Řešení:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Z &= \sum_{k=0}^{\infty}(2^k-1)\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^k\cdot\frac{18}{37} = \sum_{k=0}^{\infty}2^k\cdot\left(\frac{19}{37}\right)^k\cdot\frac{18}{37} - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{19}{37}\right)^k\cdot\frac{18}{37} \\ &= \frac{18}{37}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{38}{37}\right)^k - 1 = \infty. \end{aligned}$$

Tedy střední ztráta hráče před první výhrou je nekonečná. To k hraní tohoto systému úplně nemotivuje, i když tento herní systém ve skutečnosti není zcela špatný a za jistých podmínek[2] může být pro hráče výhodný.

Poznámka 2.15 *Jak bylo vidět v předchozím příkladu, střední hodnota náhodné veličiny nemusí být vždy konečná. V některé literatuře se konečnost střední hodnoty předpokládá v její definici, viz [26], [33] nebo [38]. V tomto případě by náhodná veličina v předchozím příkladu střední hodnotu vůbec neměla.*

Věta 2.7 *Uvažujme náhodné veličiny X a Y a reálná čísla $a, b, c \in \mathbb{R}$. Pak $\mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}X + b\mathbb{E}Y + c$ (pokud má výraz vpravo smysl).*

Důkaz. Důkaz plyne z linearity sum a integrálů.

$\square$

[2] Systém martingale je výherní, pokud si hráč může dovolit vsadit libovolnou sumu (třeba půjčenou bezúročně na dluh majitelem kasína).

2.2.3 Rozptyl a další momenty

V předchozí části jsme zavedli střední hodnotu, která je nejpoužívanější charakteristikou polohy u náhodných veličin. V této části si zavedeme rozptyl, který je zase nejpoužívanější charakteristikou variability.

Definice 2.8 *Nechť X má konečnou střední hodnotu, pak*

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \tag{2.6}$$

nazveme ***rozptyl*** *náhodné veličiny X. Odmocnina z rozptylu $\sqrt{\mathrm{var}X}$ se nazývá* ***směrodatná odchylka****.*

Poznámka 2.16 *Jelikož dle věty 2.7 je střední odchylka náhodné veličiny od své střední hodnoty $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X) = 0$, používá se jako charakteristika variability právě odchylka kvadratická, tj. $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathrm{var}X$. Ta má v praxi tu nevýhodu, že její jednotka je kvadrátem jednotky náhodné veličiny X. K zachování jednotky pak lze použít výše zmíněnou směrodatnou odchylku, popř. tzv.* ***střední absolutní odchylku*** *$\mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|$, která sice vypadá intuitivně, ovšem nemá tak užitečné vlastnosti jako rozptyl.*

Věta 2.8 (Vlastnosti rozptylu) *Uvažujme náhodnou veličinu s konečným rozptylem $\mathrm{var}X < \infty$. Pak platí:*

i) $\mathrm{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$,

ii) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *je* $\mathrm{var}(aX + b) = a^2\mathrm{var}X$.

Důkaz.

i)

$$\begin{aligned}\mathrm{var}X &= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - 2X \cdot \mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2)\\ &= \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}X + \mathbb{E}(\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(aX + b) &= \mathbb{E}((aX + b) - \mathbb{E}(aX + b))^2 = \mathbb{E}(aX - \mathbb{E}(aX))^2\\ &= \mathbb{E}(a^2(X - \mathbb{E}X)^2) = a^2\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = a^2\mathrm{var}X.\end{aligned}$$

$\square$

Kromě střední hodnoty a rozptylu se používají i další charakteristiky. Stručně si definujeme jen ty nejpodstatnější. V následující definici předpokládáme existenci a konečnost středních hodnot, a nenulovost rozptylů.

Definice 2.9 *Nechť X je náhodná veličina, pak*

- $\mathbb{E}X^k$ *nazýváme* ***k-tý moment*** *náhodné veličiny X,*
- $\mathbb{E}|X|^k$ *nazýváme* ***k-tý absolutní moment*** *náhodné veličiny X,*
- $\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^k$ *nazýváme* ***k-tý centrální moment*** *náhodné veličiny X,*
- $\mathbb{E}|X-\mathbb{E}X|^k$ *nazýváme* ***k-tý absolutní centrální moment*** *náhodné veličiny X,*
- $\alpha_3 = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^3}{(\mathrm{var}X)^{\frac{3}{2}}}$ *nazýváme* ***šikmost*** *náhodné veličiny X,*
- $\alpha_4 = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{(\mathrm{var}X)^2} - 3$ *nazýváme* ***špičatost*** *náhodné veličiny X.*

2.2.4 Cvičení

1. Je náhodná veličina jednoznačně určena svým rozdělením?
2. Je rozdělení náhodné veličiny jednoznačně určeno příslušnou distribuční funkcí?
3. Mějme náhodnou veličinu X a funkci $g(x)$. Lze ze znalosti rozdělení náhodné veličiny X určit rozdělení náhodné veličiny $Y = g(X)$?
4. Mějme dvě náhodné veličiny se stejným rozdělením. Musí být tyto náhodné veličiny definované na stejném pravděpodobnostním prostoru?
5. Nabývá-li náhodná veličina spočetně mnoha hodnot, musí být její distribuční funkce po částech konstantní?
6. Nabývá-li náhodná veličina nespočetně mnoha hodnot, musí být její distribuční funkce spojitá?
7. V peněžence máte dvě papírové pětisetkoruny, jednu tisícikorunu a jednu dvoutisícikorunovou bankovku. Zloděj vám z peněženky náhodně vybere dvě bankovky. Označme X náhodnou veličinu, která udává, o kolik peněz jste právě přišli.

a) Určete rozdělení náhodné veličiny X.

b) Nakreslete graf distribuční funkce náhodné veličiny X.

c) Zloděj následně zaplatí 1000 Kč za špatné parkování a doma mu manželka zabaví čtyři pětiny z toho, co donese. Označme Y náhodnou veličinu udávající částku, která zloději po tom všem zůstane. Určete rozdělení náhodné veličiny Y.

d) S jakou pravděpodobností si bude zloděj moci večer v hospodě koupit večeři za 210 Kč?

e) Určete střední hodnotu $\mathbb{E}X$ a rozptyl var$X$.

2.3 Příklady diskrétních rozdělení

2.3.1 Rovnoměrné rozdělení

Příklad 2.7 *Uvažujme jeden hod vyváženou šestistěnnou kostkou a označme X padlé číslo. Pak $P(X = k) = \frac{1}{6}$, $k = 1, ..., 6$. X tedy nabývá hodnot $1, 2, ..., 6$ se stejnou pravděpodobností. Tedy by se dalo říci, že je pravděpodobnost mezi tyto hodnoty rovnoměrně rozdělena.*

Náhodná veličina X má **rovnoměrné diskrétní rozdělení**, jestliže nabývá hodnot $1, 2, ..., n$ s pravděpodobností $P(X = k) = \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, ..., n$. Pak

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

a

$$\begin{aligned}\mathrm{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 &= \sum_{k=1}^{n} \cdot k^2 \frac{1}{n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4} \\ &= \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} = \frac{n^2 - 1}{12}.\end{aligned}$$

Poznámka 2.17 *Rovnoměrné rozdělení má tedy náhodná veličina, která nabývá hodnot $1, 2, ..., k$ a žádná z těchto hodnot není preferovaná. Klasický příklad tohoto rozdělení je náhodná veličina popisující výsledek hodu kostkou či hodnotu čísla, které padne při hře ruleta (v tomto případě jsou ale výsledky $0, 1, ..., 36$).*

2.3.2 Alternativní rozdělění (Bernoulliho)

Příklad 2.8 *Uvažujme hru Člověče, nezlob se! (situaci, kdy máme stále nějakou fugurku v domečku). Jaké rozdělení má náhodná veličina, která popisuje, zda v dalším tahu nasadíme další figurku do hracího pole? Nechť $X = 1$ v případě nasazení figurky a $X = 0$ v opačném případě. Jelikož nasazujeme figurku v případě, že nám na kostce padla šestka, což nastavá s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, tak*

$$P(X = 1) = \frac{1}{6}, P(X = 0) \qquad = \frac{5}{6}.$$

Náhodná veličina X má **alternativní rozdělení** s parametrem $p \in (0, 1)$ (značíme $X \sim Alt(p)$), jestliže

$$P(X = 1) = p,$$
$$P(X = 0) = 1 - p.$$

Pak

$$\mathbb{E}X = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

a

$$\text{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = p - p^2 = p(1 - p).$$

Poznámka 2.18 *Alternativní rozdělení tedy popisuje, zda byl nějaký náhodný pokus úspěšný (to vyjádříme hodnotou $X = 1$ a pravděpodobnost úspěchu označíme p), či neúspěšný (to vyjádříme hodnotou $X = 0$).*

2.3.3 Geometrické rozdělění

Příklad 2.9 *Vraťme se nyní k příkladu 2.6 a uvažujme náhodnou veličinu X popisující počet neúspěšně odehraných spinů (herních kol) před první výhrou hráčem hrajícím systém martingale. Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X.*

Řešení:
Z příkladu 2.6 víme, že

$$P(X = k) = \frac{18}{37} \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^k, \quad k = 0, 1, ...$$

Pak
$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{18}{37} \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^k.$$
Sečteme obecnější řadu $\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p(1-p)^k$, kde využijeme faktu, že tuto mocninnou řadu můžeme na intervalu $(0,1)$ derivovat člen po členu viz [35].
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p(1-p)^k &= p(1-p)\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1} = -(p-p^2)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial p}\left((1-p)^k\right)\\ &= -(p-p^2)\frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k = -(p-p^2)\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1-p}{p}\right)\\ &= -(p-p^2)\cdot\frac{-p-(1-p)}{p^2} = \frac{1-p}{p}.\end{aligned}$$
V našem případě je $p = \frac{18}{37}$, tedy
$$\mathbb{E}X = \frac{19}{18}.$$
Tento výsledek můžeme interpretovat tak, že hráč průměrně prohraje $\frac{19}{18}$ her před první výhrou.

Dála vypočítáme $\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(1-p)^k$, a pak použijeme vztah i) z věty 2.8. Jelikož $\sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k = 1$, dostáváme
$$\begin{aligned}1 &= \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k\\ \frac{1}{p} &= \sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k\\ \frac{\partial}{\partial p}\frac{1}{p} &= \frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k\\ \frac{-1}{p^2} &= -\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^{k-1}\\ \frac{1-p}{p^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^k\\ \frac{\partial}{\partial p}\frac{1-p}{p^2} &= \frac{\partial}{\partial p}\sum_{k=0}^{\infty} k \cdot (1-p)^k\\ \\ \frac{-p^2-2p+2p^2}{p^4} &= -\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot (1-p)^{k-1}\\ \frac{(2-p)(1-p)}{p^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p \cdot (1-p)^k\end{aligned}$$

Po dosazení $p = \frac{18}{37}$ do rovnosti $\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p(1-p)^k = \frac{(2-p)(1-p)}{p^2}$ dostaneme $\mathbb{E}X^2 = \frac{\frac{56}{37}\cdot\frac{19}{37}}{\frac{18^2}{37^2}} = \frac{56\cdot 19}{18^2}$. Tedy

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{56\cdot 19}{18^2} - \frac{19^2}{18^2} = \frac{(56-19)\cdot 19}{18^2} = 2.169753.$$

Náhodná veličina X má **geometrické rozdělení** s parametrem $p \in (0,1)$, jestliže nabývá hodnot $0, 1, 2, ...,$ s pravděpodobností $P(X = k) = p(1-p)^k$, $k = 0, 1, 2, ..., n$. V předchozím příkladu jsem odvodili vztah pro střední hodnotu geometrického rozdělení

$$\mathbb{E}X = \frac{1-p}{p}.$$

Dále jsme odvodili vztah $\mathbb{E}X^2 = \frac{(2-p)(1-p)}{p^2}$, tedy

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{(2-p)(1-p)}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

Poznámka 2.19 *Jak je z příkladu 2.9 patrné, geometrické rozdělení se používá pro popis počtu nezdarů před prvním úspěchem při nezávislých pokusech s pravděpodobností úspěchu p v každém pokusu. Například pokud X popisuje počet hodů kostkou před tím, než padne první šestka, či kolikrát střelec vystřelí na terč predtím, než poprvé trefí hodnotu deset (za předpokladu, že výsledky jednotlivých střeleckých pokusů na sobě nezávisí).*

2.3.4 Binomické rozdělění

Příklad 2.10 *Hazardní hráč hraje ruletu (francouzskou) a vsází vždy na černou barku. Jaká je pravděpodobnost, že z deseti her vyhrál právě čtyřikrát?*

Řešení:
Označme X počet vyhraných her a $p = \frac{18}{37}$ pravděpodobnost výhry v jedné hře. Pak $p^4(1-p)^6$ je pravděpodobnost, že v konkrétních čtyřech hrách (třeba v prvních čtyřech) hráč vyhrál, a v ostatních prohrál. Jelikož existuje $\frac{10}{4}$ možností, jak vybrat konkrétní čtyři hry z deseti, je hledaná pravděpodobnost

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = \binom{10}{4}\left(\frac{18}{37}\right)^4 \cdot \left(\frac{19}{37}\right)^6 = 0.2157.$$

Náhodná veličina X má **binomické rozdělení** s parametry $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0,1)$ ($X \sim Bi(n,p)$), jestliže nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, ..., n$ s pravděpodobnostmi

$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Určeme střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\
&= np \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{((n-1)-l)!l!} p^l (1-p)^{(n-1)-l} = np \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} p^l (1-p)^{(n-1)-l} \\
&= np(p + (1-p))^n = np.
\end{aligned}$$

Podobný postup využijeme pro výpočet $\mathbb{E}X^2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) \cdot p^k (1-p)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) \cdot p^k (1-p)^{n-k} + \mathbb{E}X \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np \\
&= n(n-1)p^2 \sum_{l=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(n-2-l)!l!} p^l (1-p)^{n-2-l} + np \\
&= n(n-1)p^2 + np.
\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathrm{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = -np^2 + np = np(1-p).$$

Poznámka 2.20 *Binomické rozdělení se používá pro náhodnou veličinu X popisující počet úspěchů z n nezávislých pokusů, kdy pravděpodobnost úspěchu v každém pokusu je p.*

Poznámka 2.21 *Jsou-li X_i nezávislé náhodné veličiny*[3] *s rozdělením $X_i \sim Alt(p)$, pak $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ má binomické rozdělení s parametry n, p. Tohoto vztahu se dá*

[3] Pojem nezávislost náhodných veličin zadefinujeme později viz definice 3.6.

využít pro rychlejší odvození vzorečků pro střední hodnotu a rozptyl binomického rozdělení viz příklad 3.3.

2.3.5 Poissonovo rozdělení

Příklad 2.11 *Nechť X_T je počet pojistných událostí, které se udály v časovém intervalu $(0,T)$. Předpokládejme, že jsou počty událostí v disjunktních časových intervalech nezávislé, pravděpodobnost, že nastane v intervalu $(t,t+h]$ jedna událost, je $\lambda h + o(h)$, a pravděpodobnost, že v tomto intervalu nastane více než jedna událost, je $o(h)$. Určete rozdělení náhodné veličiny X_T.*

Řešení:
Rozdělme si interval $(0,T)$ na disjunktní intervaly $I_i = \left(\frac{(i-1)T}{n}, \frac{iT}{n}\right], i = 1, ..., n$, a označme X_i počet událostí v tomto intervalu. Uvažujme n tak velké, že lze zanedbat možnost výskytu více než jedné události v časovém intervalu délky $\frac{T}{n}$. S tímto přidaným předpokladem dostaneme $X_i \sim Alt(\lambda/n + o(1/n))$, tedy X_T má přibližně binomické rozdělení s parametry n a $\lambda/n + o(1/n)$ (pro velké n).

$$
\begin{aligned}
P(X_t = k) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k\right) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} (\lambda/n + o(1/n))^k (1 - \lambda/n + o(1/n))^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} n(n-1)...(n-k+1)(\lambda/n + o(1/n))^k e^{(n-k)\ln(1-\lambda/n+o(1/n))} \\
&= \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{k-1} ((n-i)(\lambda/n + o(1/n)))\, e^{(n-k)\cdot(\lambda/n+o(1/n))\frac{\ln(1-\lambda/n+o(1/n))}{-\lambda/n+o(1/n)}} \\
&= \frac{1}{k!} \lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \left(\lambda\frac{n-i}{n} + n\cdot o(1/n)\right) e^{-\lambda\frac{n-k}{n}+(n-k)\cdot o(1/n))\frac{\ln(1-\lambda/n+o(1/n))}{-\lambda/n+o(1/n)}} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.
\end{aligned}
$$

Poznámka 2.22 *Předchozí příklad jsme vyřešili s pomocí předpokladu, že zanedbáváme možnost výskytu více než jedné události v krátkém časovém intervalu. Podrobnější postup řešení bez tohoto předpokladu lze nalézt na str. 99-101 v [25].*

Náhodná veličina X má **Poissonovo rozdělení** s parametrem $\lambda > 0$ ($X \sim Po(\lambda)$), jestliže nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, ...$, s pravděpodobnostmi $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$. Pro odvození střední hodnoty a rozptylu Poissonova rozdělení můžeme vycházet z faktu, že toto rozdělení je limitním případem binomického rozdělení (jak bylo ukázáno v příkladu 2.11) a ze znalosti charakteristik binomického rozdělení, tj.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \lim_{n\to\infty} n(\lambda/n + o(1/n)) = \lambda, \\ \mathrm{var}X &= \lim_{n\to\infty} n(\lambda/n + o(1/n))(1 - \lambda/n + o(1/n)) = \lambda. \end{aligned}$$

Poznámka 2.23 *Střední hodnota i rozptyl Poissonova rozdělení se dá odvodit přímo, viz řešení cvičení 3 v sekci 6.4.*

Poznámka 2.24 *Poissonovým rozdělením se řídí např. náhodná veličina X popisující počet výskytů sledovaného jevu v časovém intervalu délky t (předpokládejme, že sledovaný jev může nastat v kterémkoliv okamžiku a střední počet výskytů sledovaného jevu během časového intervalu závisí pouze na jeho délce a ne na jeho počátku ani na tom, kolikrát jev nastal před jeho počátkem). Toto rozdělení se tedy používá například v systémech hromadné obsluhy (při modelování počtu příchozích hovorů na ústřednu, při modelování počtu příchodů zákazníků do obchodu apod.).*

2.4 Příklady spojitých rozdělení

2.4.1 Rovnoměrné rozdělení

Příklad 2.12 *Tramvaj číslo* 8 *má ráno desetiminutové intervaly. Student Matematicko-fyzikální fakulty přichází na zastávku nezávisle na jízdním řádu a čeká na tramvaj číslo 8. Popište rozdělení náhodné veličiny X popisující dobu čekání příslušného studenta na zastávce.*

Řešení:

K popisu rozdělení náhodné veličiny X použijeme distribuční funkci. K určení pravděpodobnosti $P(X < x)$ můžeme použít ideu geometrické pravděpodobnosti, tedy $P(X < x) = \frac{|[0,x)|}{|[0,10)|} = \frac{x}{10}$, $x \in (0, 10)$. Pak hustota rozdělení náhodné veličiny X je $f(x) = F'(x) = \frac{1}{10}$ pro $x \in (0, 10)$ viz věta 2.6.

Náhodná veličina X má **rovnoměrné rozdělení na intervalu** (a, b) ($X \sim R(a, b)$), jestliže je hustota tohoto rozdělení ve tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{b-a}, & x &\in (a, b), \\ &= 0, & x &\notin (a, b). \end{aligned}$$

Pokud bychom měli odhadnout, jaká je střední hodnota rovnoměrného rozdělení na intervalu (a, b), asi bychom pravděpodobně odhadli, že to bude střed tohoto intervalu. Ukažme si, že tomu tak skutečne je.

$$\mathbb{E}X = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Rozptyl tohoto rozdělení je určen následujícím vztahem, který si odvodíme.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}X &= \int_{\mathbb{R}} (x-\mathbb{E}X)^2 f(x)dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{b-a}dx \\
&= \left[\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)}\right]_a^b = \frac{\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a-\frac{a+b}{2}\right)^3}{3(b-a)} = \frac{(b-a)^3-(a-b)^3}{24(b-a)} \\
&= \frac{(b-a)^3}{12(b-a)} = \frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

Poznámka 2.25 *Rovnoměrným rozdělením na intervalu (a, b) se řídí náhodná veličina popisující situaci, kdy výsledek může nabývat libovolné hodnoty z tohoto intervalu, přičemž žádná z těchto hodnot není preferovaná.*

2.4.2 Exponenciální rozdělení

Příklad 2.13 *Uvažujme obchod, kde se počet příchozích zákazníků během časového intervalu $(0, T)$ řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λT. Určete rozdělení náhodné veličiny X popisující čas příchodu prvního zákazníka.*

Řešení:
Označme Y_t počet zákazníků, kteří přisli do času t, tedy $P(Y_t = k) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots$ Pak

$$\begin{aligned}
F_X(t) = P(X<t) = P(Y_t \geq 1) = 1 - P(Y_t = 0) &= 1 - e^{-\lambda t} && \text{pro } t > 0, \\
&= 0 && \text{pro } t \leq 0.
\end{aligned}$$

Pak hustota tohoto rozdělení je $f(t) = F'_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ pro $t > 0$ a $f(t) = 0$ pro $t \leq 0$. Poznamenejme, že v tomto příkladu jsme pro názornost použili proměnnou t místo x, jelikož se jednalo o čas.

Náhodná veličina X má **exponenciální rozdělení** s parametrem $\lambda > 0$ ($X \sim Exp(\lambda)$), jestliže je hustota tohoto rozdělení ve tvaru

$$\begin{aligned}
f(x) &= \lambda e^{-\lambda x}, && x > 0, \\
&= 0, && x \leq 0.
\end{aligned}$$

Odvodíme nyní vztahy pro střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx \overset{p.p.}{=} \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}.\end{aligned}$$

Podobně dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^2 &= \int_0^\infty \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx \overset{p.p.}{=} \left[-x^2e^{-\lambda x}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2xe^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}X = \frac{2}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

Tedy

$$\text{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Poznámka 2.26 *V některé literatuře se uvádí hustota exponenciálního rozdělení s parametrem λ ve tvaru $f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}}$ pro $x > 0$, např. [2]. V tom případě je pak $\mathbb{E}X = \lambda$ a $\text{var}X = \lambda^2$.*

Jak jsme si ukázali v příkladu 2.13, jsou-li počty událostí v časovém intervalu $(0, t)$ dány Poissonovým rozdělením (s parametrem λt), pak časy mezi těmito událostmi se řídí exponenciálním rozdělením (s parametrem λ). Díky této spojitosti mezi Poissonovým a exponenciálním rozdělením zachováme značení, kdy jsou tyto lambdy stejné.

Rovněž lze z této souvislosti odhadnout střední hodnotu exponenciálního rozdělení bez výpočtu. Je-li střední počet událostí v časovém intervalu délky jedna roven λ (víme z Poissonova rozdělení počtu těchto událostí), pak je přirozené, že střední doba mezi dvěma následujícími událostmi je $\frac{1}{\lambda}$.

Důležitou vlastností exponenciálního rozdělení je, že je tzv. **bez paměti**. To znamená, že rozdělení zbývající doby čekání na událost (která se řídí exponenciálním rozdělením) nezávisí na době, po kterou již čekáme. Tuto vlastnost matematicky popisuje následující věta.

Věta 2.9 *Nechť $X \sim Exp(\lambda)$, pak rozdělení náhodné veličiny X je bez paměti, tedy*

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t), \forall t, s > 0. \tag{2.7}$$

Důkaz.

$$P(X > t+s|X > s) = \frac{P(X > t+s)}{P(X > s)} = \frac{1 - P(X \leq t+s)}{1 - P(X \leq s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}}$$
$$= e^{-\lambda t} = 1 - P(X \leq t) = P(X > t).$$

Využili jsme vztahu $F(t) = P(X < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ z příkladu 2.13 a faktu, že pro spojité rozdělení platí rovnost $P(X < t) = P(X \leq t)$.

□

Poznámka 2.27 *Předchozí věta říká, že exponenciální rozdělení je bez paměti. Navíc však platí, že tuto vlastnost jiné spojité rozdělení nemá, tedy že tato vlastnost exponenciální rozdělení přímo definuje. Zformulujeme toto tvrzení do následující věty s mírnými dodatečnými předpoklady.*

Věta 2.10 *Uvažujme spojitou náhodnou veličinu X s rozdělením, které je bez paměti, tj. $P(X < t+s|X > s) = P(X < t)$. Dále předpokládáme, že pro hustotu tohoto rozdělení $f(t)$ platí*

$$\begin{aligned} f(t) &= 0 \quad t \leq 0, \\ f(t) &> 0 \quad t > 0 \end{aligned}$$

a hustota f je spojitá na $(0, \infty)$. Pak $X \sim Exp(\lambda)$ pro nějaké $X\lambda > 0$.

Důkaz. Pro kratší zápis použijeme značení $\lim_{t\to 0+} f(t) = f(0)_+$. Máme tedy

$$\begin{aligned} P(X < t+s|X > s) &= P(X < t) \\ \frac{P(X < t+s, X > s)}{P(X > s)} &= P(X < t) \\ \frac{P(s < X < t+s)}{P(X > s)} &= P(X < t) \\ \frac{\int_s^{s+t} f(x)dx}{\int_s^{\infty} f(x)dx} &= \int_0^t f(x)dx \\ \frac{\int_s^{s+t} f(x)dx}{\int_0^t f(x)dx} &= \int_s^{\infty} f(x)dx \\ \lim_{t\to 0+} \frac{\int_s^{s+t} f(x)dx}{\int_0^t f(x)dx} &= \lim_{t\to 0+} \int_s^{\infty} f(x)dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(s)}{f(0)_+} &= \int_s^\infty f(x)dx \\
\frac{\partial}{\partial s}\frac{f(s)}{f(0)_+} &= \frac{\partial}{\partial s}\int_s^\infty f(x)dx \\
\frac{f'(s)}{f(0)_+} &= -f(s)
\end{aligned}
$$

Dostaneme tedy diferenciální rovnici $f'(s) = -f(0)_+ f(s)$, tedy $f(s) = Ce^{-f(0)_+ s}$. Označme $\lambda = f(0)_+$, pak $f(s) = Ce^{-\lambda s}$. Jelikož $\int_0^\infty f(s)ds = 1$, dostaneme $C = \lambda$, tedy hustota má tvar $f(s) = \lambda e^{-\lambda s}$, což je hustota exponenciálního rozdělení.

□

Poznámka 2.28 *Jelikož je exponenciální rozdělení jediné spojité rozdělení bez paměti, pak právě tato vlastnost je důležitá při rozhodování, kdy toto rozdělení použít. Typickým příkladem může být doba čekání do poruchy předmětu, který nepodléhá opotřebení. Jako konkrétní příklady se často využívají různé elektronické součástky (například rezistory).*

Poznámka 2.29 *Mezi diskrétními rozděleními je jediným rozdělením bez paměti rozdělení geometrické.*

2.4.3 Normální rozdělení

Dalším velice významným spojitým rozdělením je normální rozdělení. Jeho důležitost plyne z faktu, že se toto rozdělení vyskytuje všude kolem nás. Důvod, proč je toto rozdělení tak běžné, je formulován v centrální limitní větě, kterou si uvedeme v části 4.3. Ta zjednodušeně říká, že součet velkého počtu nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin, na jejichž rozdělení máme jen velmi mírné předpoklady, má přibližně normální rozdělení. Náhodné veličiny, se kterými se v běžném životě potkáváme, lze velmi často považovat za výsledek velkého množství malých náhodných vlivů, a tedy lze očekávat, že se rozdělení těchto náhodných veličin bude blížit normálnímu rozdělení.

Náhodná veličina X má **normální rozdělení** s parametry μ a σ^2 ($X \sim N(\mu, \sigma^2)$), jestliže je hustota tohoto rozdělení ve tvaru

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Odvodíme nyní vztahy pro střední hodnotu a rozptyl tohoto rozdělení.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}dx} \\
&= \int_{\mathbb{R}} (x-\mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} (x-\mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx + \mu \int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \left| \begin{array}{c} t = x-\mu \\ dt = dx \end{array} \right| \\
&= \int_{\mathbb{R}} t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dx + \mu = \mu.
\end{aligned}
$$

Využili jsme faktů, že $f(x)$ je hustota, a tedy $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, a sudosti funkce $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, která způsobuje lichost funkce $t \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, a tedy nulovost vlastního integrálu z ní přes celé $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}X &= \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \left| \begin{array}{c} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ dt = \frac{1}{\sigma} dx \end{array} \right| \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sigma^2 t^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dx \overset{p.p.}{=} \left[\frac{-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\infty} + \sigma^2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma^2.
\end{aligned}
$$

Rovnost $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$ plyne z faktu, že $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ je hustota (hustota normálního rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$). Že $f(x)$ je skutečně hustotou, tedy že $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$, si ukážeme v rámci cvičení za touto sekcí (viz cvičení 3 a) v sekci 2.5).

Distribuční funkci normálního rozdělení $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$ nelze popsat pomocí elementárních funkcí, viz [38], ale pro parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ je poměrně podrobně tabelována, viz tabulka (6.1). Normálnímu rozdělení s parametry $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 1$ říkáme **normované normální rozdělení** a jeho distribuční funkci značíme $\Phi(x)$. Jelikož je hustota normovaného normálního rozdělení sudá funkce, platí pro distribuční funkci tohoto rozdělení $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$. Proto stačí tabelovat hodnoty této funkce pro kladná x.

Jelikož lineární transformace zachovávají normální rozdělení (pouze mění jeho parametry), lze tyto tabelové hodnoty využít i pro zjištění hodnot distribuční funkce pro obecné normální rozdělení. Tuto vlastnost normálního rozdělení nyní zformulujeme v následující větě.

Věta 2.11 *Nechť $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ a $a, b \in \mathbb{R}$, pak $Y = aX + b$ má normální rozdělení s parametry $\tilde{\mu} = a\mu + b$ a $\tilde{\sigma}^2 = a^2\sigma^2$.*

Důkaz. Rovnost $\mathbb{E}Y = a\mu + b$, resp. $\mathrm{var}Y = a^2\sigma^2$, plyne z věty 2.7, resp. 2.8. Ukažme si nyní, že lineární transformace zachová normalitu rozdělení náhodné veličiny Y. Důkaz provedeme pouze pro $a > 0$ s poznámkou, že pro $a < 0$ bychom postupovali obdobně.

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(aX + b < x) = P(X < \frac{x-b}{a}) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$$
$$= \left| \begin{array}{c} y = at + b \\ dy = a \cdot dt \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{((y-b)/a-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{a} dy$$
$$= \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi(a\sigma)^2}} e^{-\frac{(y-(b+a\mu))^2}{2(a\sigma)^2}} dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}} e^{-\frac{(y-\tilde{\mu})^2}{2\tilde{\sigma}^2}} dy.$$

Tedy rozdělení náhodné veličiny Y je dané hustotou $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}^2}} e^{-\frac{(y-\tilde{\mu})^2}{2\tilde{\sigma}^2}}$, což je hustota normálního rozdělení s parametry $(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2)$.

$\square$

Důsledek 2.12 *Nechť $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, pak $F_Y(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$.*

Důkaz. Z předchozí věty víme, že $X = \frac{Y-\mu}{\sigma^2}$ má normované normální rozdělení, tedy

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P\left(\frac{Y-\mu}{\sigma^2} < \frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) = P\left(X < \frac{x-\mu}{\sigma^2}\right) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma^2}\right).$$

$\square$

2.5 Cvičení

1. Cyril má na svazku 8 klíčů a snaží se odemknout dveře (ke kterým pasuje právě jeden klíč). Náhodně vybere klíč a vyzkouší ho. Po každém neúspěšném pokusu mu klíče spadnou na zem a další klíč znovu volí zcela náhodně. Tak pokračuje, dokud konečně dveře neotevře.

   a) Jaké je rozdělení počtu všech neúspěšných Cyrilových pokusů?

   b) Jaký je střední počet neúspěšných pokusů?

   c) Jaký je rozptyl počtu neúspešných pokusů?

2. Biatlonový závodník během závodu střílí dvacetkrát na terč. Pravděpodobnost, že při konkrétní střele mine, je 0.09 .Předpokládáme, že výsledky jednotlivých pokusů jsou nezávislé a za každý minutý terč dostává závodník trestnou minutu.

   a) Jaká je pravděpodobnost, že závodník dostane během závodu více jak dvě trestné minuty?
   b) Jaký je očekávaný počet trestných minut, který závodník získá?
   c) Jaký počet získaných trestných minut je nejpravděpodobnější?

3. Nechť $X \sim Po(\lambda)$. Odvoďte vzorec pro střední hodnotu $\mathbb{E}X$ a rozptyl var$X$ bez použití znalostí o střední hodnotě a rozptylu binomického rozdělení.

4. Semena mají klíčivost $p \in (0, 1)$. Jaký je optimální počet n semen v jamce, aby byla co nejvyšší pravděpodobnost, že vyklíčí právě jedno? Řešte obecně a pro $p = 1/3$.

5. Do obchodu přijde průměrně 10 zákazníků za hodinu, z toho je průměrně 60 % žen. Jaká je pravděpodobnost, že během půl hodiny přijdou do obchodu alespoň 3 zákazníci a všechno to budou ženy?

6. Nechť se počet příchozích hovorů na ústředně během daného časového intervalu řídí Poissonovým rozdělením (parametr λ je přímo úměrný délce časového intervalu). Průměrně přijde během hodiny dvacet hovorů.

   a) Jaké je rozdělení počtu příchozích hovorů během deseti minut?
   b) Jaké je rozdělení doby čekání na další hovor (v minutách)? Určete jeho hustotu.
   c) Jaké je rozdělení doby čekání na další hovor (od času 0), víme-li, že hovor nepřišel během časového intervalu $[0, T]$?
   d) Jaká je pravděpodobnost, že během následující minuty přijme ústředna alespoň dva hovory?
   e) Na jak dlouho si operátor v ústředně může odskočit pro kafe, aby s pravděpodobností 0.9 nepromeškal žádný příchozí hovor?

7. Mějme náhodnou veličinu X s rozdělením s hustotou $f(x) = Ce^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

   a) Určete konstantu C.

b) Jaká je střední hodnota náhodné veličiny X?

c) Jaký je rozptyl náhodné veličiny X?

8. Nechť $X \sim N(1.5, 6)$. S využitím tabulky 6.1 určete následující pravděpodobnosti.

   a) $P(X < 2.5)$.

   b) $P(X < 1)$.

   c) $P(1.5 < X < 4)$.

9. Nechť $X \sim N(0, 1)$. Určete $\mathbb{E}X^k$ pro $k = 1, 2, ...$

10. Univerzitní hokejový tým UK Praha vyšle na branku soupeře průměrně 42 střel na utkání. Průměrně každá osmá střela končí gólem.

    a) Určete pravděpodobnost, že padne první gól zmíněného týmu až při desátém streleckém pokusu.

    b) Pokud vystřelil tým UK Praha v první třetině patnáckrát, jaká je pravděpodobnost, že dal právě dva góly?

    c) Jaká je pravděpodobnost, že vystřelí zmíněný tým v první třetině právě patnáct střel?

    d) Jaká je pravděpodobnost, že budeme čekat na první střelu týmu UK více než tři minuty?

Kapitola 3

Náhodný vektor

„Nepochopení pravděpodobnosti může být největší ze všech překážek vědecké gramotnosti."
—Stephen Jay Gould

3.1 Sdružené a marginální rozdělení

V některých případech potřebujeme pracovat s více náhodnými veličinami najednou, abychom mohli například zkoumat, jaký mají mezi sebou vztah. Z tohoto důvodu potřebujeme zavést náhodný vektor.

Definice 3.1 *Uvažujme pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Nechť jsou na tomto prostoru definovány náhodné veličiny* $X_1, X_2, ..., X_n$*. Pak* $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ *nazýváme* ***náhodný vektor*** *.*

Podobně, jako jsme definovali distribuční funci pro náhodnou veličinu, abychom mohli popsat její pravděpodobnostní rozdělení, zadefinujeme i distribuční funkci náhodného vektoru $\mathbb{X}$.

Definice 3.2 *Uvažujme pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *a na něm definovaný náhodný vektor* $\mathbb{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$*. Pak reálnou funkci n reálných proměnných*

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, x_2, ..., x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, ..., X_n < x_n)$$

nazveme ***sdruženou distribuční funkcí*** *náhodného vektoru* $\mathbb{X}$*.*

Definice 3.3 *Je-li $k < n$ a $\{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, 2, ..., n\}$, pak distribuční funkci*

$$F_{(X_{i_1},...,X_{i_k})}(x_{i_1}, ..., x_{i_k}) = P(X_{i_1} < x_{i_1}, ..., X_{i_k} < x_{i_k})$$

náhodného vektoru $(X_{i_1}, ..., X_{i_k})$ nazýváme ***marginální distribuční funkce****.*

Poznámka 3.1 *Pro jednodušší značení budeme používat $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ pro vektor n reálných hodnot.*

Analogicky k vlastnostem distribuční funkce náhodné veličiny X zformulujeme vlastnosti sdružené distribuční funkce do následující věty.

Věta 3.1 *Uvažujme sdruženou distribuční funkci $F_{\mathbb{X}}(.)$ náhodného vektoru $\mathbb{X}$. Pak*

i) $F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ *je neklesající funkce v každé ze svých proměnných při pevných hodnotách ostatních proměnných.*

ii) $F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n)$ *je zleva spojitá v každé proměnné.*

iii) $\lim_{x_i \to -\infty} F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ i = 1, \ldots, n,$ *hodnoty x_j jsou pevné,* $j \neq i,\ j = 1, \ldots, n.$

iv) $\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty \\ \vdots \\ x_n \to \infty}} F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n) = 1.$

v)

$$\lim_{x_k \to \infty} F_{X_1,...,X_n}(x_1, ..., x_n) = F_{X_1,...,X_{k-1},X_{k+1},...,X_n}(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n).$$

Důkaz.

i)-iv) Důkaz těchto bodů probíhá obdobně jako důkaz věty 2.3.

v)

$$\begin{aligned}\lim_{x_k\to\infty} F_{X_1,...,X_n}(x_1,...,x_n) &= \lim_{x_k\to\infty} P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{X_i<x_i\}\right)\\ &= \lim_{x_k\to\infty} P\left(\bigcap_{i\neq k}^{n}\{X_i<x_i\}\cap\{X_k<x_k\}\right)\\ &= P\left(\bigcap_{i\neq k}^{n}\{X_i<x_i\}\cap\Omega\right) = P\left(\bigcap_{i\neq k}^{n}\{X_i<x_i\}\right)\\ &= F_{X_1,...,X_{k-1},X_{k+1},...,X_n}(x_1,...,x_{k-1},x_{k+1},...,x_n).\end{aligned}$$

□

Podobně jako v případě rozdělení náhodné veličiny i u rozdělení náhodného vektoru hovoříme o diskrétním a spojitém rozdělení.

Definice 3.4 *Náhodný vektor $\mathbb{X}$ má **diskrétní rozdělení**, jestliže existuje posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{x}_k\in\mathbb{R}^n$, a příslušná posloupnost kladných čísel $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ taková, že*

$$p_k = P(\mathbb{X}=\mathbf{x}_k) = P(\{\omega\in\Omega : \mathbb{X}(\omega)=\mathbf{x}_k\}) \quad a \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$$

Definice 3.5 *Náhodný vektor $\mathbb{X}=(X_1,\dots,X_n)$ má **absolutně spojité rozdělení**, jestliže existuje nezáporná funkce $f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x})$ n reálných proměnných taková, že*

$$F_{\mathbb{X}}(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbb{X}}(t_1,\dots,t_n)dt_1,\dots,dt_n. \tag{3.1}$$

*Funkci $f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x})$ nazýváme **sdruženou hustotou** rozdělení náhodného vektoru $\mathbb{X}$, nebo též sdruženou hustotou náhodných veličin X_1, …, X_n.*

*Podobně jako v definici 3.2 budeme hustotu $f_{(X_{i_1},...,X_{i_k})}(x_{i_1},...,x_{i_k})$ podvektoru $(X_{i_1},...,X_{i_k})$, kde $\{i_1,...,i_k\}\subset\{1,2,...,\}$, nazývat **marginální hustotou**.*

Poznámka 3.2 *Z předchozích definic vyplývají následující vlastnosti:*

i) Nechť náhodné veličiny X_i nabývají hodnot $\{x_{i,j}\}_{j\in J_i}$, pak

$$\begin{aligned}P(X_i=x) = \sum_{j_1\in J_1}\dots\sum_{j_{i-1}\in J_{i-1}}\sum_{j_{i+1}\in J_{i+1}}\dots\sum_{j_n\in J_n} P(&X_1=x_{1,j_1},...,X_{i-1}=x_{i-1,j_{i-1}},\\ &X_i=x, X_{i+1}=x_{i+1,j_{i+1}},...,X_n=x_{n,j_n}).\end{aligned}$$

ii) Má-li náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ spojité rozdělení se sdruženou hustotou $f_{\mathbb{X}}$, pak marginální hustota náhodné veličiny X_i je určena vztahem

$$f_{X_i}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) dx_1, \ldots, dx_{i-1} dx_{i+1}, \ldots, dx_n.$$

Poznámka 3.3 *Podobně jako v jednodimenzionálním případu (viz věta 2.6 a poznámka 2.11) platí $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n)$ pro skoro všechna $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.*

3.2 Nezávislost náhodných veličin

Analogicky k nezávislosti náhodných jevů si nyní zavedeme pojem nezávislosti u náhodných veličin.

Definice 3.6 *Náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ jsou **nezávislé**, jestliže pro všechna $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ platí*

$$P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n) = P(X_1 < x_1) \cdot P(X_2 < x_2) \cdot \ldots \cdot P(X_n < x_n), \tag{3.2}$$

tedy, že sdružená distribuční funkce $F_{\mathbb{X}}$ je rovna součinu marginálních distribučních funkcí F_{X_i}.

Poznámka 3.4 *Oproti definici 1.8 nepotřebujeme rovnost* (3.2) *ověřovat pro všechny r-tice $\{k_1, \ldots, k_r\}$, $r \leq n$. Rovnost $P(X_{k_1} < x_{k_1}, \ldots, X_{k_r} < x_{k_r}) = P(X_{k_1} < x_{k_1}) \cdot \ldots \cdot P(X_{k_r} < x_{k_r})$ plyne z limitního vztahu v) ve větě 3.1.*

Poznámka 3.5 *Rovnost* (3.2) *je ekvivalentní rovnosti*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in B_i)\right) = \Pi_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i), \quad \forall B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{3.3}$$

Platnost této ekvivalence vychází z rovnosti $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in [a_i, b_i))\right) = \Pi_{i=1}^{n} (F(b_i) - F(a_i))$ a Hopfovy věty, viz [10], kde lze nalézt i podrobnější argumentaci.

Jelikož ověřování platnosti vztahu (3.2) přímo nemusí být jednoduché, ověřuje se nazávislost náhodných veličin většinou jiným způsobem uvedeným v následující větě.

Věta 3.2 *Uvažujme náhodné veličiny $X_1, X_2, ..., X_n$.*

i) Jsou-li náhodné veličiny $X_1, X_2, ..., X_n$ diskrétní, pak jsou nezávislé právě tehdy, když

$$P(X_1 = x_1^{(i)}, \dots, X_n = x_n^{(i)}) = \Pi_{j=1}^n P(X_j = x_j^{(i)}) \tag{3.4}$$

pro všechna $\mathbf{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}),\ i = 1, 2, \dots,$ kterých může náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, ..., X_n)$ nabývat.

ii) Nechť má náhodný vektor $\mathbb{X} = (X_1, X_2 \dots, X_n)$ absolutně spojité rozdělení (náhodné veličiny X_i jsou spojité). Náhodné veličiny $X_1, X_2 \dots, X_n$ jsou vzájemně nezávislé právě tehdy, platí-li

$$f_{\mathbb{X}}(x_1, x_2 \dots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n), \tag{3.5}$$

pro skoro všechna $\mathbf{x} = (x_1, x_2 \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Důkaz.

Důkaz provedeme pro dvě náhodné veličiny X_1, X_2. Pro n náhodných veličin by důkaz probíhal obdobně.

i) Nechť platí rovnost (3.4) a $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Označme $\{x_1^{(i)}\}_{i \in I_1}$ a $\{x_2^{(j)}\}_{j \in I_2}$ hodnoty, kterých nabývají náhodné veličiny X_1 resp. X_2 a pro které platí nerovnosti $x_1^{(i)} < x_1,\ \forall i \in I_1$ a $x_2^{(j)} < x_2,\ \forall j \in I_2$. Pak

$$\begin{aligned} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) &= \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_2} P(X_1 = x_1^{(i)}, X_2 = x_2^{(j)}) \\ &= \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_2} P(X_1 = x_1^{(i)}) \cdot P(X_2 = x_2^{(j)}) \\ &= \sum_{i \in I_1} P(X_1 = x_1^{(i)}) \cdot \sum_{j \in I_2} P(X_2 = x_2^{(j)}) \\ &= \sum_{i \in I_1} P(X_1 = x_1^{(i)}) \cdot F_{X_2}(x_2) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2). \end{aligned}$$

A tedy jsou náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé.

Jsou-li náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé. Pro kratší zápis zaveďme značení

$$F_{X_1,X_2}(x_1+, x_2+) = \lim_{t \to x_1+, s \to x_2+} F_{X_1,X_2}(t, s),$$

$$F_{X_1,X_2}(x_1+, x_2) = \lim_{t \to x_1+} F_{X_1,X_2}(t, s)$$

a analogicky $F_{X_1,X_2}(x_1, x_2+)$, $F_{X_1}(x_1+)$ a $F_{X_2}(x_2+)$. Pak pro každé $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ platí

$$\begin{aligned}
P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) =& P(X_1 = x_1, X_2 \leq x_2) - P(X_1 = x_1, X_2 < x_2) \\
=& P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) - P(X_1 < x_1, X_2 \leq x_2) \\
& - (P(X_1 \leq x_1, X_2 < x_2) - P(X_1 < x_1, X_2 < x_2)) \\
=& F_{X_1,X_2}(x_1+, x_2+) - F_{X_1,X_2}(x_1, x_2+) \\
& - F_{X_1,X_2}(x_1+, x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\
=& F_{X_1}(x_1+)F_{X_2}(x_2+) - F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2+) \\
& - F_{X_1}(x_1+)F_{X_2}(x_2) + F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \\
=& (F_{X_1}(x_1+) - F_{X_1}(x_1))(F_{X_2}(x_2+) - F_{X_2}(x_2)) \\
=& P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2).
\end{aligned}$$

ii) Z rovnosti (3.5) dostaneme

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2}(t, s)dtds \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1}(t)f_{X_2}(s)dtds \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_2}(s)ds \\
&= F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2),
\end{aligned}$$

tedy jsou náhodné veličiny X_1, X_2 nezávislé.

Jsou-li náhodné veličiny X_1, X_2 nezávislé, pak z poznámky 3.3 dostaneme

$$\begin{aligned}
f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) &\overset{s.v.}{=} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} (F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1} F_{X_1}(x_1) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} F_{X_2}(x_2) \overset{s.v.}{=} f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2),
\end{aligned}$$

kde rovnost $\overset{s.v.}{=}$ značí rovnost pro skoro všechna $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, tedy rovnost platí pro všechna $\mathbf{x}$, která leží vně nějaké množiny nulové míry.

$\square$

3.3 Funkce více náhodných veličin

Věta 3.3 *Nechť X a Y jsou spojité nezávislé náhodné veličiny s rozdělením s hustotami $f_X(x)$ a $f_Y(y)$. Pak $Z = X + Y$ je spojitá náhodná veličina s rozdělením s hustotou $f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)dx$.*

Důkaz.

$$\begin{aligned}
F_Z(z) = P(Z < z) = P(X + Y < z) &= \int\int_{x+y<z} f_X(x) \cdot f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_X(x) \cdot f_Y(y)dydx = \left| \begin{array}{c} u = y + x \\ du = dx \end{array} \right| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{z} f_y(u-x)du \right) dx = \int_{-\infty}^{z}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_y(u-x)dxdu.
\end{aligned}$$

Jelikož $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z} f_Z(t)dt$, pak $f_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_y(t-x)dx$.

□

Věta 3.4 *Nechť X a Y jsou diskrétní nezávislé náhodné veličiny, X nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots$ Pak $Z = X+Y$ je diskrétní náhodná veličina, která nabývá hodnot $z_1, z_2, \ldots$ s pravděpodobnostmi*

$$P(Z = z_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)P(Y = z_i - x_i), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
P(Z = z_i) = P(X + Y = z_i) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = z_i - x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i)P(Y = z_i - x_i).
\end{aligned}$$

□

Poznámka 3.6 *V případě diskrétních náhodných veličin obvykle předpokládáme, že navývají hodnot z $\mathbb{N}_0$. Pak v předešlé větě dostáváme pro $Z = X + Y$ jednodušší tvar pravděpodobností nabývaných hodnot, a to*

$$P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Poznámka 3.7 *Pokud náhodná veličina vzniká jako součet nezávislých náhodných veličin, pak hovoříme o jejich* ***konvoluci****. V předchozích větách tedy byla náhodná veličina Z konvolucí náhodných veličin X a Y. Konvoluce ale může vzniknout i součtem více než dvou náhodných veličin.*

Poznámka 3.8 *Konvoluci diskrétních náhodných veličin jsme využili v příkladu 2.1. Konvoluce se pak využívá i v příkladech 1. a 2. v sekci 3.5.*

Věta 3.5 *Uvažujme nezávislé náhodné veličiny X a Y a nechť f a g jsou borelovsky měřitelné funkce. Pak $f(X)$ a $g(Y)$ jsou nezávislé náhodné veličiny.*

Důkaz. Využijeme vztah (3.3).

$$\begin{aligned} P(f(X) \in B_1, g(Y) \in B_2) &= P(X \in f^{-1}(B_1), Y \in g^{-1}(B_2)) \\ &= P(X \in f^{-1}(B_1)) \cdot P(Y \in g^{-1}(B_2)) \\ &= P(f(X) \in B_1) \cdot P(g(Y) \in B_2). \end{aligned}$$

□

Důsledkem předchozích vět je následující věta o součtu náhodných veličin s normálním rozdělenim.

Věta 3.6 *Uvažujme nezávislé náhodné veličiny $X_1, ..., X_n$ a nechť pro každé $i = 1, ..., n$ platí $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$. Pak $Z = \sum_{i=1}^n X_i$ má normální rozdělení s parametry $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i$ a $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i$.*

Důkaz. Důkaz provedeme ve třech krocích.

1. Ukážeme si nejdříve trvzení pro součet nezávislých náhodných veličin $X_1 \sim N(0,1)$ a $X_2 \sim N(0, \sigma^2)$. Označme $Z = X_1 + X_2$, pak z věty 3.3. dostaneme

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(z-x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(z-x)^2}{2\sigma^2}} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{x^2\sigma^2 + (z-x)^2}{2\sigma^2}} dx. \end{aligned}$$

Upravme si nejdříve výraz $\frac{x^2\sigma^2+(z-x)^2}{2\sigma^2}$ následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} \frac{x^2\sigma^2 + (z-x)^2}{2\sigma^2} &= \frac{x^2(\sigma^2+1) - 2xz + z^2}{2\sigma^2} \\ &= \frac{\left(x\sqrt{\sigma^2+1} - \frac{z}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)^2 + z^2\left(1 - \frac{1}{\sigma^2+1}\right)}{2\sigma^2} \\ &= \frac{\left(x\sqrt{\sigma^2+1} - \frac{z}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)^2}{2\sigma^2} + \frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}. \end{aligned}$$

S využitím substituce $t = x\sqrt{\sigma^2+1}$ dostaneme

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\frac{\left(x\sqrt{\sigma^2+1}-z/\sqrt{\sigma^2+1}\right)^2}{2\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}} \cdot \int_R \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-z/\sqrt{\sigma^2+1})^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2+1}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2(\sigma^2+1)}}. \end{aligned}$$

Tedy $Z \sim N(0, \sigma^2+1)$. V poslední rovnosti jsme využili faktu, že funkce $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-z/\sqrt{\sigma^2+1})^2}{2\sigma^2}}$ je hustota normálního rozdělení se střední hodnotou $z/\sqrt{\sigma^2+1}$ a rozptylem σ^2. Integrál této funkce přes celé $\mathbb{R}$ je tedy roven jedné.

2. Nechť $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ a $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Označme $\tilde{X}_1 = \frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1}$ a $\tilde{X}_2 = \frac{X_2-\mu_2}{\sigma_1}$, pak $\tilde{X}_1 \sim N(0,1)$, $\tilde{X}_2 \sim N(0, \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})$ (dle věty 2.11) a $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2$ jsou nezávislé dle věty 3.5.

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z<z) &= P(X_1+X_2<z) = P(X_1-\mu_1+X_2-\mu_2 < z-\mu_1-\mu_2) \\ &= P\left(\frac{X_1-\mu_1+X_2-\mu_2}{\sigma_1} < \frac{z-\mu_1-\mu_2}{\sigma_1}\right) \\ &= P\left(\tilde{X}_1+\tilde{X}_2 < \frac{z-\mu_1-\mu_2}{\sigma_1}\right) = P\left((\tilde{X}_1+\tilde{X}_2)\cdot\sigma_1+\mu_1+\mu_2<z\right). \end{aligned}$$

Z bodu 1. víme, že součet náhodných veličin $\tilde{X}_1+\tilde{X}_2$ má rozdělení $N(0, 1+\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2})$. Dle věty 2.11 pak součet $X_1+X_2 = (\tilde{X}_1+\tilde{X}_2)\cdot\sigma_1+\mu_1+\mu_2$ má rozdělení $N(\mu,\sigma^2)$, kde $\mu = \mu_1+\mu_2$ a $\sigma^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2$.

3. Důkaz dokončíme indukcí. Pro $n=2$ máme důkaz hotov. Pokud tvrzení platí pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, pak $X_1+X_2+...+X_{n+1} = (X_1+...X_n)+X_{n+1}$. Součet $(X_1+...X_n)$ má normální rozdělení, tedy $(X_1+...X_n)+X_{n+1}$ má normální rozdělení z bodu 2.

□

3.4 Charakteristiky náhodného vektoru

3.4.1 Kovariance a korelační koeficient

Příklad 3.1 *Hráč basketbalu hází dva trestné hody, každý z nich znamená bod. V prvním hodu má úspěšnost* 50%, *úspěšnost druhého hodu je ale ovlivněna výsledkem hodu prvního. Pokud se hráč při prvním hodu trefí, pak má v druhém hodu úspěšnost* 70%. *Je-li ale v prvním hodu neúspěšný, pak jeho úspěšnost ve druhém hodu klesne na* 30%. *Jaký je rozptyl počtu bodů, který tento hráč získá během trestného střílení? Změnil by se tento rozptyl, pokud by výsledek druhého hodu nebyl ovlivněn prvním hodem?*

Řešení:
Označme $X_i = 1$ v případě, že je i-tý hod úspešný, a $X_i = 0$ v opačném případě. Pak

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 0) &= P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}, \\
P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 1, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 0) \\
&= P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 0 | X_1 = 1) + P(X_1 = 0) \cdot P(X_2 = 0 | X_1 = 0) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 0.3 + \frac{1}{2} \cdot 0.7 = \frac{1}{2}, \\
P(X_2 = 1) &= 1 - P(X_2 = 0) = \frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

tedy $X_i \sim Alt(\frac{1}{2})$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{var}(X_1 + X_2) &= \mathbb{E}(X_1 + X_2)^2 - (\mathbb{E}(X_1 + X_2))^2 \\
&= \mathbb{E}(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) - ((\mathbb{E}X_1)^2 + 2\mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2 + (\mathbb{E}X_2)^2) \\
&= \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1)^2 + \mathbb{E}X_2^2 - (\mathbb{E}X_2)^2 + 2(\mathbb{E}X_1X_2 - \mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2) \\
&= \mathrm{var}X_1 + \mathrm{var}X_2 + 2(\mathbb{E}X_1X_2 - \mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2).
\end{aligned}
$$

Jalikož mají X_1 i X_2 alternativní rozdělení s parametrem $p = \frac{1}{2}$, pak $\mathrm{var}X_1 = \mathrm{var}X_2 = 0.25$ a $\mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.25$. Potřebujeme tedy už určit pouze hodnotu výrazu $\mathbb{E}X_1X_2$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X_1X_2 =& 0 \cdot 0 \cdot P(X_1 = 0, X_2 = 0) + 0 \cdot 1 \cdot P(X_1 = 0, X_2 = 1) \\
&+ 1 \cdot 0 \cdot P(X_1 = 1, X_2 = 0) + 1 \cdot 1 \cdot P(X_1 = 1, X_2 = 1) \\
=& 0 \cdot (P(X_1 = 0, X_2 = 0) + P(X_1 = 0, X_2 = 1) + P(X_1 = 1, X_2 = 0)) \\
&+ 1 \cdot P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1 | X_1 = 1) \\
=& \frac{1}{2} \cdot 0.7 = 0.35,
\end{aligned}
$$

tedy

$$
\mathrm{var}(X_1 + X_2) = 0.25 + 0.25 + 2(0.35 - 0.25) = 0.7.
$$

Uvažujme nyní situaci, že druhý hod nebude ovlivněn výsledkem prvního hodu. Pak se v celém výpočtu rozptylu $\mathrm{var}(X_1 + X_2)$ změní pouze hodnota výrazu $\mathbb{E}X_1X_2$. V tomto případě dostaneme

$$\mathbb{E}X_1X_2 = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1 | X_1 = 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.25,$$

a tedy

$$\mathrm{var}(X_1 + X_2) = 0.25 + 0.25 + 2(0.25 - 0.25) = 0.5.$$

Povšimněme si, že v předchozím příkladě nám v případě nezávislých hodů vyšla rovnost $\mathrm{var}(X_1 + X_2) = \mathrm{var}X_1 + \mathrm{var}X_2$, jelikož výraz $\mathbb{E}X_1X_2 - \mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2$ byl roven nule. Zdá se tedy, že hodnota výrazu $\mathbb{E}X_1X_2 - \mathbb{E}X_1\mathbb{E}X_2$ by mohla být použita jako charakteristika vztahu mezi náhodnými veličinami X_1 a X_2.

Definice 3.7 *Uvažujme náhodné veličiny X a Y. Nechť $\mathbb{E}X^2 < \infty$ a $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Pak výraz*

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

nazveme ***kovariancí*** *náhodných veličin X a Y.*

Poznámka 3.9 *Z definice přímo nahlédneme, že $\mathrm{cov}(X, X) = \mathrm{var}X$.*

Věta 3.7 *Uvažujme náhodné veličiny X a Y a reálná čísla $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Pak $\mathrm{cov}(aX + b, cY + d) = ac \cdot \mathrm{cov}(X, Y)$.*

Důkaz.

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(aX + b, cY + d) &= \mathbb{E}((aX + b - \mathbb{E}(aX + b)) \cdot (cY + d - \mathbb{E}(cY + d))) \\ &= \mathbb{E}((aX - a\mathbb{E}X) \cdot (cY - c\mathbb{E}Y)) = ac \cdot \mathrm{cov}(X, Y).\end{aligned}$$

□

Platí obecně, že kovariance nezávislých náhodných veličin je nulová (tak, jak tomu bylo v příkladu 3.1)? Odpověď je prakticky zformulovaná v následující větě o střední hodnotě součinu nezávislých náhodných veličin.

Věta 3.8 *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny s konečnou střední hodnotou, pak $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.*

Důkaz. Nechť jsou X a Y spojité náhodné veličiny s hustotou $f_X(x)$, resp. $f_Y(y)$. Z využitím věty 3.2, ii) dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}XY &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy \cdot f_X(x) \cdot f_Y(y)dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)dx \cdot \int_{\mathbb{R}} f_Y(y)dx = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.\end{aligned}$$

Analogicky s využitím věty 3.2, i) dostaneme stejný závěr i pro diskrétní náhodné veličiny X a Y.

□

Důsledek 3.9 *Nechť X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny, pro které $\mathbb{E}X^2 < \infty$ a $\mathbb{E}Y^2 < \infty$. Pak* $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$.

Důkaz.

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0.$$

□

Mezi nezávislostí a nulovostí kovariance však není ekvivalence, jak ukazuje následující příklad.

Příklad 3.2 *Uvažujme $X \sim R(-1,1)$ a $Y = X^2$. Pak*

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = \mathbb{E}X^3 - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^2.$$

Spočítáme tedy postupně $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}X^2$ a $\mathbb{E}X^3$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \int_{-1}^{1} x \cdot f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x}{2}dx = 0, \\ \mathbb{E}X^2 &= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{2}dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3}, \\ \mathbb{E}X^3 &= \int_{-1}^{1} x^3 \cdot f_X(x)dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{2}dx = 0.\end{aligned}$$

Tedy

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathbb{E}X^3 - \mathbb{E}X\mathbb{E}X^2 = 0 - 0 \cdot \frac{1}{3} = 0.$$

Kovariance náhodných veličin X a Y je nulová, přitom je hodnota náhodné veličiny Y přímo určena hodnotou náhodné veličiny X, tedy tyto náhodné veličiny nejsou nezávislé. Preciznějі matematicky lze nezávislost vyvrátit třeba tím, že

$$P(X < -0.5, Y < 0.25) = 0 \neq P(X < -0.5) \cdot P(Y < 0.25) = 0.25 \cdot 0.5 = 0.125,$$

což je ve sporu s definicí nezávislosti.

V řešení příkladu 3.1 jsme odvodili vztah

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}X + \mathrm{var}Y + 2\mathrm{cov}(X, Y).$$

Tento vztah se dá zobecnit pro součet n náhodných veličin $X_1, ..., X_n$ následujícím způsobem.

Věta 3.10 *Uvažujme náhodné veličiny $X_1, ..., X_n$, pak*

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}X_i + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(X_i, X_j). \tag{3.6}$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right)^2 \\
&= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)^2 + 2\sum_{i<j}(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i)^2 + 2\sum_{i<j} \mathbb{E}(X_i - \mathbb{E}X_i)(X_j - \mathbb{E}X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}X_i + 2\sum_{i<j} \mathrm{cov}(X_i, X_j).
\end{aligned}$$

□

Důsledek 3.11 *Nechť $X_1, ..., X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny, pak*

$$\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var}X_i.$$

Příklad 3.3 *Uvažujme nezávislé náhodné veličiny $X_1, ..., X_n$ splňující $X_i \sim Alt(p)$. Označme $X = \sum_{i=1}^n X_i$ (tj. X má binomické rozdělení, viz poznámka 2.21). Rozptyl náhodné veličiny X lze spočítat přímo ze znalosti rozptylu alternativního rozdělení a s využitím předchozího důsledku jako*

$$\mathrm{vax} X = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{var} X_i = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

Poznámka 3.10 *Z věty 3.7 plyne, že velikost kovariance nezávisí pouze na vztahu náhodných veličin X a Y, ale i jejich rozptylu. Abychom dostali nějakou charakteristiku, která vypovídá primárně o vztahu náhodných veličin X a Y, je potřeba kovarianci vhodně vynormovat. Tato úvaha nás vede k následující definici.*

Definice 3.8 *Uvažujme náhodné veličiny X a Y, pro něž platí $\mathbb{E}X^2 < \infty$, $\mathbb{E}Y^2 < \infty$, $\mathrm{var}X > 0$ a $\mathrm{var}Y > 0$. Pak*

$$\mathrm{corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{var}X} \cdot \sqrt{\mathrm{var}Y}},$$

nazýváme ***korelační koeficient*** *náhodných veličin X a Y.*

Věta 3.12 *Uvažujme náhodné veličiny X a Y takové, že existuje jejich korelační koeficient $\mathrm{corr}(X, Y)$. Pak platí:*

i) $-1 \leq \mathrm{corr}(X, Y) \leq 1$,

ii) jsou-li náhodné veličiny X a Y nezávislé, pak $\mathrm{corr}(X, Y) = 0$,

iii) je-li $Y = a \cdot X + b$, $a \neq 0$, pak $\mathrm{corr}(X, Y) = \mathrm{sign}(a)$.

Důkaz.

i) Uvažujme libovolné $t \in \mathbb{R}$, pak

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathrm{var}\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathrm{var}X}} + t\frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{\mathrm{var}Y}}\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\frac{(X - \mathbb{E}X)^2}{\mathrm{var}X} + 2t \cdot \frac{(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)}{\sqrt{\mathrm{var}X} \cdot \sqrt{\mathrm{var}Y}} + t^2\frac{(Y - \mathbb{E}Y)^2}{\mathrm{var}Y}\right) \\ &= 1 + 2t \cdot \mathrm{corr}(X, Y) + t^2. \end{aligned}$$

Jelikož $0 \leq 1 + 2t\mathrm{corr}(X, Y) + t^2$, pak musí být diskriminant kvadratické rovnice $t^2 + 2\mathrm{corr}(X, Y) \cdot t + 1 = 0$ nekladný (neboť existuje maximálně jeden reálný kořen této rovnice), tedy $4(\mathrm{corr}(X, Y))^2 - 4 \leq 0$, tedy $-1 \leq \mathrm{corr}(X, Y) \leq 1$.

ii) Plyne z důsledku 3.9.

iii) Využijeme vztah z poznámky 3.9 a věty 2.8 a 2.8.

$$\begin{aligned}\operatorname{corr}(X,Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X, aX+b)}{\sqrt{\operatorname{var}X}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(aX+b)}} = \frac{a\cdot\operatorname{cov}(X,X)}{\sqrt{\operatorname{var}X}\cdot\sqrt{a^2\cdot\operatorname{var}X}}\\ &= \frac{a\cdot\operatorname{var}X}{\sqrt{a^2\cdot\operatorname{var}X}} = \operatorname{sign}(a).\end{aligned}$$

□

Poznámka 3.11 *Koeficient korelace lze tedy interpretovat jako míru lineární závislosti, kde nezávislost nám dává nulovou hodnotu korelačního koeficientu a čím je absolutní hodnota korelačního koeficientu blíže jedné, tím větší je lineární závislost sledovaných veličin.*

Definice 3.9 *Je-li* $\operatorname{corr}(X,Y)=0$*, říkáme, že náhodné veličiny* X *a* Y *jsou* ***nekorelované****.*

3.4.2 Charakteristiky vícedimenzionálního náhodného vektoru

Analogicky charakteristikám náhodné veličiny u náhodného vektoru zavádíme následující základní charakteristiky.

Definice 3.10 *Uvažujme náhodný vektor* $\mathbb{X}=(X_1,...,X_n)$*.*

i) ***Střední hodnotou náhodného vektoru*** $\mathbb{X}$ *nazýváme vektor středních hodnot jeho složek, tj.*

$$\mathbb{E}\mathbb{X}=(\mathbb{E}X_1,...,\mathbb{E}X_n).$$

ii) ***Varianční maticí náhodného vektoru*** $\mathbb{X}$ *nazýváme matici* $\operatorname{var}\mathbb{X}$ *typu* $n\times n$ *s prvky*

$$\operatorname{cov}(X_i,X_j)=\mathbb{E}(X_i-\mathbb{E}X_i)(X_j-\mathbb{E}X_j),\quad 1\le i,j\le n.$$

iii) ***Korelační maticí náhodného vektoru*** $\mathbb{X}$ *nazýváme matici* $\operatorname{corr}\mathbb{X}$ *s prvky*

$$\operatorname{corr}(X_i,X_j)=\frac{\operatorname{cov}(X_i,X_j)}{\sqrt{\operatorname{var}X_i}\sqrt{\operatorname{var}X_j}},\quad 1\le i,j\le n.$$

Poznámka 3.12 *Analogicky větám o střední hodnotě a rozptylu náhodných veličin 2.7, resp. 2.8, lze formulovat a dokázat podobné věty o střední hodnotě a variační matici pro náhodný vektor.*

3.5 Cvičení

1. Nechť X_1 má Poissonovo rozdělení s parametrem λ_1, X_2 má Poissonovo rozdělení s parametrem λ_2 a X_1, X_2 jsou nezávislé náhodné veličiny. Určete rozdělení náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

2. Na autě jsou prováděny dvě nezávislé opravy a obě opravy budou hotovy do jedné hodiny. Předpokládejme, že obě opravy jsou v takové fázi, že rozdělení času do ukončení konkrétní opravy je rovnoměrné.

   a) Jaká je střední hodnota a rozptyl čekání na ukončení první opravy?

   b) Jaké je rozdělení doby do ukončení obou oprav?

   c) Určete pravděpodobnost, že obě opravy budou ukončeny do 45 minut.

   d) Uvažujme situaci, kdy opravy nebudou prováděny současně, ale postupně. Jaké rozdělení bude mít čas ukončení obou oprav?

   e) Uvažujme nyní n nezávislých oprav, jejichž doba má rovnoměrné rozdělení $R(0, 60)$. Nechť T_1 je čas, kdy bude dokončena první z oprav, a T_2 čas, kdy bude dokončena poslední z oprav. Jaké je rozdělení náhodných veličin T_1 a T_2?

3. Nechť náhodný vektor (X, Y) má rovnoměrné rozdělení na množině $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   a) Určete sdruženou hustotu rozdělení vektoru (X, Y).

   b) Určete marginální hustotu $f_X(x)$ rozdělení náhodné veličiny X.

   c) Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?

4. Nechť má náhodný vektor (X, Y) rozdělení s hustotou
   $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2+2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}}$ na $\mathbb{R}^2$.

   a) Určete rozdělení náhodné veličiny X.

   b) Jsou náhodné veličiny X a Y nezávislé?

5. Oštěpařka Anna má průměrnou délku hodu 67 m se směrodatnou odchylkou 6 m. Oštěpařka Barbora má průměrnou délku hodu 75 m se směrodatnou odchylkou 3 m. Předpokládejme, že délky hodů mají nezávislá normální rozdělení. Spočtěte pravděpodobnost, že při jednom hodu hodí Anna dál než Barbora. (převzaté z [14])

6. Uvažujme nezávislé náhodné veličiny X_i, kde $X_i \sim R(0, a)$.

   a) Nechť $Y = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$. Určete $\mathbb{E}Y$ a $\mathrm{var}Y$.
   b) Nechť $Z = \max\{X_1, ..., X_n\}$. Určete $\mathbb{E}Z$ a $\mathrm{var}Z$.
   c) Zamyslete se nad výsledky z částí a) a b). Co se lze domnívat o konvergnenci náhodných veličin Y a Z pro $n \to \infty$?

Kapitola 4

Limitní věty

„Ve snaze dozvědět se o přírodě co nejvíce moderní fyzika zjistila, že určité věci nelze nikdy s jistotou poznat. Mnoho z nich musí vždy zůstat nejistých. Maximálně můžeme určit jejich pravděpodobnost.“

—Richard P. Feynman

4.1 Konvergence náhodných veličin

Příklad 4.1 *Vraťme se nyní k příkladu 3 ze cvičení 1.3.3. Uvažujme hru, která skončí v daném kole, pokud na toto kolo hry došlo, s pravděpodobností $\frac{10}{36}$. Označme $X_n = 1$, jesliže hra skončila do n-tého kola (včetně), a $X_n = 0$ v opačném případě. Skončí hra v konečném čase s pravděpodobností jedna?*

Řešení:
Ze zadání dostáváme:

$$P(X_n = 0) = \left(\frac{26}{36}\right)^n,$$

$$P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = 1 - \left(\frac{26}{36}\right)^n.$$

Označme $X = 1$, jestliže hra skončila v konečném čase (tedy pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $X_n = 1$), a $X = 0$, pokud hra v konečném čase neskončí. Jelikož $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1) = 1$, pak zřejmě $P(X = 1) = 1$ a $P(X = 0) = 0$.

Položme si následující otázky. Je náhodná veličina X z předchozího příkladu limitou nějaké posloupnosti náhodných veličin $\{X_n\}$? Jak zadefinovat limitu posloupnosti náhodných veličin $\{X_n\}$?

Jelikož je náhodná veličina zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ a zároveň nás v mnoha případech zajímá pouze rozdělení náhodné veličiny, máme hned několik možností, jak limitu posloupnosti náhodných veličin definovat. Můžeme se například inspirovat zavedením konvergence posloupností funkcí, viz kap. 14 v [36], můžeme se zaměřit na rozdělení náhodných veličin a zadefinovat konvergenci pomocí rozdělení nebo můžeme na prostoru náhodných veličin zavést metriku (například pomocí absolutních momentů) a využít myšlenku konvergence posloupnosti v obecných metrických prostorech, viz kap. 12 v [36]. Tyto přístupy vedou k různým definicím limity posloupnosti náhodných veličin $\{X_n\}$.

Zkusme se nejdříve inspirovat bodovou konvergencí posloupností funkcí, tj. situací, kdy $f_n \underset{M}{\to} f \Leftrightarrow \forall x \in M : f_n(x) \to f(x)$. V řeči náhodných veličin bychom dostali vztah $\forall \omega \in \Omega : X_n(\omega) \to X(\omega)$. Jelikož ale změny hodnot náhodné veličiny na množině nulové míry v teorii pravděpodobnosti většinou zanedbáváme, budeme požadovat splnění podmínky $X_n(\omega) \to X(\omega)$ na množině s pravděpodobností jedna, nikoliv nutně na celém Ω. To nás přivádí k následující definici.

Definice 4.1 *Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje **skoro jistě** k náhodné veličině X, jestliže existuje množina $N \in \mathcal{F}$ splňující $P(N) = 0$ taková, že $X_n(\omega) \to X(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega \setminus N$. Používáne značení $X_n \overset{s.j.}{\to} X$.*

Poznámka 4.1 *Předchozí definici můžeme také zapsat následujícím způsobem:*

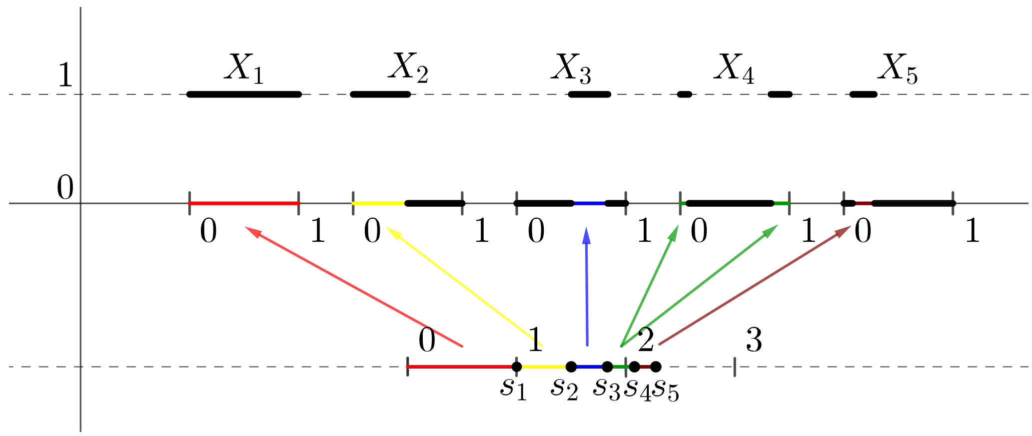
$$X_n \overset{s.j.}{\to} X \Leftrightarrow P(\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)) = 1.$$

Podívejme se nyní na následující technický příklad.

Příklad 4.2 *Uvažujme $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$ a $P = \mu$, kde μ je lebesgueova míra na $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$. Pak $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je pravděpodobnostní prostor.*

Označme $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ n-tý částečný součet harmonické řady a $\tilde{s}_n = s_n - \lfloor s_n \rfloor$, kde $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x. Dále pak uvažujme $M_1 = [0,1]$ a pro $n > 1$ označme $M_n = [\tilde{s}_{n-1}, \tilde{s}_n]$ pro $\tilde{s}_n > \tilde{s}_{n-1}$ a $M_n = [0,1] \setminus (\tilde{s}_n, \tilde{s}_{n-1} \rfloor)$ pro $\tilde{s}_n < \tilde{s}_{n-1}$. Jelikož je množina všech elementárních jevů Ω intervalem $[0,1]$, budeme pro elementární jevy používat značení $x \in [0,1]$ místo $\omega \in \Omega$). Zaveďme náhodné veličiny X_n jako

$$\begin{aligned} X_n(x) &= 1, & x &\in M_n, \\ X_n(x) &= 0, & x &\in [0,1] \setminus M_n. \end{aligned}$$



Obrázek 4.1: Na obrázku jsou znázorněny množiny M_1 ... červená barva, M_2... žlutá barva, M_3... modrá barva, M_4... zelená barva a M_5... hnědá barva a dále náhodné veličiny $X_1, ..., X_5$.

viz obrázek 4.1.

Dostaneme $X_n \sim Alt(\frac{1}{n})$, jelikož lebesgueova míra množiny M_n je $\mu(M_n) = \frac{1}{n}$ a vně množiny M_n nabývá náhodná veličina X_n hodnoty nula. Poslopnost $\{X_n(x)\}$ ale nekonverguje pro žádný elementární jev $x \in [0, 1]$. To vychází z faktu, že součet harmonické řady je nekonečný, a tedy v každé posloupnosti $\{X_n(x)\}$ je nekonečně mnoho jedniček i nul. Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ tedy nekonverguje s.j. k žádné náhodné veličině.

V předchozím příkladu jsme uvedli posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$, kde $X_n \sim Alt(\frac{1}{n})$, ale tato posloupnost nemá (ve smyslu konvergence skoro jistě) limitu. Pokud bychom se zaměřili pouze na rozdělení náhodných veličin X_n, pak limitní rozdělení by měla náhodná veličina X, která se skoro jistě rovná nule. Lze ale definovat jinou limitu posloupnosti $\{X_n\}$ tak, aby posloupnost náhodných veličin z předchozího příkladu konvergovala k již zmíněné náhodné veličině X a přitom tato limita musela být definovaná na stejném pravděpodobnostní prostoru? Odpoveď na tuto otázku nám dává následující definice.

Definice 4.2 *Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje* ***v pravděpodobnosti*** *k náhodné veličině X, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$. Používáne značení $X_n \xrightarrow{p} X$.*

Vraťme se ještě k příkladu 4.2. Označme X náhodnou veličinu (na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ z tohoto příkladu), pro kterou platí $P(X = 0) = 1$. Pak $\forall \varepsilon > 0 : P(|X_n - X| > \varepsilon) = \frac{1}{n}$, tedy $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, a proto $X_n \xrightarrow{p} X$.

V předchozím textu jsme se dvakrát zmínili, že by bylo možné zadefinovat konvergenci jen pomocí rozdělení. Jelikož je rozdělení jednoznačně určeno distribuční funkcí, zavedeme další typ konvergenci právě pomocí distribučních funkcí.

Definice 4.3 *Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konverguje **v distribuci** k náhodné veličině X, jestliže pro distribuční funkce $F_{X_n}(x)$ a $F_X(x)$ náhodných veličin X_n, resp. X platí, že $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ v každém bodě x spojitosti limitní distribuční funkce $F_X(x)$. Používáne značení $X_n \xrightarrow{d} X$.*

Poznámka 4.2 *Někdy se místo pojmu konvergence v distribuci používá pojem **slabá konvergence**, viz [4].*

Proč v předchozí definici nepožadujeme konvergenci $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ pro všechna reálná čísla x, ale pouze pro body spojitosti distribuční funkce $F_X(x)$, ukazuje následující příklad.

Příklad 4.3 *Uvažujme spojité náhodné veličiny X_n s hustotami*

$$
\begin{aligned}
f_{X_n}(x) &= nx + n^2, && x \in [-\frac{1}{n}, 0],\\
&= -nx + n^2, && x \in (0, \frac{1}{n}],\\
&= 0, && x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}].
\end{aligned}
$$

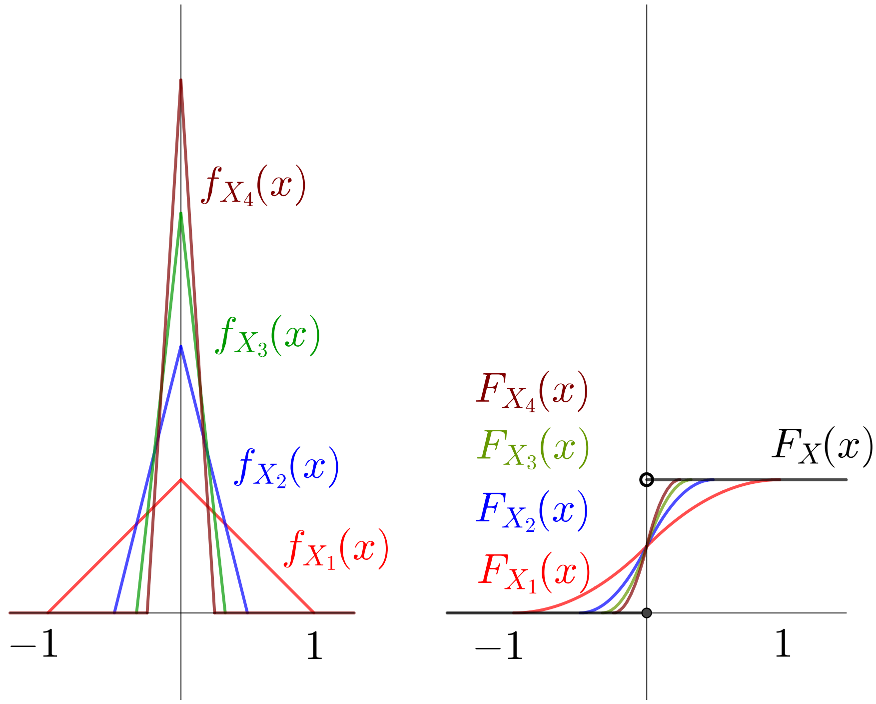
Grafy těchto hustot i příslušných distribučních funkcí pro náhodné veličiny $X_1, ..., X_4$ jsou zobrazeny v obrázku 4.2.

Uvažujme situaci, kdy jsou náhodné veličiny $X_1, X_2, ...$ definované na stejném pravděpodobnostním prostotu $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a nechť náhodná veličina X, která je také definovaná na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, splňuje $P(X = 0) = 1$. Ověříme, že $X_n \xrightarrow{p} X$.

Mějme $\varepsilon > 0$, pak $\forall n > 1/\varepsilon$ je $P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$, jelikož náhodná veličina X_n nabývá hodnout z intervalu $[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Tedy $X_n \xrightarrow{p} X$.

Posloupnost distribučních funkcí $\{F_{X_n}(x)\}$ konverguje bodově k funkci

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}(x) &= 0, && x < 0,\\
&= \frac{1}{2}, && x = 0,\\
&= 1, && x > 0.
\end{aligned}
$$



Obrázek 4.2: Na obrázku vlevo jsou znázorněny hustoty $f_{X_1}(x), f_{X_2}(x), f_{X_3}(x)$ a $f_{X_4}(x)$ náhodných veličin X_1, X_2, X_3 a X_4. Na pravém obrázku jejich distribuční funkce $F_{X_1}(x), F_{X_2}(x), F_{X_3}(x), F_{X_4}(x)$ a limitní distribuční funkce $F(x)$.

Funkce $\tilde{F}(x)$ není distribuční funkcí žádného rozdělení, neboť není zleva spojitá v nule (věta 2.3), ale tato funkce se liší od distribuční funkce $F(x)$ náhodné veličiny X právě pouze v bodě nula. Tedy $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ ve všech bodech spojitosti funkce $F(x)$ a proto $X_n \xrightarrow{p} X$.

Poznámka 4.3 *Pokud bychom v definici 4.3 požadovali splnění rovnosti $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ všude, pak by libovolné spojité náhodné veličiny, jejichž limitní rozdělení je diskrétní (či má alespoň nespojitou distribuční funkci), neměly limitu v distribuci.*

Příklad 4.4 *Uvažujme nezávislé náhodné veličiny X_i splňující $X_i \sim Alt(p)$. Jelikož mají tyto náhodné veličiny stejné rozdělení, tedy i stejnou distribuční funkci, konvergují v distribuci k náhodné veličině $X \sim Alt(p)$. Na limitní náhodnou veličinu X máme pouze požadavek, aby měla alternativní rozdělení s parametrem p. Pro která*

$\omega \in \Omega$ však platí $X(\omega) = 1$ a pro která je $X(\omega) = 0$, to již není v konvergenci v distribuci podstatné. Uvažujme tedy náhodnou veličinu X takovou, že je nezávislá s náhodnou veličinou X_n (pro všechna n). Mějme $1 > \varepsilon > 0$, pak

$$\begin{aligned} P(|X_n - X| > \varepsilon) &= P(X_n = 1, X = 0) + P(X_n = 0, X = 1) \\ &= P(X_n = 1) \cdot P(X = 0) + P(X_n = 0) \cdot P(X = 1) = 2p(1-p), \end{aligned}$$

tedy $\{X_n\}$ nekonverguje k X v pravděpodobnosti.

Poznámka 4.4 *Zatímco u konvergence skoro jistě a v pravděpodobnosti požadujeme, aby náhodné veličiny $X_1, X_2, ...$ a X byly definovány na stejném pravděpodobnostním prostoru, tento předpoklad striktně vzato v definici konvergence v distribuci není.*

Poslední typ konvergence, který si uvedeme, vychází v podstatě z myšlenky konvergence posloupnosti v metrických prostorech. Použijeme L^p-normu $||X||_p = \sqrt[p]{\mathbb{E}|X|^p}$ (pro $p \geq 1$), viz kap. 10 v [18], z ní odvozenou pseudometriku $d(X,Y) = ||X - Y||_p$ a pak myšlenku konvergence v metrických prostorech s touto pseudometrikou.

Definice 4.4 *Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost náhodných veličin a $1 \leq p < \infty$. Pak $\{X_n\}$ konverguje **podle středu stupně** p (nebo také **v p-té střední hodnotě**) k náhodné veličině X, jestliže $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0$. Používáme značení $X_n \xrightarrow{L^p} X$.*

Poznámka 4.5 *V teorii míry se místo pojmu konvergence podle středu stupně p používá pojem **konvergence v** L^p.*

Poznámka 4.6 *Že je $d(X,Y) = ||X - Y||_p$ pouze pseudometrikou a ne metrikou, plyne ze skutečnosti, že $d(X,Y) = 0$ pro každé dvě náhodné veličiny X, Y, které se liší hodnotami pouze na množině míry nula. Podrobnější diskusi lze nalézt v kap. 10 v [18].*

Uveďme si nyní větu, kterou později použijeme k ukázání vztahu mezi konvergencí v pravděpodobnosti a podle středu. Tato věta se nazýva Čebyševova nerovnost po ruském matematikovi Pafnuty Lvovich Chebyshevovy (1821-1894), i když její autorství lze přisuzovat i francouskému matematikovi Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) [29].

Věta 4.1 (Čebyševova nerovnost) *Uvažujme náhodnou veličinu X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

i) Mějme $r > 0$ a nechť $\mathbb{E}|X|^r < \infty$, pak pro každé $\varepsilon > 0$

$$P(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^r}{\varepsilon^r}. \tag{4.1}$$

ii) Je-li $\mathbb{E}X^2 < \infty$, pak pro každé $\varepsilon > 0$

$$P(|X - \mathbb{E}X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{var}X}{\varepsilon^2}. \tag{4.2}$$

Důkaz.

i)

$$\mathbb{E}|X|^r = \int_{\mathbb{R}} |x|^r dF_X(x) \geq \int_{|x| \geq \varepsilon} |x|^r dF_X(x) \geq \varepsilon^r \int_{|x| \geq \varepsilon} 1 dF_X(x) = \varepsilon^r P(|X| \geq \varepsilon)$$

ii) Pro náhodnou veličinu $(X - \mathbb{E}X)$ a $r = 2$ dostaneme tvrzení přímo z nerovnosti 4.1.

□

Příklad 4.5 *Kolikrát musíme hodit mincí, aby pravděpodobnost, že se bude relativní četnost líců lišit od jedné poloviny o méně než 0.1, byla alespoň 0.95?*

Řešení:
Nechť $X_i = 1$, pokud v i-tém hodu padl líc, a $X_i = 0$ v opačném případě. Označme $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ relativní četnost líců. Jelikož má $\sum_{i=1}^n X_i$ binomické rozdělení s parametry $(n, 0.5)$, je $\mathbb{E}\bar{X}_n = p = 0.5$ a $\mathrm{var}\bar{X}_n = \frac{p(1-p)}{n} = \frac{1}{4n}$. Dle zadání chceme určit takové n, aby platilo

$$P(|\bar{X}_n - 0.5| < 0.1) \geq 0.95. \tag{4.3}$$

Použijeme Čebyševovu nerovnost (4.2).

$$\begin{aligned}
P(|\bar{X}_n - \mathbb{E}\bar{X}_n| \geq \varepsilon) &\leq \frac{\mathrm{var}\bar{X}_n}{\varepsilon^2} \\
P(|\bar{X}_n - 0.5| \geq 0.1) &\leq \frac{\frac{1}{4n}}{0.1^2} \\
P(|\bar{X}_n - 0.5| < 0.1) &\geq 1 - \frac{\frac{1}{4n}}{0.1^2}
\end{aligned}$$

Porovnáním pravých stran poslední získané nerovnosti a nerovnosti 4.3 dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{4n}}{0.1^2} &\leq 0.05 \\ \frac{1}{4 \cdot 0.1^2 \cdot 0.05} &\leq n \\ 500 &\leq n. \end{aligned}$$

Musíme tedy hodit alespoň 500 krát mincí.

V předchozí části jsme si ukázali, že z konvergence v pravděpodobnosti neplyne konvergence skoro jistě (příklad 4.2) a z konvergence v distribuci neplyne ani konvergence v pravděpodobnosti, ani skoro jistě (poznámka 4.4). Jaké implikace ale platí nám říká následující věta.

Věta 4.2 *Uvažujme pravděpodobnostní prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *a na něm definované náhodné veličiny* $X_1, X_2, \ldots$ *a* X*. Pak platí:*

i) $X_n \xrightarrow{s.j.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$,

ii) $X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$,

iii) pro každé $p > r \geq 1$ *platí* $X_n \xrightarrow{L_p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{L_r} X$,

iv) $X_n \xrightarrow{L_p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$.

Důkaz.

i) $X_n \xrightarrow{s.j.} X$, tedy existuje množina $N \in \mathcal{F}$ splňující $P(N) = 0$ taková, že pro všechna $\omega \in \Omega \setminus N$ platí : $X_n(\omega) \to X(\omega)$.

Mějme $\varepsilon > 0$ a označme $A_n = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$, $B_n = \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$ a $B_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i$. Je-li $\omega \in B_\infty$, pak pro každé $n_0 \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ takové, že $\omega \in A_n$, tedy $|X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon$, a proto $\{X_n(\omega)\}$ nekonverguje k $X(\omega)$. Z toho plyne, že $\omega \in N$, tedy $B_\infty \subset N$, a proto $P(B_\infty) = 0$.

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \leq \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B_\infty) = 0,$$

tedy $X_n \xrightarrow{p} X$.

Poznamenejme, že nerovnost $P(A_n) \leq P(B_n)$ plyne z faktu, že $A_n \subset B_n$ a rovnost $\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P(B_\infty)$ z lematu 2.2.

ii) Uvažujme nejdříve dvě libovolné náhodné veličiny Y, Z. Nechť $\varepsilon > 0$ a $x \in \mathbb{R}$. Rozdělme jev $\{Y < x\}$ na dva disjunktní podjevy $(\{Y < x\} \cap \{Z < x + \varepsilon\})$ a $(\{Y < x\} \cap \{Z \geq x + \varepsilon\})$. Jelikož $(\{Y < x\} \cap \{Z < x + \varepsilon\}) \subset \{Z < x + \varepsilon\}$ a $(\{Y < x\} \cap \{Z \geq x + \varepsilon\}) \subset \{|X - Z| > \varepsilon\}$, dostáváme

$$\{Y < x\} \subset \{Z < y + \varepsilon\} \cup \{|X - Z| > \varepsilon\}. \tag{4.4}$$

Jelikož vztah (4.4) platí pro libovolné náhodné veličiny Y, Z a libovolné $x \in \mathbb{R}$, můžeme aplikací tohoto vztahu na náhodné veličiny X_n a X dostat nerovnosti

$$\begin{aligned} P(X_n < x) &\leq P(X < x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon), \\ P(X < x - \varepsilon) &\leq P(X < x) + P(|X_n - X| > \varepsilon). \end{aligned}$$

Limitním přechodem pro $n \to \infty$ dostáváme

$$F_X(x - \varepsilon) \leq \lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon).$$

Připomeňme, že tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$. Je-li x bod spojitosti fistribuční funkce $F_X(x)$, pak z předchozí nerovnosti plyne $F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)$, a tedy $X_n \xrightarrow{d} X$.

iii) Jensenova nerovnost (viz věta II.2.6 v [33]) nám říká , že pro každou konvexní funkci f platí $f(\mathbb{E}X) \leq \mathbb{E}(f(X))$. Je-li $p > r$, pak $f(x) = x^{p/r}$ je konvexní funkce, tedy

$$(\mathbb{E}(|X_n - X|^r))^{p/r} = f(\mathbb{E}(|X_n - X|^r)) \leq \mathbb{E}(f(|X_n - X|^r)) = \mathbb{E}(|X_n - X|^p).$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^p) = 0$, platí i $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n - X|^r) = 0$, a proto $X_n \xrightarrow{L_r} X$.

iv) $X_n \xrightarrow{L_p} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}|X_n - X|^p = 0$. Použijeme Čebyševovu nerovnost (4.1) pro náhodnou veličinu $X_n - X$. Pak

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X_n - X|^p}{\varepsilon^2},$$

tedy z konvergence v L_p plyne $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$, a tedy $X_n \xrightarrow{p} X$.

□

4.2 Zákony velkých čísel

Příklad 4.6 *Uvažujme nezávislé náhodné veličiny $X_i \sim Alt(p)$. Pak intuitivně odhadneme, že*

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \to p.$$

Tímto zápisem vlastně říkáme, že při velkém počtu opakování náhodného pokusu s pravděpodobnostní úspěchu p konverguje relativní četnost úspěšných pokusů $\bar{X}_n$ k pravděpodobnosti p.

Je odhad v předchozím příkladě správný? A pokud ano, o jakou konvergenci jde? Na takové otázky nalezneme odpovědi v následujících dvou větách. První z nich se nazývá **slabý zákon velkých čísel** nebo také **Čebyševův zákon velkých čísel**.

Věta 4.3 (Slabý zákon velkých čísel - ZVČ) *Uvažujme nezávislé náhodné veličiny $X_1, X_2, ...$ splňující $\mathbb{E}X_i = \mu < \infty$. Nechť existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $\mathrm{var}X_i \leq c$ pro všechna $i = 1, 2, ...$ Pak*

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{p} \mu.$$

Důkaz. $\mathbb{E}\bar{X}_n = \mu$ a $\mathrm{var}\bar{X}_n = \frac{1}{n^2}\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{var}X_i \leq \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n c = \frac{c}{n}$. Dosazením do Čebyševovy nerovnosti dostaneme

$$P(|\bar{X}_n - \mathbb{E}\bar{X}_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{var}\bar{X}_n}{\varepsilon^2}, \quad \text{tj.} \quad P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{c}{n\varepsilon^2},$$

tedy $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$, a proto $\bar{X}_n \xrightarrow{p} \mu$.

□

Příklad 4.7 *Vraťme se nyní k příkladu 4.6. Náhodné veličiny X_i splňují předpoklady věty 4.3 ($\mathbb{E}X_i = p$ a $\mathrm{var}X = p(1-p) < c = 1$), tedy $\bar{X}_n \xrightarrow{p} p$.*

Slabý zákon velkých čísel nám říká, že posloupnost ralativních četností z příkladu 4.6 konverguje v pravděpodobnosti k hodnotě p. Z věty 4.2 víme, že to implikuje i konvergenci v distribuci. Konverguje ale tato posloupnost k p i skoro jistě? Na tuto otázku nám dá odpověď následující věta.

Věta 4.4 (Silný zákon velkých čísel - SZVČ) *Uvažujme posloupnost nezávislých stejně rozdělených náhodných veličin $X_1, X_2, ...$ s konečnou střední hodnotou $\mathbb{E}X_1 = \mu$ a konečným rozptylem $\mathrm{var}X = \sigma^2 < \infty$. Pak*

$$\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow{s.j.} \mu.$$

Důkaz této věty je hodně technický, proto ho zařadíme až do Apendixu (část 5.1).

Poznámka 4.7 *Posloupnost raletivních četností z příkladu 4.6 tedy konverguje k p i ve smyslu skoro jistě.*

Poznámka 4.8 *Ačkoliv má námi formulovaný silný zákon velkých čísel striktnější předpoklady na náhodné veličiny X_i, než jaké jsme použili v případě slabého zákona velkých čísel, provedený důkaz SZVČ by beze změny prošel i s předpoklady z věty 4.3. Tedy s využitím souvislostí mezi konvergencí skoro jistě a v pravděpodobnosti (viz věta 4.2, i)) by námi formulovaný slabý zákon velkých čísel byl přímým důsledkem SZVČ.*

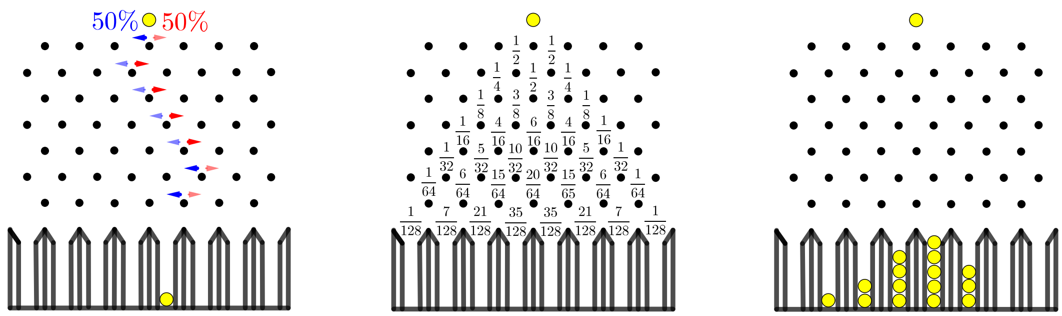
Poznámka 4.9 *Jak slabý zákon velkých čísel, tak i silný zákon velkých čísel, se dají dokázat za obecnějších předpokladů, než které jsme použili ve větách 4.3 a 4.4. Například lze ukázát, že ke splnění silného zákona velkých čísel stačí, když jsou náhodné veličiny X_i nezávislé, střední hodnoty $\mathbb{E}X_i = \mu_i$ jsou konečné (ale mohou být různé) a rozptyly $\mathrm{var}X_i = \sigma_i^2$ splňují $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$, viz věta 4.6 v [10].*

4.3 Centrální limitní věta

Z poznámky 2.21 víme, že součet $\sum_{i=1}^{n} X_i$ nezávislých náhodných veličin $X_i \sim Alt(p)$ má binomické rozdělení s parametry (n, p). Pokud bychom ale měli n velké, zjistili bychom, že se rozdělení tohoto součtu blíží normálnímu rozdělení. Tento pokus bývá často vizualizován pomocí Galtonovy desky, viz obrázek 4.3, které je pojmenována po britském matematikovi Frencisi Galtonovi (1822-1911). Tato deska simuluje **symetrickou náhodnou procházku** pomocí kuličky, která propadává deskou a na každé úrovni má stejnou pravděpodobnost, že se odrazí doleva či doprava. Více informací o náhodné procházce lze nalézt například v [26] a [33].

Podobného výsledku dosáhneme i s jinými náhodnými veličinami X_i, např. $X_i \sim R(0, 1)$. Na obrázku 4.4 je vynormovaný histogram 500 hodnot součtu $S_n = \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Jelikož $\mathbb{E}S_n = 500$ a $\mathrm{var}S_n = \frac{1000}{12}$, zakreslili jsme do grafu i hustotu normálního rozdělení s parametry $\mu = 500$ a $\sigma^2 = \frac{1000}{12}$. Jak je vidět, zakreslená hustota poměrně věřně kopíruje histogram.

Jak již bylo zmíněno dříve, normální rozdělení můžeme nalézt všude kolem nás. Přesně nebo alespoň přibližně má toto rozdělení výška dospělého jedince v homogenní dobře živené populaci [27], inteligenční kvocient IQ [12] či krevní tlak [31] a tyto



Obrázek 4.3: Galtonova deska: Na levém obrázku je znázorněna jedna možná cesta kuličky, na prostředním obrázku jsou vypsány pravděpodobnosti s jakými dané pozice kulička dosáhne, na pravém obrázku je výsledek náhodně vygenerované cesty 15 kuliček (ke generování byl použit software R).

příklady jsou pouze malým výběrem z reálných situací, kdy se můžeme s normálním rozdělením setkat. Normální rozdělení má své aplikace v biologii, medicíně, psychologii, mechanice, ekonomii, teorii řízení rizik, genetice, hydrologii, teorii čísel, fyzice a dalších, viz [1]. Důvod, proč se normální rozdělení objevuje tak často, souvisí právě s faktem, že za poměrně mírných předpokladů má součet většího počtu náhodných veličin přibližně normální rozdělení.

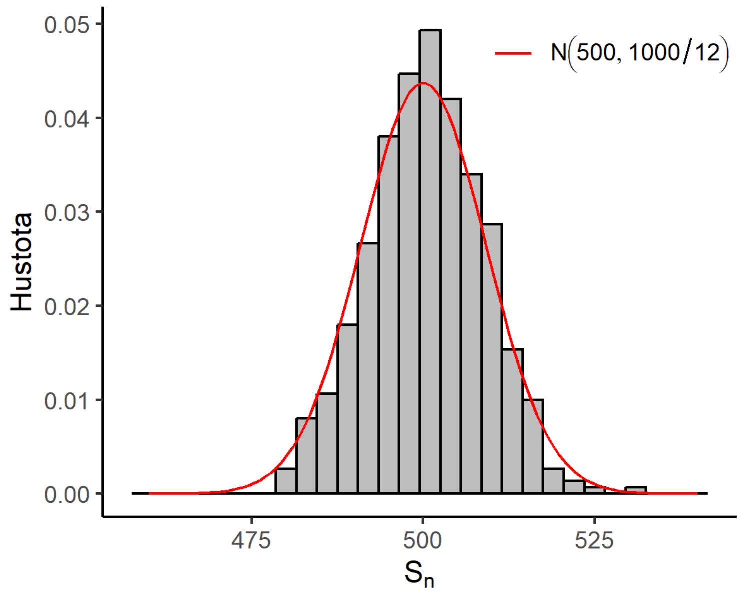
Větám, které ukazují, že součet většího počtu náhodných veličin má přibližně normální rozdělení, říkáme **centrální limitní věty (CLV)**. První výsledek tohoto typu se týkal pouze limitního chování binomického rozdělení (viz úvod této kapitoly) a byl publikován v roce 1733 francouským matematikem Abrahamem de Moivrem (1667-1754), viz [11]. Obecněji formulovanou centrální limitní větu však prvně publikoval až v roce 1810 Pierr Simon de Laplace (1749-1827) [11].

Uvedeme si nejdříve centrální limitní větu, která nese jména těchto dvou zmíněných matematiků a týká se součtu nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením.

Věta 4.5 (Moivreova-Laplaceova CLV) *Uvažujme nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny X_i a nechť $X_i \sim Alt(p)$. Pak*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Jelikož je tato věta přímým důsledkem obecnější centrální limitní věty, kterou uvedeme v zápětí, necháme důkaz této centrální limitní věty na později.



Obrázek 4.4: Normovaný histogram 500 hodnot součtu $\sum_{i=1}^{1000} X_i$, kde $X_i \sim R(0,1)$. Červeně je zakresleha hustota normálního rozdělení s parametry $\mu = 500$ a $\sigma^2 = \frac{1000}{12}$.

Věta 4.6 (Lévy-Lindebergova CLV) *Uvažujme nezávislé stejně rozdělené náhodné veličiny X_i se střední hodnotou $\mathbb{E}X_i = \mu$ a konečným rozptylem $\mathrm{var}X_i = \sigma^2 < \infty$. Pak*

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1).$$

Důkaz této věty je uveden v sekci 5.4.

Pomocí věty 4.6 můžeme snadno dokázat Moivreovu-Laplaceovu CLV větu 4.5, a to následovně: Jelikož $X_i \sim Alt(p)$, pak $\mathbb{E}X_i = p$, a $\mathrm{var}X_i = p(1-p)$. Tedy jsou splněny předpoklady věty 4.6, a proto

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Vraťme se nyní k příkladu 4.5 a zkusme ho vyřešit pomocí centrální limitní věty.

Příklad 4.8 *Kolikrát musíme hodit mincí, aby pravděpodobnost, že se bude relativní četnost líců lišit od jedné poloviny o méně než* 0.1*, byla alespoň* 0.95*?*

Řešení:
Nechť $X_i \sim Alt(\frac{1}{2})$ jsou nezávislé náhodné veličiny. Označme $\bar{X}_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ relativní četnost líců. Pak hledáme takové $n \in \mathbb{N}$, aby platilo

$$P(|\bar{X}_n - 0.5| < 0.1) \geq 0.95.$$

Označme Z náhodnou veličinu s normovaným normálním rozdělením ($Z \sim N(0,1)$). Jelikož $\mathbb{E}X_i = \mu = 0.5$ a $\mathrm{var}X_i = \sigma^2 = 0.25$, pak z CLV dostaneme:

$$\begin{aligned} P(|\bar{X}_n - 0.5| < 0.1) &= P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot 0.5}{n}\right| < 0.1\right) = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n \cdot 0.5}{\sqrt{n \cdot 0.25}}\right| < \frac{0.1 \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{0.25}}\right) \\ &\approx P\left(|Z| < 0.2 \cdot \sqrt{n}\right) = \Phi\left(0.2 \cdot \sqrt{n}\right) - \Phi\left(-0.2 \cdot \sqrt{n}\right) \\ &= 2\Phi\left(0.2 \cdot \sqrt{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

Jelikož $2\Phi\left(0.2 \cdot \sqrt{n}\right) - 1 \geq 0.95$, je $\Phi\left(0.2 \cdot \sqrt{n}\right) \geq 0.975$, a tedy z tabulky 6.1 dostaneme nerovnost $0.2 \cdot \sqrt{n} \geq 1.96$, tedy $n > 96.04$.

Porovnáme-li výsledky předchozího příkladu a téhož příkladu řešeného pomocí Čebyševovy nerovnosti, zjistíme, že se výsledky podstatně liší ($n = 500$ při řešení pomocí Čebyševovy nerovnosti a $n = 97$ při využití CLV). Důvodem tohoto rozdílu je fakt, že při využití Čebyševovy nerovnosti pracujeme s nerovností pravděpodobností, tj. s jejím odhadem shora, resp. zdola. Proto je n, které takto získáme značně nadhodnocené. V případě centrální limitní věty pracujeme s limitním rozdělením, tedy s přibližnou pravděpodobností, tudíž je získané n blíže minimálnímu n, které má požadovanou vlastnost. Jelikož ale pracujeme s limitním rozdělením, nevíme, zda není minimální hledané n ve skutečnosti o trochu větší než to získané pomocí CLV. Pokud provedeme simulační studii (například v softwaru R), pak zjistíme, že při $n = 500$ přibližne v 0.0006 % případů překročí relativní četnost požadovanou hodnotu 0.1. Pro $n = 97$ nastává tato situace přibližně v 4.2 % případů a pro $n = 96$ přibližně v 5.2 % případů. Tedy řešení pomocí CLV nám dala přesný výsledek. Pokud bychom ale požadovali, aby

$$P(|\bar{X}_n - 0.5| < 0.10003) \geq 0.95,$$

pak by nám toto řešení dalo $n = 96$, ale skutečné hledané n by bylo stále rovno 97.

4.4 Cvičení

1. Na rodinné farmě se narodí průměrně 8 kuřat za jeden den. Předpokládejme, že počet narozených kuřat se řídí Poissonovým rozdělením. Jaká je pravděpodobnost, že se v dubnu narodilo na této farmě více než 230 kuřat?

2. Student matfyzu jezdí každý pracovní den do školy kolem devaté hodiny ranní a ze školy kolem páté hodiny večerní, pouze v pátek student odjíždí ze školy již kolem druhé hodiny. K cestě do školy a zpět používá linku metra B, která má kolem deváte ranní hodiny i páté odpolední hodiny intervaly 3 minuty a kolem druhé odpolední hodiny má intervaly 7 minut. Semestr má 14 týdnů a předpokládejme pro jednoduchost, že v každý pracovní den semestru probíhá výuka, na kterou student jel. Odhadněte pravděpodobnost, že student strávil čekáním na metro B v daném semestru více jak 4 hodiny? Řešte pomocí CLV.

3. Letecká společnost prodává letenky a chce co nejvíce ušetřit. Letadlo Boeing Nexh Generation 737-900 má 220 míst, ale ví se, že zhruba 5 % lidí se k odletu nedostaví.

   a) Jaká je pravděpodobnost, že pokud společnost prodá 225 letenek, nepřesáhne počet cestujících kapacitu letadla?
   b) Kolik může společnost prodat letenek na jeden let, chce-li držet pravděpodobnost, že nepřesáhne kapacitu, kolem 90 %?

   (převzato z [14])

4. Plavčík v létě pomáhá tonoucímu průměrně jednou za dva dny. Jaká je pravděpodobnost, že během letních prázdnin (červenec a srpen) bude pomáhat tonoucímu více než 26 krát?

Kapitola 5

Apendix

„Čistě formálně by se teorie pravděpodobnosti dala nazvat studiem prostorů s mírou, kde míra celého prostoru je rovna jedné, nicméně to by bylo jako nazývat teorii čísel studiem čísel s konečným desetinným rozvojem. “

—Tao Terence

5.1 Důkaz SZVČ

Definice 5.1 *Nechť $\{A_n\}$ je posloupnost jevů, pak $\limsup_{n\to\infty} A_n$ značí jev, že jevy A_n nastanou pro nekonečně mnoho n. Tedy $\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n$ právě tehdy, když $\omega \in A_n$ pro nekonečně mnoho n.*

Lemma 5.1 (Borel-Canteliho lemma) *Uvažujme posloupnost náhodných jevů $\{A_n\}$. Pak platí:*

i) Je-li $\sum_{i=1}^{\infty} A_n < \infty$, pak

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

ii) Je-li $\{A_n\}$ posloupnost nezávislých jevů a $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, pak

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1.$$

Důkaz.

i)

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \le P(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \le \sum_{i=n}^{\infty} P(A_i).$$

Z konvergence sumy $\sum_{i=1}^{\infty} A_n$ dostaneme rovnost $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n}^{\infty} A_i = 0$, tedy

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

ii)

$$P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) = \lim_{m\to\infty} P\left(\bigcap_{i=n}^{m} A_i^c\right) = \lim_{m\to\infty}\prod_{i=n}^{m} P(A_i^c) = \lim_{m\to\infty}\prod_{i=n}^{m}(1-P(A_i))$$
$$\le \lim_{m\to\infty}\prod_{i=n}^{m} e^{-P(A_i)} = \lim_{m\to\infty} e^{-\sum_{i=n}^{m} P(A_i)} = 0.$$

Tedy

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(1-\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right)^c\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P\left(1-\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) = 1.$$

□

Nyní dokážeme větu 4.4.
Důkaz. **(Silný zákon velkých čísel - SZVČ)**
Důkaz rozdělíme do dvou kroků.

1. Ukážeme, že posposloupnost $\frac{S_{n^2}}{n^2}$ konverguje skoro jistě k μ:

   Uvažujme posloupnost náhodných veličin $S_{n^2} = \sum_{i=1}^{n^2} X_i$. Pak s využitím věty 2.8 a důsledku 3.11 dostaneme var$\frac{S_{n^2}}{n^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n^2} X_i}{n^4} = \frac{\sigma^2}{n^2}$. Dále s použitím Čebyševovy nerovnosti (4.2) máne

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\mu\right| \ge \varepsilon\right) \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma^2}{n^2\varepsilon^2} < \infty.$$

Tedy z Borel-Cantoliho lemma 5.1, i) plyne

$$P\left(\limsup_{n\to\infty}\left\{\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\mu\right|\geq\varepsilon\right\}\right)$$
$$=P\left(\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\mu\right|\geq\varepsilon \text{ pro nekonecne mnoho n}\right)=0.$$

Pak

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n^2}}{n^2}\neq\mu\right)\leq\sum_{\varepsilon\in\mathbb{Q}_+}P\left(\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\mu\right|\geq\varepsilon \text{ pro nekonecne mnoho n}\right)=0.$$

Tedy $\frac{S_{n^2}}{n^2}\overset{s.j.}{\to}\mu$.

2. Z konvergence $\frac{S_{n^2}}{n^2}\overset{s.j.}{\to}\mu$ ukážeme konvergenci $\frac{S_k}{k}\overset{s.j.}{\to}\mu$:
Uvažujme pevné $k\in\mathbb{N}$, pak existuje $n\in\mathbb{N}$ takové, že $n^2\leq k<(n+1)^2=n^2+2n+1$. Ukažme, že $\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\frac{S_k}{k}\right|$ bude konvergovat skoro jistě k nule (pro $k\to\infty$). Nejdříve si omezíme výrazy $\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\frac{S_{n^2}}{k}\right|$ a $\left|\frac{S_{n^2}}{k}-\frac{S_k}{k}\right|$, kde využijeme nerovnosti $k-n^2\leq 2n$.

$$\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\frac{S_{n^2}}{k}\right|=|S_{n^2}|\cdot\frac{k-n^2}{n^2\cdot k}\leq|S_{n^2}|\cdot\frac{2n}{n^4}=2\cdot\frac{X_1+...+X_{n^2}}{n^3}.$$

Jelikož čitatel tohoto výrazu roste rychlostí n^2, ale jmenovatel rychlostí n^3, tak můžeme psát $\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\frac{S_{n^2}}{k}\right|\leq O(\frac{1}{n})$. Podobně ukážeme

$$\left|\frac{S_{n^2}}{k}-\frac{S_k}{k}\right|=\frac{1}{k}|X_{n^2+1}+X_{n^2+2}+...+X_k|\leq O\left(\frac{1}{n}\right).$$

S využitím předchozích výsledků dostaneme

$$\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\frac{S_k}{k}\right|\leq\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\frac{S_{n^2}}{k}\right|+\left|\frac{S_{n^2}}{k}-\frac{S_k}{k}\right|\leq O\left(\frac{1}{n}\right),$$

tedy

$$\left|\frac{S_{n^2}}{n^2}-\frac{S_k}{k}\right|\overset{s.j.}{\to}0.$$

Z nerovnosti

$$\left|\frac{S_k}{k} - \mu\right| \leq \left|\frac{S_k}{k} - \frac{S_{n^2}}{n^2}\right| + \left|\frac{S_{n^2}}{n^2} - \mu\right|$$

dostáváme $\left|\frac{S_k}{k} - \mu\right| \stackrel{s.j.}{\to} 0$, tedy

$$\frac{S_k}{k} \stackrel{s.j.}{\to} \mu.$$

$\square$

5.2 Charakteristické funkce

Při práci s limitním rozdělením (například pri důkazu centrální limitní věty), je popis rozdělení pomoci distribuční funkce nešikovný. V techto případech je vhodnější pracovat s charakteristickými funkcemi, které rovněž popisují rozdělení náhodných veličin.

Definice 5.2 *Uvažujme náhodnou veličinu X, pak funkci*

$$\Psi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX}, \quad t \in \mathbb{R}$$

nazýváme ***charakteristická funkce*** *náhodné veličiny X (nebo také charakteristická funkce rozdělení náhodné veličiny X)*

Poznámka 5.1 *Charakteristická funkce $\Psi_X(t)$ náhodné veličiny X existuje vždy, jelikož je e^{itX} omezená funkce.*

Z definice 5.2 je patrné, že rozdělení P_X náhodné veličiny X jednoznačně určuje charakteristickou funkci $\Psi_X(t)$. Následující věta nám říká, že charakteristická funkce jednoznačně určuje distribuční funkci F_X, tedy i rozdělení náhodné veličiny X.

Věta 5.2 *Nechť pro náhodné veličiny X a Y platí, že $\Psi_X(t) = \Psi_Y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Pak $F_X(x) = F_Y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, tedy náhodné veličiny X a Y mají stejné rozdělení.*

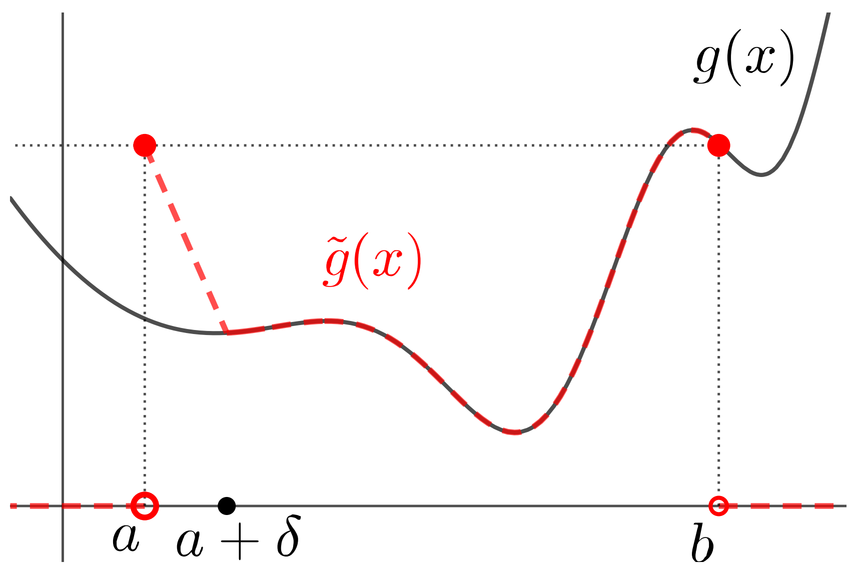
Důkaz. Důkaz provedeme ve dvou krocích:
1. kážeme, že rovnost charakteristických funkcí $\Psi_X(t) = \Psi_Y(t)$ implikuje rovnost středních hodnot $\mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}g(Y)$ pro každou spojitou omezenou funkci $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Nechť $: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá omezená funkce, tedy existuje $M \in \mathbb{R}$ takové, že $|g(x)| < M$ pro všechan $x \in \mathbb{R}$.

Zvolme $\delta > 0$ a $a, b \in \mathbb{R}$ takové, že $P(X \in [a+\delta, b]^c) < \frac{\varepsilon}{12(M+\varepsilon/4)}$ i $P(Y \in [a+\delta, b]^c) < \frac{\varepsilon}{12(M+\varepsilon/4)}$. Existence takových čísel a a b plyne z věty 2.3 iii).

Zedefinujeme funkci $\tilde{g}$ následujícím způsobem (viz obrázek 5.1).

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(x) &= g(x), && x \in [a+\delta, b], \\
&= g(b) \cdot \left(1 - \frac{x-a}{\delta}\right) + g(a+\delta) \cdot \frac{x-a}{\delta}, && x \in [a, a+\delta], \\
&= 0, && x \in [a, b]^c.
\end{aligned}$$



Obrázek 5.1: Graf funkce $\tilde{g}$ (červená čárkovaná čára). černou čarou je zakreslen graf původní funkce $g(x)$.

Pro všechna $\varepsilon > 0$ existuje polynon $p(x)$ splňující $\sup_{x \in [a,b]} |\tilde{g}(x) - p(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$.

Existence takového polynomu plyne z teorie **Fourierových řad** (např. str. 897, důsledek 16.3.7. [24]). Polynom $p(x)$ se nazývá **trigonometrický polynom**, má tvar $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i \frac{2\pi}{b-a} kx}$, kde $c_k \in \mathbb{C}$, a je periodický s periodou $b-a$.

Chceme ukázat, že $0 \leq |\mathbb{E}g(X) - \mathbb{E}g(Y)| < \varepsilon$.

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}g(X)-\mathbb{E}g(Y)| =&|\mathbb{E}g(X)-\mathbb{E}g(Y)+\mathbb{E}\tilde{g}(X)-\mathbb{E}\tilde{g}(X)+\mathbb{E}\tilde{g}(Y)-\mathbb{E}\tilde{g}(Y)| \\
\leq&|\mathbb{E}g(X)-\mathbb{E}\tilde{g}(X)|+|\mathbb{E}g(Y)-\mathbb{E}\tilde{g}(Y)|+|\mathbb{E}\tilde{g}(X)-\mathbb{E}\tilde{g}(Y)| \\
=&|\mathbb{E}g(X)-\mathbb{E}\tilde{g}(X)|+|\mathbb{E}g(Y)-\mathbb{E}\tilde{g}(Y)| \\
&+|\mathbb{E}\tilde{g}(X)-\mathbb{E}\tilde{g}(Y)+\mathbb{E}p(X)-\mathbb{E}p(X)+\mathbb{E}p(Y)-\mathbb{E}p(Y)| \\
\leq&|\mathbb{E}g(X)-\mathbb{E}\tilde{g}(X)|+|\mathbb{E}g(Y)-\mathbb{E}\tilde{g}(Y)|+|\mathbb{E}\tilde{g}(X)-\mathbb{E}p(X)| \\
&+|\mathbb{E}\tilde{g}(Y)-\mathbb{E}p(Y)|+|\mathbb{E}p(X)-\mathbb{E}p(Y)|.
\end{aligned}
$$

Podíváme se postupně na jednotlivé členy v získané nerovnosti. Využijeme vlastností

$$
\begin{aligned}
(g(x)-\tilde{g}(x)) = (g(x)-\tilde{g}(x))(\mathbb{I}_{\{x\in[a+\delta,b]\}}+\mathbb{I}_{\{x\in[a,a+\delta)\}}+\mathbb{I}_{\{x\in[a,b]^c\}}), \\
(g(x)-\tilde{g}(x))\mathbb{I}_{\{x\in[a+\delta,b]\}} = 0, \\
|g(x)-\tilde{g}(x)|\mathbb{I}_{\{x\in[a,a+\delta)\}} \leq 2M\mathbb{I}_{\{x\in[a,a+\delta)\}}, \\
|g(x)-\tilde{g}(x)|\mathbb{I}_{\{x\in[a+\delta,b]^c\}} = |g(x)|\mathbb{I}_{\{x\in[a+\delta,b]^c\}} \leq M\mathbb{I}_{\{x\in[a,b]^c\}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}g(X)-\mathbb{E}\tilde{g}(X)| &= \mathbb{E}(|g(X)-\tilde{g}(X)|\cdot(\mathbb{I}_{\{X\in[a+\delta,b]\}}+\mathbb{I}_{\{X\in[a,a+\delta)\}}+\mathbb{I}_{\{X\in[a,b]^c\}}) \\
&\leq M\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{X\in[a,b]^c\}})+2M\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{x\in[a,a+\delta)\}})\leq 2M\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{X\in[a+\delta,b]^c\}}) \\
&= 2M\cdot P(X\in[a+\delta,b]^c) < 2M\cdot\frac{\varepsilon}{12(M+\varepsilon/4)} < \frac{\varepsilon}{6}.
\end{aligned}
$$

Podobně $|\mathbb{E}g(Y)-\mathbb{E}\tilde{g}(Y)| < \frac{\varepsilon}{6}$.

Nyní využijeme vlastností: $\sup_{x\in[a,b]}|\tilde{g}(x)-p(x)| < \frac{\varepsilon}{4}$, $p(x)$ je periodický s periodou $b-a$ a $\tilde{g}(x) < M$ na $\mathbb{R}$. Tedy $p(x) < M+\frac{\varepsilon}{4}$ na $\mathbb{R}$.

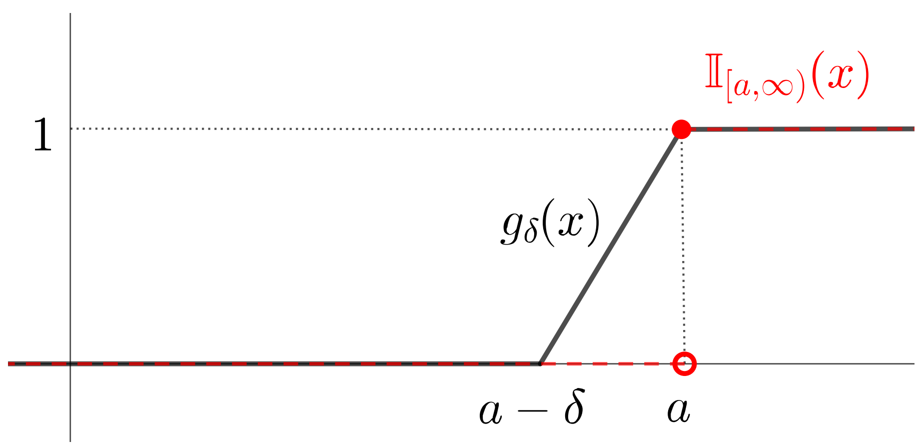
$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}\tilde{g}(X)-\mathbb{E}p(X)| &= \mathbb{E}(|\tilde{g}(X)-p(X)|\cdot(\mathbb{I}_{\{X\in[a+\delta,b]^c\}}+\mathbb{I}_{\{X\in[a+\delta,b]\}})) \\
&< \left(M+\frac{\varepsilon}{4}\right)\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{X\in[a+\delta,b]^c\}})+\frac{\varepsilon}{4}\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\{X\in[a+\delta,b]\}}) \\
&\leq \left(M+\frac{\varepsilon}{4}\right)\cdot P(X\in[a+\delta,b]^c)+\frac{\varepsilon}{4} \\
&< \left(M+\frac{\varepsilon}{4}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{12(M+\varepsilon/4)}+\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|\mathbb{E}p(X) - \mathbb{E}p(Y)| &= \left| \mathbb{E} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i \frac{2\pi}{b-a} kX} - \mathbb{E} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i \frac{2\pi}{b-a} kY} \right| \\
&= \left| \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathbb{E} e^{i \frac{2\pi}{b-a} kX} - \sum_{k=-n}^{n} c_k \mathbb{E} e^{i \frac{2\pi}{b-a} kY} \right| \\
&= \left| \sum_{k=-n}^{n} c_k \Psi_X \left(\frac{2\pi k}{b-a} \right) - \sum_{k=-n}^{n} c_k \Psi_Y \left(\frac{2\pi k}{b-a} \right) \right| = 0.
\end{aligned}
$$

Tedy $|\mathbb{E}g(X) - \mathbb{E}g(Y)| < \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + 0 = \varepsilon$. Jelikož tato nerovnost platí pro všechna $\varepsilon > 0$, tak $\mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}g(Y)$.

2. Nechť tedy platí rovnost $\mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}g(Y)$ pro všechny spojité omezené funkce g. Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\delta > 0$ zadefinujeme funkci (viz obrázek 5.2)

$$
\begin{aligned}
g_\delta(x) &= 0, & x &< \alpha - \delta, \\
&= \frac{x - (\alpha - \delta)}{\delta}, & x &\in [\alpha - \delta, \alpha], \\
&= 1, & x &> \alpha.
\end{aligned}
$$



Obrázek 5.2: Graf funkce $g_\delta(x)$ (černá čára). Červenou čárkovanou čarou je zakreslen graf limitní funkce $\mathbb{I}_{[a,\infty)}(x)$.

Takto definovaná funkce g_δ je spojitá a navíc platí $\lim_{\delta\to 0+} g_\delta(x) = \mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(x)$. Tedy s využitím Lebesgueovi věty (str. 28, věta 8.13 v [18]) dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}g_\delta(X) &= \mathbb{E}g_\delta(Y),\\
\lim_{\delta\to 0+} \mathbb{E}g_\delta(X) &= \lim_{\delta\to 0+} \mathbb{E}g_\delta(Y),\\
\mathbb{E}\lim_{\delta\to 0+} g_\delta(X) &= \mathbb{E}\lim_{\delta\to 0+} g_\delta(Y),\\
\mathbb{E}(\mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(X)) &= \mathbb{E}(\mathbb{I}_{[\alpha,\infty)}(Y)),\\
P(X \geq \alpha) &= P(Y \geq \alpha),\\
1 - P(X < \alpha) &= 1 - P(Y < \alpha).
\end{aligned}$$

Z poslední rovnosti plyne rovnost distribučních funkcí $F_X(\alpha) = F_Y(\alpha)$.

□

Následující věta, kterou zde uvedeme bez důkazu, nám popisuje vztah mezi konvergencí v distribuci a bodovou konvergencí charakteristických funkcí. Tuto větu včetně důkazu lze pod názvem Lévy's continuity theorem nálezt na str. 86, v [15], nebo v [9].

Věta 5.3 *Posloupnost náhodných veličin $\{X_n\}$ konveruje v distribuci k náhodné veličině X právě tehdy, když $\Psi_{X_n}(x) \to \Psi_X(x),\ \forall x \in \mathbb{R}$.*

Poznámka 5.2 *Předchozí věta se někdy uvádí v následujícím znění. Nechť posloupnost charakteristických funkcí $\Psi_{X_n}(x)$ konverguje bodově k funkci $\Psi(x)$ na celém $\mathbb{R}$ a $\Psi(x)$ je spojitá v nule. Pak existuje n.x. X taková, že $X_n \xrightarrow{d} X$ a $\Psi(x)$ je charakteristická funkce náhodné veličiny X. Viz věta 18.1., str. 185 v [37].*

Následující věta hovoří o derivaci charakteristické funkce.

Věta 5.4 *Uvažujme náhodnou veličinu X. Je-li $\mathbb{E}|X|^n < \infty$, pak charatkeristická funkce $\Psi_X(t)$ má spojitou derivaci až do řádu n a platí*

$$\Psi_X^{(n)}(t) = \mathbb{E}[(iX)^n e^{itX}].$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí.

Pro $n = 1$ dostaneme $\mathbb{E}|iXe^{itX}| \leq \mathbb{E}|X| < \infty$, tedy lze použít větu o záměně derivace a integrálu (věta II.7.18, str 161 v [33]).

$$\Psi_X(t)' = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{itX}\right) = \mathbb{E}[(iX)e^{itX}].$$

Pokud vztah platí pro nějaké n a $\mathbb{E}|X|^{n+1} < \infty$, pak opět $\mathbb{E}|(iX)^{n+1}e^{itX}| \leq \mathbb{E}|X|^{n+1} < \infty$, tedy dle věty o záměně derivace a integrálu dostaneme

$$\Psi_X^{(n+1)}(t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbb{E}[(iX)^n e^{itX}] = \mathbb{E}\left(\frac{\partial}{\partial t}(iX)^n e^{itX}\right) = \mathbb{E}[(iX)^{n+1}e^{itX}].$$

□

Důsledek 5.5 *Mějme náhodnou veličinu X a nechť $\mathbb{E}X = 0$ a $\mathrm{var}X = \sigma^2 < \infty$, pak*

$$\Psi_X(t) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2). \tag{5.1}$$

Důkaz. Tvrzení plyne z Taylorova rozvoje charakteristické funkce a větě o Peanově tvaru zbytku (str. 376, věta 7.1.11 v [24]).

$$\begin{aligned}\Psi_X(t) &= \Psi_X(0) + \Psi_X'(0)t + \Psi_X''(0)\cdot\frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 + \mathbb{E}(iX) + \mathbb{E}(iX)^2\cdot\frac{t^2}{2} + o(t^2)\\ &= 1 + i\mathbb{E}X - \mathbb{X}^{\nvDash}\cdot\frac{t^2}{2} + o(t^2) = 1 - \frac{\sigma^2 t^2}{2} + o(t^2).\end{aligned}$$

□

Příklad 5.1 *Určete charakteristickou funkci normovaného normálního rozdělení*

Řešení:
Nechť $X \sim N(0,1)$, pak

$$\begin{aligned}\Psi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} &= \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}}\cos(tx)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx + i\int_{\mathbb{R}} sin(tx)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}}\cos(tx)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \int_{\mathbb{R}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(tx)^{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!}\int_{\mathbb{R}} x^{2k}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}\cdot\mathbb{E}X^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

Nulovost integrálu $\int_{\mathbb{R}} sin(tx)\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ plyne z jeho existence a lichosti integrované funkce. Záměnu nekonečného součtu a integrálu lze provést dle Lebesgueovy věty pro řady (věta 8.14, str. 28 v [18]). Využijeme-li znalostí momentů normovaného normálního rozdělení (viz příklad 5. v cvičení 2.5), dostaneme

$$\begin{aligned}\Psi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}\cdot\mathbb{E}X^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}\cdot\prod_{j=1}^{k}(2j-1)}{(2k)!}\\ &= 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4\cdot 3}{4!} - \frac{t^6\cdot 5\cdot 3}{6!} + ... = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4\cdot 3}{4\cdot 2} - \frac{t^6}{6\cdot 4\cdot 2} + ...\\ &= 1 + \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)}{1} + \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{t^2}{2}\right)^3}{3!} + ... = e^{-\frac{t^2}{2}}.\end{aligned}$$

5.3 Momentová vytvořující funkce

Dalším způsobem, jak popsat rozdělení náhodné veličiny je pomocí momentové vytvořující funkce.

Definice 5.3 *Uvažujme náhodnou veličinu X, pak* ***momentová vytvořující funkce*** *náhodné veličiny X je definovaná vztahem*

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX},$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$, pro které je $\mathbb{E}e^{tX} < \infty$.

Poznámka 5.3 *Integrál $\mathbb{E}e^{tX}$ nemusí vždy konvergovat (na rozdíl od integrálu $\mathbb{E}e^{itX}$, který zavádí charakteristickou funkci).*

Následující věta hovoří o vlastnostech momentové vytvořující funkce.

Věta 5.6 *Je-li $M_X(t)$ momentová vytvořující funkce náhodné veličiny X, pak platí:*

i) Je-li $M_X(T) < \infty$ a $M_X(-T) < \infty$ pro nějaké $T > 0$, pak je $M_X(t)$ spojitá na $[-T, T]$.

ii) Je-li $M_X(T) < \infty$ a $M_X(-T) < \infty$ pro nějaké $T > 0$, pak má $M_X(t)$ spojité derivace všech řádů na $(-T, T)$ a $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}X^k$, $\forall k = 0, 1, \ldots$. Tedy náhodná veličina X má také konečné všechny momenty $\mathbb{E}X^k$.

Důkaz.

i) Pro každé $t \in (-T, T)$ platí $e^{tx} \leq \max\{1, e^{Tx}, e^{-Tx}\}$, tedy $M_X(t) < \infty$. Navíc pro $s \to t$ z věty o integrovatelné majorantě platí

$$\lim_{s \to t} M_X(s) = \lim_{s \to t} \mathbb{E}e^{sX} = \mathbb{E} \lim_{s \to t} e^{sX} = \mathbb{E}e^{tX} = M_X(t).$$

ii) Ukážeme si nejdříve, že v každém intervalu $[-T_0, T_0] \subset (-T, T)$ má k-tá derivace $(e^{tX})^{(k)}$ integrovatelnou majorantu.

$$\begin{aligned}
|(e^{tX})^{(k)}| = |X^k| e^{tX} &= \frac{|X(T - T_0)|^k}{(T - T_0)^k} e^{tX} = \frac{k!}{(T - T_0)^k} \cdot \frac{|X(T - T_0)|^k}{k!} e^{tX} \\
&\leq \frac{k!}{(T - T_0)^k} \cdot e^{|X(T - T_0)|} \cdot e^{tX} \\
&= \frac{k!}{(T - T_0)^k} \cdot e^{|X(t + T - T_0)|} \mathbb{I}_{[X \geq 0]} + \frac{k!}{(T - T_0)^k} \cdot e^{|X(-t + T - T_0)|} \mathbb{I}_{[X < 0]} \\
&\leq \frac{k!}{(T - T_0)^k} \max\{e^{TX}, e^{-TX}\}.
\end{aligned}$$

Jelikož $\mathbb{E}e^{TX} < \infty$ a $\mathbb{E}e^{-TX} < \infty$, tak i $\mathbb{E}\frac{k!}{(T-T_0)^k}\max\{e^{TX}, e^{-TX}\} < \infty$. Pak můžeme dle věty II.7.18 na str.161 v [33] prohodit derivaci a integrál, tedy

$$M_X^{(k)}(t) = \mathbb{E}(e^{tX})^{(k)} = \mathbb{E}[X^k e^{tX}]. \tag{5.2}$$

Spojitost derivace vyplývá ze spojitosti funkce $g(t) = x^k e^{tx}$ a větě o integrovatelné majorantě (věta 8.13 str 28 v [18]), díky které můžeme prohodit integrál a limitu. $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}X^k$ dostaneme dosazením do vztahu (5.2).

□

Věta 5.2 nám říkala, že rovnost charakteristických funcí už implikuje rovnost rozdělení příslušných náhodných veličin. Jak je vidět v následující větě, podobná vlastnost platí i pro momentové vytvořující funkce.

Věta 5.7 *Nechť existuje okolí počátku $(-\delta, \delta)$ takové, že pro každé $t \in (-\delta, \delta)$ platí, $M_X(t) < \infty$, $M_Y(t) < \infty$ a $M_X(t) = M_Y(t)$. Pak mají náhodné veličiny X a Y stejné rozdělení.*

Důkaz. Jsou-li $M_X(t) < \infty$ a $M_Y(t) < \infty$ na $(-\delta, \delta)$, pak jsou funkce $\psi_X(z) = \mathbb{E}e^{zX}$ a $\psi_Y(z) = \mathbb{E}e^{zY}$ dobře definované a holomorfní na množině $I_{(-\delta,\delta)} = \{z = t + si \in \mathbb{C} : t \in (\delta, \delta), s \in \mathbb{R}\}$ dle lemma 5.9. Jelikož interval $(-\delta, \delta)$ má hromadný bod (každý bod tohoto intervalu je hromadný), pak dle věty 5.10 platí rovnost $\psi_X(z) = \psi_Y(z)$ na celé množině $I_{(-\delta,\delta)}$. Jelikož interval $(-\delta, \delta)$ obsahuje počátek, tak $is \in I_{(-\delta,\delta)}$ pro každé $s \in \mathbb{R}$. Z rovnosti funkcí $\psi_X(z) = \psi_Y(z)$ tedy plyne rovnost charakteristických funkcí $\Psi_X(s) = \Psi_Y(s)$ na celém $\mathbb{R}$, jelikož $\Psi_X(s) = \psi_X(si)$ a $\Psi_Y(s) = \psi_Y(si)$. Tedy X a Y mají stejné rozdělení dle věty 5.2.

□

Podobně jako u charakteristických funkcí lze vyvodit konvergenci v distribuci i z bodové konvergence momentových vytvořujívích funkcí.

Věta 5.8 *Nechť $\{X_n\}$ je posloupnost náhodných veličin a existuje $\delta > 0$ takové, že $M_{X_n}(t) < \infty$ na $(-\delta, \delta)$. Pokud posloupnost momentových vytvořujících funkcí $M_{X_n}(t)$ konverguje bodově k funkce $M(t)$ na intervalu $(-\delta, \delta)$, pak existuje náhodná veličina X taková, že $X_n \xrightarrow{d} X$ a $M(t)$ je momentová vytvořující funkce této náhodné veličiny na intervalu $(-\delta, \delta)$.*

Důkaz. Podobně jako v důkazu předchozí věty si zadefinujeme komplexní funkce $\psi_{X_n}(z) = \mathbb{E}e^{zX_n}$ na množině $I_{(-\delta,\delta)} = (-\delta, \delta) \times i\mathbb{R}$.

Mějmě $0 < \tilde{\delta} < \delta$ a $K \subset (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}) \times i\mathbb{R}$ libovolnou kompaktní podmnožinu množiny $(-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}) \times i\mathbb{R}$. Pak pro libovolná $z = t + is \in K$ platí

$$|\psi_{X_n}(z)| = |\mathbb{E}e^{(t+is)X_n}| \leq \mathbb{E}|e^{(t+is)X_n}| = \mathbb{E}|e^{tX_n}| \leq \mathbb{E}e^{|t|\cdot|X_n|} \leq \mathbb{E}e^{\tilde{\delta}\cdot|X_n|} \tag{5.3}$$

$$\leq M_{X_n}(\tilde{\delta}) + M_{X_n}(-\tilde{\delta}). \tag{5.4}$$

Ze vztahu (5.3) a konvergence posloupností $\{M_{X_n}(\tilde{\delta})\}$ a $M_{X_n}(\tilde{\delta})$ plyne **stejnoměrná omezenost funkcí** ψ_{X_n} na K, tedy existence konstanty $W \in \mathbb{R}$ splňující $|\psi_{X_n}(z)| < W$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $z \in K$.

Jelikož pro $z = t + 0 \cdot i \in (-\delta, \delta) \times \{0\}$ je $\psi_{X_n}(z) = M_{X_n}(t)$ a M_{X_n} konvergují bodově na $(-\delta, \delta)$, tak jsou splněny předpoklady věty 5.11, tedy existuje holomorfní funkce ψ definovaná na $(-\delta, \delta) \times i\mathbb{R}$ taková, že ψ_{X_n} konvergují stejnoměrně k ψ na libovolné kompaktní množině $K \subset (-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}) \times i\mathbb{R}$.

Označme $\Psi_{X_n}(s) = \psi_{X_n}(is)$ a $\Psi(s) = \psi(is)$ pro $s \in \mathbb{R}$. Pak z konvergence posloupnosti funkcí $\psi_{X_n} \to \psi$ na K plyne konvergence charakteristických funkcí $\Psi_{X_n} \to \Psi$ na $\mathbb{R}$. Ze spojitosti funkce ψ (je holomorfní), plyne spojitost funkce Ψ. Tedy dle věty 5.3 (respektive poznámky 5.2) existuje náhodná veličina X taková, že $X_n \xrightarrow{d} X$ a Ψ je charakteristickou funkcí této náhodné veličiny.

Ukážeme, že momentová vytvořující funkce $M_X(t)$ je dobře definovaná (konečná) na $(-\delta, \delta)$. Uvažujme pevné $t \in (-\delta, \delta)$, $A > 0$ a zadefinujme funkci g tak, aby

$$\begin{aligned} g(x) &= 1, & x &\in [-A, A], \\ &= 0, & x &\in \mathbb{R} \setminus [-2A, 2A], \end{aligned}$$

$g(x) \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}$ a $g(x)$ byla spojitě direrencovatelná na $\mathbb{R}$. Pak

$$\begin{aligned} \int_{-A}^{A} e^{tx} dF_X(x) &\leq \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_X(x) \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_X(x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_{X_n}(x) \right| + \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_{X_n}(x) \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_X(x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_{X_n}(x) \right| + M_{X_n}(t) \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_X(x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_{X_n}(x) \right| + \sup_{n \geq 1} M_{X_n}(t). \end{aligned}$$

Z konvergence $X_n \xrightarrow{d} X$ dostaneme $\left| \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_X(x) - \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot e^{tx} dF_{X_n}(x) \right| \to 0$, tedy

$$\int_{-A}^{A} e^{tx} dF_X(x) \leq \sup_{n \geq 1} M_{X_n}(t) < \infty.$$

Jelikož tato nerovnost platí pro každé $A \in \mathbb{R}$, tak

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF_X(x) \leq \sup_{n\geq 1} M_{X_n}(t) < \infty,$$

tedy je funkce $M_X(t)$ dobře definovaná (konečná).

Nyní zbývá ukázat, že $M(x) = M_X(x)$ na intervalu $(-\delta, \delta)$. Označme $\tilde{\psi}(z) = \mathbb{E}e^{zX}$. Jelikož $\tilde{\psi}(is) = \Psi(s) = \psi(is)$ na $\mathbb{R}$, tak dle věty 5.10 platí rovnost $\tilde{\psi}(z) = \tilde{\psi}(z)$ na $I_{(-\delta,\delta)}$. Tedy pro každé $t \in (-\delta, \delta)$ dostaneme

$$M_X(t) = \psi(t) = \lim_{n\to\infty} \psi_{X_n}(t) = \lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = M(t).$$

□

Porovnejme si věty 5.3 a 5.7. Zatím co u první věty je mezi bodovou konvergencí charakteristických funkcí a konvergencí v distribuci ekvivalence, u druhé věty "pouze"konvergence momentových vytvořujících funkcí na nějakém okolí počátku implikuje konvergenci v distribuci. Následující příklad ukazuje, že konvergence v distribuci skutečně obecně konvergenci momentových vytvořujících funkcí neimplikuje.

Příklad 5.2 *Uvažujme náhodné veličiny X_n s hustotou*

$$\begin{aligned} f_{X_n}(x) &= \frac{n}{2\mathrm{arctg}(n^2)\cdot(1+n^2x^2)}, && x \in (-n,n), \\ &= 0, && x \in \mathbb{R} \setminus (-n,n). \end{aligned}$$

Tedy distribuční funkce náhodné veličiny X_n má tvar

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= 0, \quad x < -n, \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{arctg}(nx)}{2\mathrm{arctg}(n^2)}, && -n \leq x \leq n, \\ &= 1, && x > n. \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) &= 0, \quad x < 0, \\ &= 1, \quad x > 0. \end{aligned}$$

Tedy X_n konverguje v distribuci k náhodné veličině X, pro kterou platí $P(X = 0) = 1$. Pro momentové vytvořující funkce dostaneme

$$\begin{aligned} M_{X_n}(t) &= \int_{-n}^{n} e^{tx} \frac{n}{2\mathrm{arctg}(n^2)\cdot(1+n^2x^2)} dx \\ &< e^{|t|n} \int_{-n}^{n} \frac{n}{2\mathrm{arctg}(n^2)\cdot(1+n^2x^2)} dx = e^{|t|n} < \infty, \end{aligned}$$

tedy $M_{X_n}(t)$ je definovaná na celém $\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
M_{X_n}(t) &= \int_{-n}^{n} e^{tx} \frac{n}{2\mathrm{arctg}(n^2)\cdot(1+n^2x^2)} dx \\
&\geq \frac{1}{2\mathrm{arctg}(n^2)} \int_0^n e^{|t|x} \frac{n}{1+n^2x^2} dx = \frac{1}{2\mathrm{arctg}(n^2)} \int_0^{n^2} e^{\frac{|t|y}{n}} \frac{1}{1+y^2} dy \\
&\geq \frac{1}{2\mathrm{arctg}(n^2)} \int_0^{n^2} \frac{|t|^3y^3}{3!n^3} \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{|t|^3}{12\mathrm{arctg}(n^2)} \int_0^{n^2} \frac{y^3}{n^3(1+y^2)} dy \\
&= \frac{|t|^3}{12n^3\mathrm{arctg}(n^2)} \int_0^{n^2} \left(y - \frac{y}{1+y^2} \right) dy \\
&= \frac{|t|^3(\frac{n^4}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+n^2))}{12n^3\mathrm{arctg}(n^2)}.
\end{aligned}
$$

Z tohoto omezení dostáváme $lim_{n\to\infty} M_{X_n}(t) = \infty$, pro $t \neq 0$.

X_n tedy konverguje v distribuci k X, $M_{X_n}(t)$ jsou definované na celém $\mathbb{R}$, ale posloupnost $M_{X_n}(t)$ konverguje k $M_X(t)$ pouze pro $t = 0$.

Příklad 5.3 *Určete momentovou vytvořující funkci n.v $X \sim Bi(n, p)$.*

Řešení:

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{tk} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (e^t p)^k (1-p)^{n-l} = (e^t p + (1-p))^n.$$

Příklad 5.4 *Určete momentovou vytvořující funkci n.v $X \sim N(0, 1)$.*

Řešení:

$$M_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2-2tx}{2}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2)}{2}} e^{\frac{t^2}{2}} dx = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

5.4 Důkazy centrálních limitních vět

Pomocí charakteristických funkcí nyní dokážeme větu 4.6.

Důkaz. **(Lévy-Lindebergova CLV)**

Označme $S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ a $Y_i = \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$. Pak $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, náhodné veličiny Y_i jsou nezávislé a pro jejich charakteristickou funkcí platí dle důsledku 5.5 rovnost

$$\Psi_{Y_i}(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2).$$

Tedy

$$\Psi_{S_n}(t) = \mathbb{E}e^{itS_n} = \mathbb{E}e^{it\sum_{i=1}^n Y_i} = \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{itT_i}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{itY_i} = \prod_{i=1}^n \Psi_{Y_i}(t)$$
$$= \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2)\right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2)\right)^n.$$

Rovnost $\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n e^{itY_i}\right] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{itY_i}$ plyne z vět 3.5 a 3.8. Určeme limitu $\lim_{n\to\infty}\Psi_{S_n}(t)$.

$$\lim_{n\to\infty}\Psi_{S_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(t^2)\right)^n = \lim_{n\to\infty} e^{n\cdot\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+o(t^2)\right)}$$
$$= e^{\lim_{n\to\infty} n\cdot\ln\left(1-\frac{t^2}{2n}+o(t^2)\right)} = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Nechť $Z \sim N(0,1)$, pak z příkladu 5.1 víme, že $\Psi_Z(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$. Tedy dle věty 5.3 $S_n \xrightarrow{d} Z$.

□

Ukážeme si ještě jeden důkaz Moivreovi-Laplaceovi centrální limitní věty, tentokrát pomocí momentových vytvořujících funkcí.

Důkaz. (věta 4.5) Označme $S_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ a určeme momentovou vytvořující funkci této náhodné veličiny (podobně jako v příkladu 5.3).

$$M_{S_n}(t) = \sum_{k=0}^n e^{t\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}}\binom{n}{p}p^k(1-p)^{n-k} = e^{\frac{-tnp}{\sqrt{np(1-p)}}}\sum_{k=0}^n e^{\frac{kt}{\sqrt{np(1-p)}}}\binom{n}{p}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= e^{\frac{-tnp}{\sqrt{np(1-p)}}}\sum_{k=0}^n \binom{n}{p}\left(p\cdot e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^k(1-p)^{n-k}$$
$$= e^{\frac{-tnp}{\sqrt{np(1-p)}}}\left(p\cdot e^{\frac{t}{\sqrt{np(1-p)}}} + 1 - p\right)^n = \left(p\cdot e^{\frac{t(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}} + (1-p)e^{\frac{-tp}{\sqrt{np(1-p)}}}\right)^n$$

Určíme limitu posloupnosti funkcí $M_{S_n}(t)$. K tomu využijeme následující Taylorovy rozvoje.

$$e^{\frac{t(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}} = 1 + \frac{t(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{t^2(1-p)^2}{2np(1-p)} + o(\frac{1}{n}),$$
$$e^{\frac{-tp}{\sqrt{np(1-p)}}} = 1 + \frac{-tp}{\sqrt{np(1-p)}} + \frac{t^2p^2}{2np(1-p)} + o(\frac{1}{n}).$$

Dostáváme

$$
\begin{aligned}
pe^{\frac{t(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}}+(1-p)e^{\frac{-tp}{\sqrt{np(1-p)}}} =&p\left(1+\frac{t(1-p)}{\sqrt{np(1-p)}}+\frac{t^2(1-p)^2}{2np(1-p)}\right)+\\
&+(1-p)\left(1+\frac{-tp}{\sqrt{np(1-p)}}+\frac{t^2p^2}{2np(1-p)}\right)+o(\frac{1}{n})\\
=&1+\frac{t^2(1-p)^2p}{2np(1-p)}+\frac{t^2p^2(1-p)}{2np(1-p)}+o(\frac{1}{n})=1+\frac{t^2}{2n}+o(\frac{1}{n}),
\end{aligned}
$$

Tedy

$$
\lim_{n\to\infty} M_{S_n}(t)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)^n=e^{\frac{t^2}{2}}.
$$

Jelikož $M_{S_n}(t)\to e^{\frac{t^2}{2}}$ na celém $\mathbb{R}$ a $e^{\frac{t^2}{2}}$ je momentová vytvořující funkce náhodné veličiny $X\sim N(0,1)$ (viz příklad 5.4), pak dle věty 5.7 $S_n \xrightarrow{d} X$.

□

5.5 Komplexní funkce komplexní proměnné

Definice 5.4 *Uvažujme komplexní funkce komplexní proměnné $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, která je definovaná na nějakém okolí bodu $z_0\in\mathbb{C}$. Existuje-li limita*

$$
\lim_{x\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0},
$$

*nazývá se její hodnota **derivací** funkce f v bode z_0.*

Definice 5.5 *Funkce $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ je **holomorfní** v bodě $z_0\in\mathbb{C}$, jestliže má derivaci v nějakém okolí tohoto bodu.*

*Funkce je **holomorfní** na množině, je-li holomorfní v každém bodě této množiny.*

Lemma 5.9 *Nechť $M_X(t)$ je konečná na nějakém intervalu (a,b), pak komplexní funkce $\psi(z)=\mathbb{E}e^{zX}$ je dobře definovaná a holomorfní na množině $I_{(a,b)}:=\{z=t+si\in\mathbb{C}:t\in(a,b),s\in\mathbb{R}\}$.*

Důkaz. Že je funkce $\psi(z)$ dobře definovaná na $I_{(a,b)}$ plyne z omezení

$$
|\psi(t+si)|=\left|\mathbb{E}e^{(t+si)X}\right|\le\mathbb{E}[e^{tX}|e^{isX}|]=\mathbb{E}[e^{tX}]=M_X(t).
$$

Nechť $z_0 = t_0 + is_0 \in I_{(a,b)}$. Chceme ukázat, že $\psi'(z_0) = \mathbb{E}[Xe^{z_0X}]$, tedy že

$$\lim_{z\to z_0} \frac{\psi(z) - \psi(z_0)}{z - z_0} - \mathbb{E}[Xe^{z_0X}] = \lim_{z\to z_0} \mathbb{E}\left[\frac{e^{zX} - e^{z_0X}}{z - z_0} - Xe^{z_0X}\right] = 0.$$

Nechť $|z - z_0| < \delta$, pak

$$\begin{aligned}
\left|\frac{e^{zX} - e^{z_0X}}{z - z_0} - Xe^{z_0X}\right| &= \left|e^{z_oX}\frac{e^{(z-z_0)X} - 1 - X(z - z_0)}{z - z_0}\right| \\
&= \left|e^{z_oX}\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((z-z_0)X)^k}{k!} - 1 - X(z - z_0)}{z - z_0}\right| \\
&= \left|e^{z_oX}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(z - z_0)^{k-1}X^k}{k!}\right| = e^{t_0X}|X|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|\delta X|^{k-1}}{k!} \\
&\le e^{t_0X}|X|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|\delta X|^{k-1}}{(k-1)!} \le e^{t_oX}|X|e^{\delta|X|} \le |X|(e^{(t+\delta)X} + e^{(t-\delta)X}).
\end{aligned}$$

Zvolme δ takové, aby $t + \delta \in I_{(a,b)}$ i $t - \delta \in I_{(a,b)}$, pak $\mathbb{E}|X|(e^{(t+\delta)X} + e^{(t-\delta)X}) < \infty$ (viz důkaz věty 5.6, část ii)). Tedy dle věty o integrovatelné majorantě platí

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to z_0} \mathbb{E}\left[\frac{e^{zX} - e^{z_0X}}{z - z_0} - Xe^{z_0X}\right] &= \mathbb{E}\left[\lim_{z\to z_0}\frac{e^{zX} - e^{z_0X}}{z - z_0} - Xe^{z_0X}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{z_0X}\lim_{z\to z_0}\frac{e^{(z-z_0)X} - 1}{(z - z_0)X}\cdot X - Xe^{z_0X}\right] = 0.
\end{aligned}$$

Ukázali jsme, že pro libovolné $z_0 \in I_{(a,b)}$ existuje $\psi'(z_0) = \mathbb{E}[Xe^{z_0X}]$, tedy je $\psi(z)$ holomorfní na $I_{(a,b)}$.

□

Věta 5.10 ***(O jednoznačnosti)*** *Nechť f a g jsou holomorfní funkce na souvislé otevřené podmnožině $L \in \mathbb{C}$. Nechť $D \subset L$ je nekonečná podmnožina L, která má hromadný bod a nechť dále $f = g$ na L. Pak $f = g$ na celé množině D.*

Věta 5.11 ***(Vitali's convergence theorem)*** *Uvažujme posloupnost holomorfních funkcí $\{f_n\}$ definovaných na množině L a nechť dále platí.*

i) $\{f_n\}$ jsou stejnoměrně omezené a libovolné kompatvní podmnožině $K \subset L$.

ii) $\{f_n\}$ konvergují bodově na nějaké nekonečné množině $D \subset L$, která má hromadný bod.

Pak existuje holomorfní funkce f definovaná na L taková, že $\{f_n\}$ konverguje stejnoměrně k f na libovolné kompaktní mnozině $K \subset L$.

Kapitola 6

Řešení

„V žádném jiném oboru matematiky není pro odborníky tak snadné chybovat jako v teorii pravděpodobnosti.“

—Martin Gardner

6.1 Řešení cvičení 1.2.4

1. a) $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^4} = \frac{5}{18}$,

   b) $\frac{3^4}{6^4} = \frac{1}{16}$,

   c) možnosti, jak dostat součet šest, jsou: $1+1+1+3$ a $2+2+1+1$ (až na pořadí). První součet lze dosáhnout čtyřmi způsoby, druhý šesti. Tedy $P(A) = \frac{\binom{4}{1}+\binom{4}{2}}{6^4} = \frac{10}{6^4}$,

   d) označme $(S = k)$ jev, že součet čísel bude k, a dále označme A^c jev, že součet bude pět či méně, pak $P(A^c) = P(S = 5) + P(S = 4) = \frac{4}{6^4} + \frac{1}{6^4}$, tedy $P(A) = 1 - P(A^c) = \frac{6^4-5}{6^4}$,

   e) označme A^c jev, že nepadne žádná šestka, pak $P(A^c) = \frac{5^4}{6^4}$, tedy $P(A) = \frac{6^4-5^4}{6^4}$.

2. a) $\frac{\binom{6}{1}\binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{3}{10}$,

   b) $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{1}+\binom{6}{1}\binom{4}{2}+\binom{6}{0}\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = 1 - \frac{\binom{6}{3}\binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{6}$.

3. $\frac{1}{8}$.

4. a) Označme A_i jev, že i-tý dopis bude ve správné obálce, pak $P(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!}$, $P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)!}{n!}$ pro $i \neq j$ atd. Pak

$$\begin{aligned}
P(A) &= P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + ...(-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \\
&= n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + \binom{n}{3}\frac{(n-3)!}{n!} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \\
&= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - ...(-1)^{n+1}\frac{1}{n!} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1}\frac{1}{i!}.
\end{aligned}$$

b) Jelikož $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, pak

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1}\frac{1}{i!} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} &= -\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} + 1 - 1\right) \\
&= -\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} - 1\right) = 1 - \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = 1 - e^{-1}.
\end{aligned}$$

5. a) Nejdříve vybereme k cestujících, kteří budou v prvním vagónu. To lze udělat $\binom{r}{k}$ způsoby. Ostatní cestující rozdělíme rovnoměrně náhodně do dalších vagónů. $P(A) = \frac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r}$. Toto rozdělení se nazývá binomické rozdělení (s parametry r a $\frac{1}{n}$), což je dobře vidět, pokud si hledanou pravděpodobnost zapíšeme ve tvaru $P(A) = \binom{r}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{r-k}$.

b) Označme A_i jev, že i-tý vagón bude prázdný, pak $P(A_i) = \frac{(n-1)^r}{n^r}$,

$P(A_i \cap A_j) = \frac{(n-2)^r}{n^r}$ pro $i \neq j$ ..., a

$$P(A^c) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$
$$= n\frac{(n-1)^r}{n^r} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)^r}{n^r} + ...(-1)^{n+1} \cdot 0$$
$$= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{(n-i)^r}{n^r}.$$

Tedy

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{(n-i)^r}{n^r}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i} \binom{n}{i} \frac{(n-i)^r}{n^r}.$$

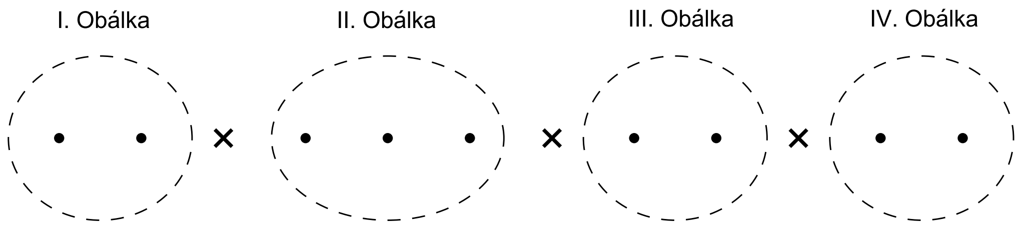
c)

$$\lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \frac{\binom{r}{k}(n-1)^{r-k}}{n^r} = \lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \frac{\binom{r}{k}\left(\frac{n-1}{n}\right)^r}{(n-1)^k}$$
$$= \lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \frac{\binom{r}{k}}{(n-1)^k} \cdot \lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n\cdot\frac{r}{n}}$$
$$= e^{-\lambda} \lim_{n,r\to\infty, r/n\to\lambda} \frac{r(r-1)...(r-k+1)}{(n-1)^k k!} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Poznamenejme, že toto limitní rozdělení se nazývá Poissonovo (s parametrem λ).

6. a) Jednotlivá rozdělení r tisícikorun do n obálek lze popsat pomocí uspořádané $(n+r-1)$-tice prvků, kde r prvků je jednoho typu (tisícikoruny) a $n-1$ prvků druhého typu (hranice oddělující jednotlivé obálky), viz obrázek 6.1. Počet všech možností je tedy $\binom{r+n-1}{n-1}$. Počet příznivých jevů je $\binom{r+n-k-2}{n-2}$, tedy výsledná pravděpodobnost je

$$P(A) = \frac{\binom{r+n-k-2}{n-2}}{\binom{r+n-1}{n-1}}.$$



Obrázek 6.1: Jednotlivé obálky jsou znázorněny čárkovanou čarou, tisícikoruny černým puntíkem a křížek označuje hranici mezi obálkami.

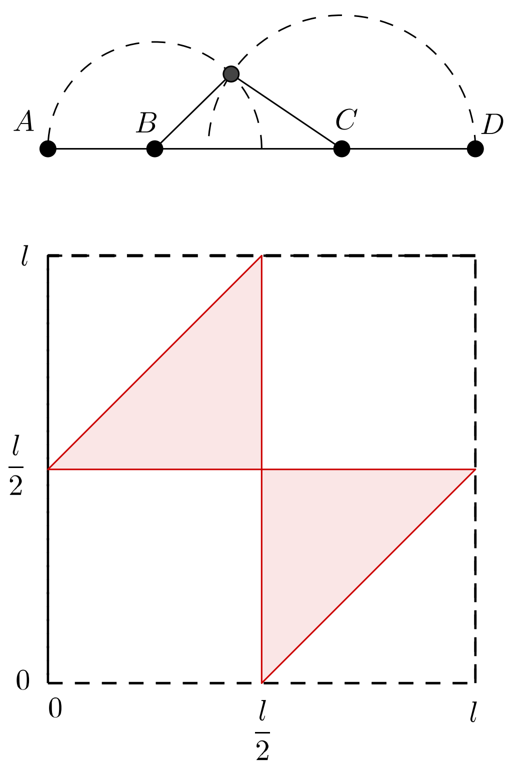
b)

$$P(A) = \frac{\binom{r-1}{n-1}}{\binom{r+n-1}{n-1}}.$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{\binom{r+n-k-2}{n-2}}{\binom{r+n-1}{n-1}} &= \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{(r+n-k-2)!(n-1)!r!}{(r+n-1)!(n-2)!(r-k)!} \\
&= \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{(n-1)r\cdot ...(r-k+1)}{(r+n-1)\cdot ...\cdot(r+n-k-1)} \\
&= \lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{n-1}{r+n-1}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{r-i}{r+n-2-i} \\
&= \left(\lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda} \frac{n-1}{r+n-1}\right)\prod_{i=0}^{k-1}\lim_{n,r\to\infty,\frac{r}{n}\to\lambda}\frac{r-i}{r+n-2-i} \\
&= \frac{1}{\lambda+1}\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^k = \frac{\lambda^k}{(\lambda+1)^{k+1}}.
\end{aligned}$$

7. Úsečku AD rozdělme dvěma body B a C na tři části a označme x délku úsečky AB a y délku úsečky AC. Aby bylo možné z takto vzniklých úseček sestrojit trojúhelník, musí být $\min\{x, y\} < \frac{l}{2}$, $|y - x| < \frac{l}{2}$ a $l - \max\{x, y\} < \frac{l}{2}$. Tedy prostor všech možných jevů je popsán čtvercem $[0, l]^2$ a oblast příznivých jevů nerovnostmi nahoře (na obrázku 6.2 znázorněna červeně). Proto $|\Omega| = l^2$, $|A| = \left(\frac{l}{2}\right)^2$, a tedy
$$P(A) = \frac{1}{4}.$$



Obrázek 6.2: Čtverec vyznačuje množinu všech jevů, které mohou nastat, červeně vyznačená oblast označuje množinu dvojic bodů, které rozdělí úsečku tak, aby šel sestrojit trojúhelník.

8. Uvažujme kružnici o poloměru $R > 0$.

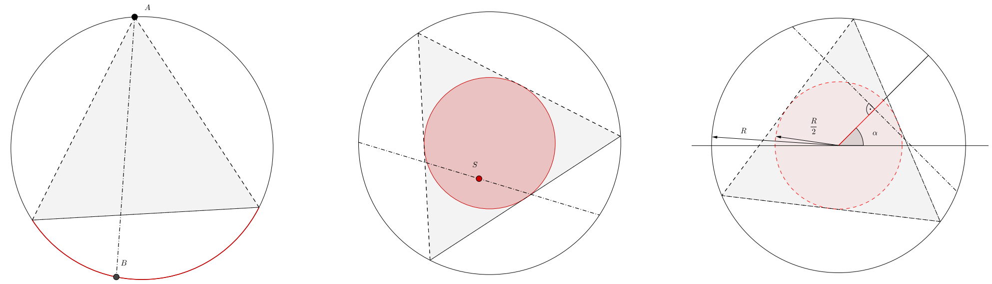
   I. Využijeme toho, že každá tětiva je jednoznačně určena dvojicí bodů na kružnici. Zvolíme-li první náhodně, pak druhý musí ležet v nejvzdálenější třetině kružnice (viz obrázek 6.3, oblast vyznačená červeně). Tedy Ω je reprezentováno celou kružnicí a oblast příznivých jevů jednou třetinou kružnice. Pak $|\Omega| = 2\pi R$, $|A| = \frac{2\pi R}{3}$ a
   $$P(A) = \frac{1}{3}.$$

   II. Každá tětiva je také jednoznačně určena svým středem (až na situaci, kdy střed tětivy leží ve středu kružnice; tento jev má ale nulovou pravděpodobnost a lze ho tedy při výpočtu zanedbat). Jelikož kružnice vepsaná uvažovanému trojúhelníku má poloměr $\frac{R}{2}$, oblast příznivých jevů je popsána body uvnitř této menší kružnice (viz obrázek 6.3). Proto $|\Omega| = \pi R^2$, $|A| = \frac{\pi R^2}{4}$ a
   $$P(A) = \frac{1}{4}.$$

   III. Každá tětiva je rovněž určena vzdáleností od středu a úhlem, který svírá s osou x (na obrázku uvažujeme pro jednoduchost kružnici se středem v počátku soustavy souřadnic). Jelikož o délce tětivy rozhoduje pouze její vzdálenost od středu a na úhlu otočení tato délka nezávisí, lze Ω popsat pomocí bodů v intervalu $[0, R]$, oblast pžíznivých jevů intervalem $[0, \frac{R}{2}]$, a tedy
   $$P(A) = \frac{1}{2}.$$

   I když se na první pohled zdá, že jsou tato řešení ve vzájemném rozporu, není tomu úplně tak. Problém je v nejednoznačnosti zadání této úlohy. Každá z uvedených variant prezentuje jednu z možností náhodných voleb tětivy, ale tyto možnosti nejsou stejné a to vede k různosti výsledků. Úloha je tedy nepřesně zadána. Proto nelze ani jednu z prezentovaných variant řešení označit za lepší či správnější, pokud předem nekonkretizujeme zadání úlohy.

9. Uvažujme pouze parketu, ve které leží ten kraj jehly, který je více vlevo (viz obrázek 6.). Pak je poloha jehly jednoznačně (až na vertikální posunutí, které pro nás není podstatné) určena vzdáleností levého krajního bodu jehly k pravé spáře (na obrázku 6.4 vzdálenost označená jako x) a natočením jehly od horizontální osy (na obrázku 6.4 úhel α). Je-li tedy $r\cos(\alpha) > x$, pak jehla za-



Obrázek 6.3: **Levý obrázek:** První náhodně zvolený konec tětivy označíme A, pak je oblast příznivých jevů označena červeně. Bod B je druhý náhodně zvolený konec tětivy (ta je vyznačena čerchovanou čarou). Rovnostranný trojúhelník vepsaný kružnici je vyznačen čárkovaně.
Prostřední obrázek: Bod S vyznačuje střed tětivy (tětiva je vyznačena čerchovanou čarou). Oblast příznivých jevů je vyznačena červeně.
Pravý obrázek: Značení je podobné jako u předchozích obrázků. Při konkrétní volbě úhlu α je množina středů tětiv určena úsečkou délky R. Polovina úsečky (vyznačena červeně) určuje tětivy delší než délka strany trojúhelníka vyznačeného čárkovanou čarou.

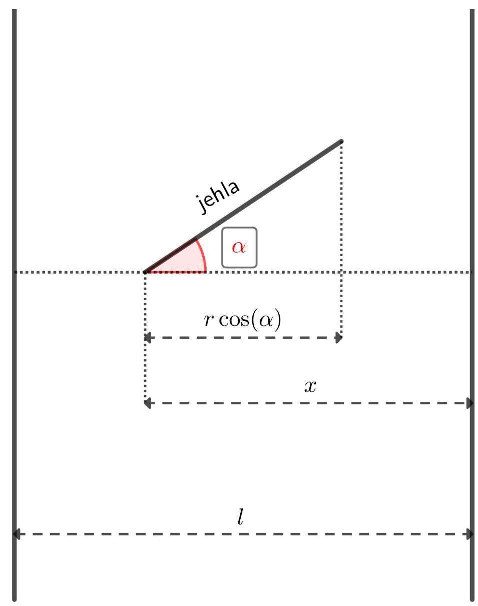
sahuje i do vedlejší parkety (protíná pravou spáru námi zobrazené parkety). V opačném případě leží celá jehla na jedné parketě. Tedy $\Omega = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, l]$, kde první souřadnice popisuje úhel natočení jehly od horizontální osy (α) a druhá souřadnice popisuje vzdálenost levého okraje jehly od pravé spáry (x). Množina příznivých jevů je v obdélníku $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [0, l]$ shora omezena grafem funkce $r\cos(\alpha)$ viz obrázel 6.5. Tedy

$$P(A) = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos(\alpha) d\alpha}{\pi l} = \frac{2r}{\pi l}.$$

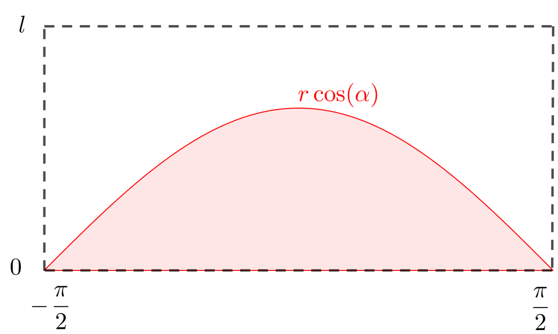
10. Důkaz tvrzení 1.1:

    i) Nezápornost $P(A)$ plyne z bodu ii) v definici 1.4. Pokud by $P(A) > 1$, pak $P(\Omega) = P(A) + P(A^c) > 1$, a tedy bychom došli ke sporu s bodem i) v téže definici.

    ii) Jelikož $B = (B \setminus A) \cup A$, pak $P(B) = P(B \setminus A) + P(A)$, a tedy $P(B) \geq P(A)$ z nezápornosti pravděpodobnosti (bod i) v definici 1.4).



Obrázek 6.4: Zobrazení jehly na podlaze. x popisuje vzdálenost levého krajního bodu jehly od pravého okraje parkety, α je úhel otočení jehly od vertikální osy.



Obrázek 6.5: Prostor Ω s vyznačením množiny příznivých elementárních jevů (červeně).

iii) Plyne přímo z bodů i) a iii) v definici 1.4.

iv) Jelikož $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ a jevy $(A \setminus B)$, $(A \cap B)$ jsou disjunktní, pak

$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$. Podobně $P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$. Jev $A \cup B$ rozdělíme na tři disjunktní jevy $A \setminus B$, $A \cap B$ a $B \setminus A$, tedy

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

v) Je-li $A \subset B$, pak jevy A a $B \setminus A$ dělí jev B na dva disjunktní podjevy a tedy $P(B) = P(B \setminus A) + P(A)$.

6.2 Řešení cvičení 1.3.3

1. a) Označme A jev, že padla šestka, a B jev, že součet je osm. Jev B je tvořen elementárními jevy $(2,6), (3,5), (4,4), (5,3)$ a $(6,2)$, kde (i,j) značí jev, že na první kostce padlo i a na druhé j. Tedy $P(B) = \frac{5}{36}$, $P(A \cap B) = P(\{(2,6),(6,2)\}) = \frac{2}{36}$, proto $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{5}$.

   b) $P(A) = \frac{11}{36}$. Jelikož $P(A \cap B) = \frac{2}{36} \neq \frac{11}{36} \cdot \frac{5}{36} = P(A)P(B)$, nejsou jevy A a B nezávislé.

2. $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ a $P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Tedy jevy A, B a C nejsou nezávislé, ale jsou po dvou nezávislé.

3. I. Označme A_i jev, že v i-tém hodu padne součet 5, a B_i, že v i-tém hodu padne součet 7. Pravděpodobnost, že v i-tém kole bude hra ukončena a padne součet 5, je

$$P(A_i) \prod_{j=1}^{i-1} (1 - P(A_j \cup B_j)) = P(A_i) \prod_{j=1}^{i=1} (1 - P(A_j) - P(B_j)) = \frac{4}{36} \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{i-1}.$$

Tedy pravděpodobnost, že hra bude ukončena hodem se součtem 5, je

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{4}{36} \left(1 - \frac{10}{36}\right)^{i-1} = \frac{4}{36} \frac{1}{1 - \frac{26}{36}} = \frac{2}{5}.$$

   II. Druhý způsob řešení: Označme A jev, že v daném kole padl součet 5, a B jev, že padl součet 7. Jev $A \cup B$ tedy označuje jev, že v daném kole hra skončila. Pak

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}}=\frac{2}{5}.$$

Abychom tuto pravděpodobnost mohli považoval za hledanou pravděpodobnost, potřebujeme ověřit, že hra skončí v konečném čase s pravděpodobností jedna. Označme C_i jev, že hra neskoncila do i-tého kola včetně, pak $P(C_i)=\left(\frac{26}{36}\right)^i$, tedy $\lim_{i\to\infty}P(C_i)=0$.

4. Označme A jev, že náhodně vybraná osoba má dlouhé vlasy, a B jev, že náhodně vybraná osoba je chlapec.

   I. Pak $P(B)=\frac{7}{10}$, $P(B^c)=\frac{3}{10}$, $P(A|B)=\frac{1}{10}$ a $P(A|B^c)=\frac{8}{10}$.

   a)
   $$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|B^c)P(B^c)=\frac{7}{100}+\frac{3\cdot 8}{100}=\frac{31}{100}.$$

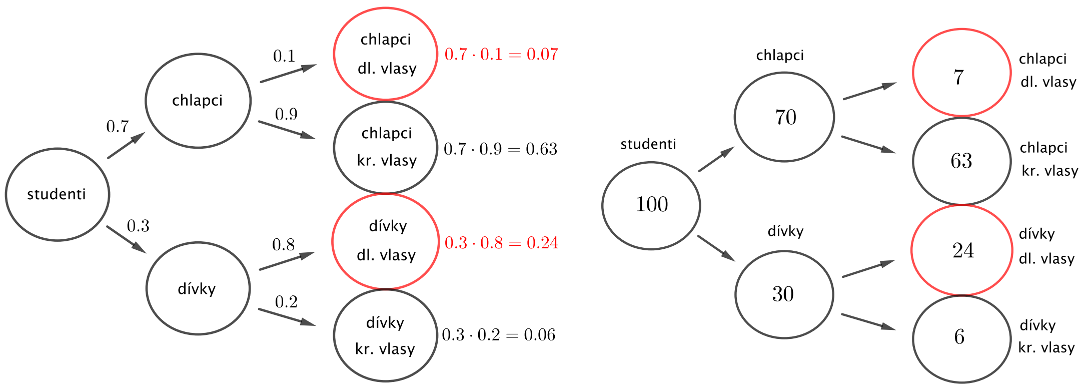
   b)
   $$P(B^c|A)=\frac{P(A\cap B^c)}{P(A)}=\frac{P(A|B^c)P(B^c)}{P(A)}=\frac{24}{31}.$$

   II. Úloha se dá řešit i graficky:

   Z obrázku 6.6 (vlevo) vidíme, že pravděpodobnost výběru osoby s dlouhými vlasy je $P(A)=0.24+0.07=0.31$ a pravděpodobnost výběru dlouhovlasé dívky je 0.24. Pravděpodobnost $P(A|B^c)$ je tedy $P(A|B^c)=\frac{0.24}{0.24+0.07}=\frac{24}{31}$. Někdy je pro studenty příjemnější následující varianta řešení. Uvažujme, že by ve třídě bylo 100 studentů. Pak dostaneme ze zadání následující rozdělení do skupin (obrázek 6.6 vpravo). Dále postupujeme stejně jako v předchozím řešení.

5. Označme A_i jev, že profesor zapomene deštník v i-tém obchodě. Pak

   $P(A_1)=P(A_2|A_1^c)=P(A_3|A_1^c,A_2^c)=P(A_4|A_1^c,A_2^c,A_3^c)=\frac{1}{4}$. Poznamenejme, že A_i^c značí jev, že v i-tém obchodě profesor deštník nezapomene. Využijeme toho, že $A_4\subset(A_1^c\cap A_2^c\cap A_3^c)$ (aby mohl profesor deštník zapomenout v po-



Obrázek 6.6: **Levý obrázek:** Grafické řešení s pravděpodobnostmi.
Pravý obrázek: Grafické řešení s rozdělením určitého počtu (v tomto případě 100) studentů do skupin.

sledním obchodě, tak ho tam musel donést).

$$\begin{aligned} P(A_4) &= P(A_4 \cap (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)) = P(A_4|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\ &= P(A_4|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)P(A_3^c|A_1^c \cap A_2^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_1^c) \\ &= P(A_4|A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)(1 - P(A_3|A_1^c \cap A_2^c))(1 - P(A_2|A_1^c))(1 - P(A_1)) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_4|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \frac{P(A_4)}{P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)} \\ &= \frac{P(A_4)}{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)} \\ &= \frac{\frac{3^3}{4^4}}{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{3^2}{4^2} + \frac{3^3}{4^3}\right)} = \frac{\frac{3^3}{4^4}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{3^4}{4^4}}{1 - \frac{3}{4}}} = \frac{3^3}{4^4 - 3^4}. \end{aligned}$$

6. Označme A_i, $i = 1, 2, 3$, jevy, že v $i-$tém trezoru je odměna, pak $P(A_i) = \frac{1}{3}$. BÚNO předpokládejme, že jsme na začátku zvolili trezor číslo 1, a označme B_i, $i = 2, 3$, jevy, že je poté otevřen i-tý trezor (který je prázdný). Je-li odměna v námi zvoleném trezoru, pak může být otevřen libovolný ze zbývajících dvou

trezorů. Ani jedna z těchto variant není preferovaná, a tak $P(B_i|A_1) = \frac{1}{2}$. Jelikož $P(B_i|A_1) = \frac{P(B_i \cap A_1)}{P(A_1)}$ a $P(A_1) = \frac{1}{3}$, tak $P(A_1 \cap B_i) = \frac{1}{6}$. Je-li odměna v i-tém trezoru, $i = 2, 3$, pak nemůže být po první volbě otevřen a musí být otevřen trezor zbývající, proto $P(A_i \cap B_i) = 0$ a $P(B_j|A_i) = 1$ pro $i \neq j \Rightarrow P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{3}$ pro $i = 2, 3$ a $i \neq j$.

Jelikož jsou jevy A_1, A_2 a A_3 disjunktní a dohromady pokrývají celý pravděpodobnostní prostor (jsou v nich obsaženy všechny možné výsledky pokusu), je $P(B_i) = \sum_{j=1}^{3} P(A_j \cap B_i) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$. Pak

$$P(A_1|B_i) = \frac{P(A_1 \cap B_i)}{P(B_i)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(A_j|B_i) = \frac{P(A_j \cap B_i)}{P(B_i)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad i \neq j,$$

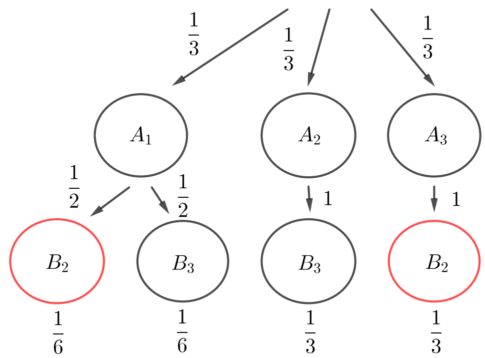
tedy i po otevření prázdného trezoru zůstane pravděpodobnost výhry pro prvně zvolený trezor stejná, ale pro zbývající trezor je dvojnásobná. Změna trezoru se tedy vyplatí.

Úlohu lze řešit i graficky. Použijeme stejné značení jako v předešlém řešení. Pak dostaneme následující obrázek (obrázek 6.7).

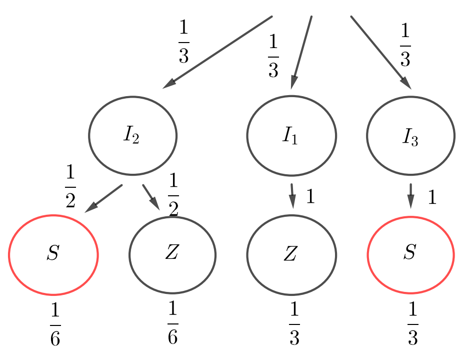
Z obrázku 6.7 vidíme, že v případě otevření druhého trezoru (červeně vyznačené případy) je dvakrát větší šance, že je výhra ve třetím trezoru, než že je v prvním trezoru (který jsme na počátku vybrali).

7. Zavedeme si následující značení: $(1, z_1)$ je jev, že z první zásuvky vytáhneme první zlatou minci, podobně označíme další elementární jevy $(1, z_2)$, $(2, z)$, $(2, s)$, $(3, s_1)$ a $(3, s_2)$. První číslo vždy značí, z jaké zásuvky bylo taženo, a s a z, značí tažení stříbrné, resp. zlaté, mince. Označíme-li jev ,,byla tažena stříbrná mince" písmenem S a jev ,,v zásuvce zbyla zlatá mince" jako jev A, pak
$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(\{(2, s)\})}{P(\{(2, s), (3, s_1), (3, s_2)\})} = \frac{1}{3}.$$

Úlohu lze řešit i graficky (obrázek 6.8). Použijeme značení I_i ... vybrali jsme i-tou zásuvku, Z ... vytáhli jsme zlatou minci a S ... vytáhli jsme stříbrnou minci. Pak
$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{P(I_2 \cap S)}{P(S)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$



Obrázek 6.7: Grafické řešení Monty Hallova problému: Uvažujeme situaci, kdy si soutežící na začátku zvolí první trezor. A_i značí jev, že je výhra v i-tém trezoru, a B_i jev, že moderátor otevřel i-tý trezor (který musí být prázdný).



Obrázek 6.8: Grafické řešení úlohy o zásuvkách: I_i značí jev, že byla vybrána i-tá zásuvka, a S a Z jevy, že byla vytažena stříbrná, resp. zlatá mince. Povšimněme si, že grafické řešení úloh 7. a 8. je stejné (až na značení jevů).

8. Označme jevy

    1. $A =$ „řidič požil alkohol,“
    2. $H =$ „řidič způsobil nehodu.“

    Pak máme $P(A) = 0.01$ a $P(A|H) = 0.1$. Tudíž

$$0.1 = P(A|H) = \frac{P(H|A) \cdot P(A)}{P(H|A) \cdot P(A) + P(H|A^c) \cdot P(A^c)} =$$

$$= \frac{P(H|A) \cdot 0.01}{P(H|A) \cdot 0.01 + P(H|A^c) \cdot 0.99} = \frac{1}{1 + \frac{P(H|A^c)}{P(H|A)} \cdot 99} .$$

    A výsledek je

$$\frac{P(H|A)}{P(H|A^c)} = 11 .$$

9. Označme jevy

    $A =$ “kapitán se dožil důchodu,”

    $B =$ “kapitán zažil ztroskotání.”

    Pak máme $P(A|B) = \frac{2}{3}$, $P(A|\overline{B}) = 1$, $P(B|A) = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$ (odhad)
    Bayesova věta:

$$P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(B) \cdot P(A|B) + P(\overline{B}) \cdot P(A|\overline{B})}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{\frac{2}{3}P(B)}{\frac{2}{3}P(B) + (1 - P(B))}$$

$$P(B) = \frac{3}{25} = 0.12.$$

    Alternativní řešení: Na 5 přeživších námořníků připadá v průměru $5 \cdot \frac{3}{2} = 7.5$ účastníků ztroskotání, z toho 2.5 nepřežilo, celkový počet je $60 + 2.5 = 62.5$ a pravděpodobnost, že se jedná o účastníka ztroskotání, je $\frac{7.5}{62.5} = \frac{3}{25}$ (tyto četnosti nám jen názorněji nahrazují pravděpodobnosti, proto není nutné, aby byly celočíselné, pokud vycházíme z toho, že statistika úmrtnosti při ztroskotáních je založena i na dalších případech kromě zde uvažovaných; z těch by nemohla vyjít $\frac{1}{3}$).

10.

$$P[N=2 \mid S=4] = \frac{P[N=2, S=4]}{P[S=4]} = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{216}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1296}},$$

$$P[S=4 \mid N \text{ je sudé}] = \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{12}+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{1296}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\cdots} = \frac{4^2\cdot 3^3+1}{4^4\cdot 3^3}.$$

11. a) Jde o pravděpodobnost, že mladší z dětí je dcera, což nastává s pravděpodobností q blízkou $1/2$, přesněji asi 0.485. (Předpokládáme, že pohlaví dětí jsou nezávislá, což je přibližně správně.)

    b) Pokud pro jednoduchost předpokládáme $q = 1/2$, pak předpoklad J, že „rodina má aspoň 1 dceru“, je splněn s pravděpodobností $P(J) = 1 - (1-q)^2 = 3/4$, ale to, že „rodina má 2 dcery“, je podjev $D \subseteq J$ s pravděpodobností $P(D) = q^2 = 1/4 = P(D \cap J)$. Podmíněná pravděpodobnost je

    $$P(D|J) = \frac{P(D\cap J)}{P(J)} = \frac{P(D)}{P(J)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}\,.$$

    Obecněji pro pravděpodobnost narození dívky q

    $$P(D|J) = \frac{q^2}{1-(1-q)^2}\,,$$

    pro $q = 0.485$

    $$P(D|J) = \frac{q^2}{1-(1-q)^2} \doteq 0.32\,.$$

12. Označme p pravděpodobnost chybného slova před opravou. Opravena 2 % slov, tedy dostaneme rovnici $0.02 = 0.99\cdot p + 10^{-4}\cdot(1-p)$. $p = \frac{0.02-0.0001}{0.99-0.0001} = \frac{0.0199}{0.9899} = 2.0103\cdot 10^{-2}$. Po opravě chybně $0.01\cdot p + 10^{-4}\cdot(1-p) = 2.9902\cdot 10^{-4}$.

6.3 Řešení cvičení 2.2.4

1. Ne. Uvažujme pravidelnou hrací kostku a nechť si dva různí lidé její strany označí čísly 1,...,6 tak, aby se značení alespoň na některých stranách neshodovalo. Pokud X je náhodná veličina označující, jaké číslo padlo na kostce vzhledem k prvnímu značení a Y je náhodná veličina označující, jaké číslo padlo na kostce vzhledem k druhému značení, pak rozdělení těchto veličin je stejné ($P(X=k) = P(Y=k) = 1/6$ pro $k = 1,...,6$), ale náhodné veličiny X a Y nejsou stejné, jelikož $P(X=Y) < 1$ (existuje $\omega \in \Omega$ takové, že $X(\omega) \neq Y(\omega)$).

2. Ano. $P_X((a,b)) = P(X \in (a,b)) = P(X < b) - P(X \leq a) = F(b) - \lim_{x \to a+} F(x)$.

3. Ano. $P_Y((a,b)) = P(Y \in (a,b)) = P(g(X) \in (a,b)) = P(X \in g^{-1}((a,b))) = P_X(g^{-1}((a,b)))$, kde $g^{-1}(M)$ značí vzor množiny M při zobrazení g.

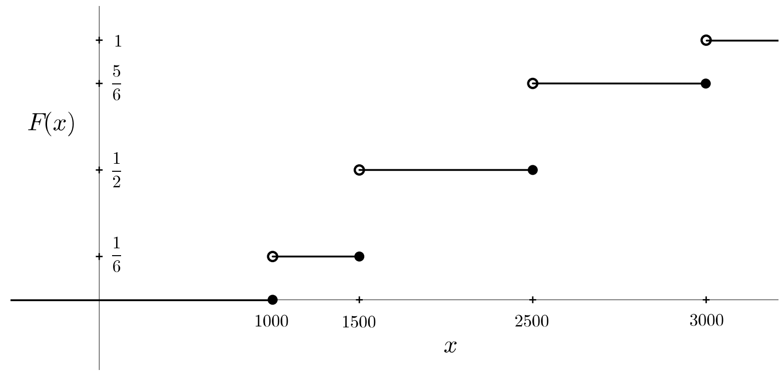
4. Nemusí. Uvažujme dvě množiny elementárních jevů $\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2\}$ a $\Omega_2 = (0,1)$. Nechť $\mathcal{F}_1 = \{\Omega_1, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \emptyset\}$ a $\mathcal{F}_2 = \mathcal{B}(0,1)$, tedy borelovská σ-algebra na intervalu $(0,1)$. Dále nechť $P_1(\omega_1) = P_1(\omega_2) = \frac{1}{2}$ a nechť $P_2(B) = \mu^1(B)$, $\forall B \in \mathcal{F}_2$, kde μ^1 značí jednorozměrnou Lebesgueovu míru. Zedefinujeme $X_1(\omega_1) = 1$, $X_1(\omega_2) = 0$, $X_2(x) = 1$ pro $x \in (0, 0.5)$ a $X_2(x) = 0$ pro $x \in [0.5, 1)$. Pak $X_1 \sim Alt(\frac{1}{2})$ a $X_2 \sim Alt(\frac{1}{2})$, ale X_1 je definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$, zatímco X_2 je definovaná na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$.

5. Ano. Důkaz provedeme pro situaci, kdy $\min\{x_i\} > -\infty$. Označme $x_1, x_2, ...$ hodnoty, kterých náhodná veličina X nabývá, a nechť $x_1 < x_2 < x_3 < ....$ Pak pro každé $x \in (x_i, x_{i+1}]$ platí $F_X(x) = P(X < x) = \sum_{j=1}^{i} P(X = x_j) = \sum_{j=1}^{i} p_j$, tedy $F_X(x)$ je konstantní na každém intervalu $(x_i, x_{i+1}]$ i na intervalu $(-\infty, x_1]$. Pokud je $\max\{x_i\} < \infty$, pak je $F_X(x)$ konstantní (rovna jedné) na intervalu $(\max\{x_i\}, \infty)$.

6. Ne. Uvažujme náhodnou veličinu X s distribuční funkcí
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$
pak X nabývá nespočetně hodnot, ale F není spojitá funkce.

7. a)
$$P(X = 1000 = (500 + 500)) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6},$$
$$P(X = 1500 = (1000 + 500)) = \frac{\binom{2}{1} \cdot 1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 2500 = (2000 + 500)) = \frac{\binom{2}{1} \cdot 1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3},$$
$$P(X = 3000 = (2000 + 1000)) = \frac{1 \cdot 1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}.$$

b) Graf distribuční funkce $F_X(x)$:



c) $Y = \frac{X-1000}{5}$, tedy

$$\begin{aligned} P(Y=0) = P(X=1000) &= \frac{1}{6}, \\ P(Y=100) = P(X=1500) &= \frac{1}{3}, \\ P(Y=300) = P(X=2500) &= \frac{1}{3}, \\ P(Y=400) = P(X=3000) &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

d)

$$P(Y > 210) = P(Y=300) + P(Y=400) = \frac{1}{2}.$$

e)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \sum_{k \in S} k \cdot P(X=k) = 1000 \cdot \frac{1}{6} + 1500 \cdot \frac{1}{3} + 2500 \cdot \frac{1}{3} + 3000 \cdot \frac{1}{6} = 2000. \\ \mathrm{var}X &= \sum_{k \in S} (k - \mathbb{E}X)^2 \cdot P(X=k) \\ &= 1000^2 \cdot \frac{1}{6} + 500^2 \cdot \frac{1}{3} + 500^2 \cdot \frac{1}{3} + 1000^2 \cdot \frac{1}{6} = 500000. \end{aligned}$$

6.4 Řešení cvičení 2.5

1. a) $P(X=k) = \left(\frac{7}{8}\right)^k \frac{1}{8}, \quad k = 0, 1, ...,$ tedy X má geometrické rozdělení s parametrem $p = \frac{1}{8}$.

b)

$$\mathbb{E}X = \frac{p}{1-p} = 7,$$

viz sekce 2.3.3.

c)

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} = 56,$$

viz sekce 2.3.3.

2. Označme X počet obdržených trestných minut.

a)

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] \\ &= 1 - \binom{20}{0} 0.91^{20} - \binom{20}{1} 0.09 \cdot 0.91^{19} - \binom{20}{2} 0.09^2 \cdot 0.91^{18} \\ &= 0.2666. \end{aligned}$$

b)

$$\mathbb{E}X = np = 20 \cdot 0.09 = 1.8.$$

c)

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{20}{0} 0.91^{20} = 0.91^{20}, \\ P(X=1) &= \binom{20}{1} 0.09 \cdot 0.91^{19} = 20 \cdot 0.09 \cdot 0.91^{19}, \\ P(X=2) &= \binom{20}{2} 0.09^2 \cdot 0.91^{18} = \frac{20 \cdot 19}{2} 0.09^2 \cdot 0.91^{18}. \end{aligned}$$

Dostaneme $P(X=1) = 20 \cdot \frac{0.09}{0.91} \cdot P(X=0)$, tedy $P(X=0) < P(X=1)$, $P(X=2) = \frac{19}{2} \cdot \frac{0.09}{0.91} \cdot P(X=1) = 0.9396 \cdot P(X=1)$, tedy $P(X=1) > P(X=2)$. Podobně dostaneme $P(X=3) < P(X=2)$ atd. Nejpravděpodobnější tedy je, že závodník získá jednu trestnou minutu.

3.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda,\\
\mathbb{E}X^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\
&= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2+\lambda,\\
\mathrm{var}X &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2+\lambda-\lambda^2 = \lambda.
\end{aligned}$$

4. Počet vyklíčených zrn má binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n,p)$ a pro $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 1)$ nabývá hodnoty 1 s pravděpodobností

$$g(n) = \tbinom{n}{1}\, p^1\,(1-p)^{n-1} = n\,p\,(1-p)^{n-1}\,.$$

Taková funkce g je definovaná pro všechna kladná reálná n a je unimodální (do maxima rostoucí, pak klesající), takže maximum nastává v jediném bodě s nulovou derivací

$$g'(n) = p\,(1-p)^{n-1} + n\,p\,(1-p)^{n-1}\,\ln(1-p) = p\,(1-p)^{n-1}\big(1+n\,\ln(1-p)\big)\,.$$

Nulová může být pouze poslední závorka, a to pro

$$n = \frac{-1}{\ln(1-p)}\,.$$

Maximum v oboru přirozených čísel nastává pro jedno ze dvou celých čísel, která jsou nejblíže této hodnotě. Pro $p = 1/3$ je g' nulová v

$$n = \frac{-1}{\ln\dfrac{2}{3}} \doteq 2.466,$$

tedy zde nastává maximum pro $n \in \{2,3\}$, a to pro obě hodnoty, neboť dosazením zjistíme, že

$$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2-1} = \frac{4}{9} = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-1}.$$

P.S.: Z ekonomických důvodů se proto vyplatí zasadit jen 2 zrna.

5. Označme X_1 náhodnou veličinu popisující počet žen během půl hodiny a X_2 náhodnou veličinu popisující počet mužů během půl hodiny. Pak

$$P(X_1 = k) = \frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \quad \text{a} \quad P(X_2 = k) = \frac{\lambda_2^k}{k!} e^{-\lambda_2},$$

kde $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = 2$. Hledaná pravděpodobnost je tedy

$$\begin{aligned} P(X_1 \geq 3, X_2 = 0) = P(X_1 \geq 3)P(X_2 = 0) &= \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^k}{k!} e^{-3} \frac{2^0}{0!} e^{-2} = e^{-5} \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^k}{k!} \\ &= \left(1 - \sum_{k=0}^{2} \frac{3^k}{k!} e^{-3}\right) e^{-2}. \end{aligned}$$

6. Označme $X_{(t)}$ počet příchozích hovorů za časový interval $(0, t)$ (v minutách).

   a) Je-li $X_{(60)}$ počet příchozích hovorů za hodinu, pak $\mathbb{E}X_{(60)} = \lambda = 20$. Rozdělení $X_{(10)}$ počtu příchozích hovorů během deseti minut je tedy Poissonovo s parametrem $\lambda = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$, tedy $P(X_{(10)} = k) = e^{-\frac{10}{3}} \frac{\left(\frac{10}{3}\right)^k}{k!}$, pro $k = 0, 1, ...$

   b) Nechť Y je čas mezi dvěma hovory (v minutách). Pak

$$\begin{aligned} F_Y(t) = P(Y < t) &= 1 - P(Y \geq t) = 1 - P(X_t = 0) \\ &= 1 - e^{-\frac{t}{3}} \frac{\left(\frac{t}{3}\right)^0}{0!} = 1 - e^{-\frac{t}{3}}. \end{aligned}$$

$$h_Y(t) = F'_Y(t) = \frac{e^{-\frac{t}{3}}}{3}, \quad t > 0.$$

   Rozdělení Y je tedy exponenciální s parametrem $\lambda = \frac{1}{3}$.

   c) Pro distribuční funkci v tomto případě platí

$$\begin{aligned} F_{Y|Y>T}(t) &= P(Y < t|Y > T) = 1 - P(Y \geq t|Y > T) = 1 - \frac{P(Y \geq t)}{P(Y > T)} \\ &= 1 - \frac{P(X_t = 0)}{P(X_T = 0)} = 1 - \frac{e^{-\frac{t}{3}}}{e^{-\frac{T}{3}}} = 1 - e^{-\frac{t-T}{3}} \\ &= F_Y(t - T), \quad t \geq T. \end{aligned}$$

d)

$$\sum_{k=2}^{\infty} P(X_{(1)}=k)=\sum_{k=2}^{\infty} e^{-\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{3^k}}{k!}=1-\sum_{k=0}^{1} e^{-\frac{1}{3}}\frac{\frac{1}{3^k}}{k!}=1-e^{-\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{3})=1-e^{-\frac{1}{3}}\frac{4}{3}.$$

e) $P(X_t=0)=e^{-\lambda t}=e^{-\frac{t}{3}}\geq 0.9$, tedy $-\frac{t}{3}\geq \ln 0.9 \Rightarrow t\leq 3\ln 0.9=0.316$. Operátor má 0.316 minuty, tedy asi 19 s.

7. a) Jelikož f hustota, platí

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx=\int_{\mathbb{R}} Ce^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1,$$

a proto

$$\frac{1}{C}=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx.$$

Jelikož ale neumíme přímo vypočítat integrál $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$, pomůžeme si následujícím trikem. Postupně použijeme substituce:
$(*)\left|\begin{array}{ll} v=x-\mu, & w=y-\mu \\ dv=dx, & dw=dy \end{array}\right|$, $(\star)\left|\begin{array}{ll} v=r\cos(\alpha), & w=r\sin(\alpha) \\ dvdw=rdrd\alpha & \end{array}\right|$
a $(\bullet)\left|t=\frac{r^2}{2\sigma^2},\ dt=\frac{r}{\sigma^2}dr\right|$

$$\begin{aligned}\frac{1}{C^2}&=\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\right)^2=\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx\cdot\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy\\ &=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dydx\\ &=\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\mu)^2+(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dydx\overset{(*)}{=}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2+w^2}{2\sigma^2}}dwdv\\ &\overset{(\star)}{=}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr\alpha dr=2\pi\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}rdr\\ &\overset{(\bullet)}{=}2\pi\int_0^{\infty} e^{-t}\sigma^2dt=2\pi\sigma^2\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}=2\pi\sigma^2.\end{aligned}$$

Tedy

$$C=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.$$

b) $\mathbb{E}X=\mu$, viz sekce 2.4.3.

c) $\mathrm{Var}X = \sigma^2$, viz sekce 2.4.3.

8. Jelikož $X \sim N(1.5, 6)$, pak s využitím tabulky 6.1 a věty 2.11 dostaneme:

   a)

$$\begin{aligned}P(X < 2.5) &= P\left(\frac{X-1.5}{\sqrt{6}} < \frac{2.5-1.5}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \Phi(0.4082)\\ &\approx 0.18 \cdot \Phi(0.40) + 0.82 \cdot \Phi(0.41)\\ &= 0.18 \cdot 0.6554 + 0.82 \cdot 0.6591 = 0.6584.\end{aligned}$$

   V řešení jsme využili lineární aproximaxi hodnoty $\Phi(0.4082)$ pomocí nejbližších tabelovaných hodnot $\Phi(0.40)$ a $\Phi(0.41)$.

   b)

$$\begin{aligned}P(X < 1) &= P\left(\frac{X-1.5}{\sqrt{6}} < \frac{1-1.5}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{-0.5}{\sqrt{6}}\right) = \Phi(-0.2041)\\ &= 1 - \Phi(0.2041) \approx 1 - (0.59 \cdot \Phi(0.20) + 0.41 \cdot \Phi(0.21))\\ &= 1 - (0.59 \cdot 0.5793 + 0.41 \cdot 0.5832) = 0.4191.\end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned}P(0.5 < X < 6) &= P\left(\frac{0.5-1.5}{\sqrt{6}} < \frac{X-1.5}{\sqrt{6}} < \frac{6-1.5}{\sqrt{6}}\right)\\ &= \Phi\left(\frac{4.5}{\sqrt{6}}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right) = \Phi\left(\frac{4.5}{\sqrt{6}}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right)\\ &= \Phi(1.8371) + \Phi(0.4081) - 1\\ &\approx 0.29 \cdot \Phi(1.83) + 0.71 \cdot \Phi(1.84) + 0.6584 - 1\\ &= 0.29 \cdot 0.9664 + 0.71 \cdot 0.9671 + 0.6584 - 1 = 0.6253.\end{aligned}$$

9. Ze sekce 2.4.3 víme, že $\mathbb{E}X = 0$ a $\mathbb{E}X^2 = 1$. Pro k liché dostaneme

$$\mathbb{E}X^k = \int_{\mathbb{R}} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,$$

   jelikož pro liché k je $g(x) = x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ lichá funkce a $\int_0^\infty x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \infty$.

Pro k sudé máme

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}X^k &= \int_{\mathbb{R}} x^k \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
&\overset{p.p.}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left[-x^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{\infty} + \int_{\mathbb{R}} (k-1) x^{k-2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= (k-1)\mathbb{E}X^{k-2}.
\end{aligned}$$

Dostali jsme tedy rekurentní vztah $\mathbb{E}X^k = (k-1)\mathbb{E}X^{k-2}$ (jen poznamenejme, že tento vztah platí i pro liché k). Jelikož $\mathbb{E}X^2 = 1$, pak $\mathbb{E}X^4 = 3 \cdot \mathbb{E}X^2 = 3$, $\mathbb{E}X^6 = 5 \cdot 3$, $\mathbb{E}X^8 = 7 \cdot 5 \cdot 3$,... Tedy

$$\mathbb{E}X^{2n} = \prod_{i=1}^{n} (2i-1).$$

10. a) Ze zadání víme, že úspěšnost střel týmu UK je $\frac{1}{8}$ (průměrně každá osmá střela končí gólem). Tedy se ptáme na pravděpodobnost, že po devíti neúspěších přijde první úspěch. Použijeme proto geometrické rozdělení. Hledaná pravděpodobnost je $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^9 = 0.03758$.

    b) Známe-li počet pokusů (počet střel), pak se počet úspěchů řídí binomickým rozdělením (v našem případě s parametry $n = 15$ a $p = \frac{1}{8}$. Tedy hledaná pravděpodobnost je $\binom{15}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^1 3 = 0.2891$.

    c) Lze předpokládát, ze počet střel v první třetině (stejně jako v dalších třetinách) se řídí přibližně Poissonovým rozdělením. Jelikož vystřelí tým průměrně 42 střel za zápas, pak předpokládáme, že vyšle průměrně 14 střel za první třetinu. Označíme-li X_1 počet vyslaných střel za první třetinu, pak $X \sim Po(14)$, tedy $P(X = 15) = e^{-14}\frac{14^{15}}{15!} = 0.1131$.

    d) Jelikož počty střel mají Poissonovo rozdělení, pak čas mezi střelami má exponenciálním rozdělení. Nechť Y je čas (v minutách), kdy tým UK vyšle první střelu, pak $X \sim Exp(\lambda)$ s $\lambda = \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$. Tedy

$$\begin{aligned}
P(Y > 3) = 1 - P(Y \leq 3) = 1 - \int_0^3 \frac{7}{10} e^{-\frac{7}{10}x} dx = 1 - \left[e^{-\frac{7x}{10}}\right]_0^3 \\
= e^{-\frac{21}{10}} = 0.1225.
\end{aligned}$$

6.5 Řešení cvičení 3.5

1.

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= P(X_1+X_2=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X_1=i, X_2=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X_1=i)P(X_2=k-i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{e^{-\lambda_1}\lambda_1^i}{i!}\cdot\frac{e^{-\lambda_2}\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^k, \quad k=0,1,...
\end{aligned}$$

2. Označme X_i čas v minutách, který musí majitel ještě čekat na dokončení i-té opravy, $i=1,2$. Za zadání plyne, že $X_i \sim R(0,60)$, tj. hustota rozdělení této náhodné veličiny je

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{60}, \quad x \in (0,60), \\
&= 0, \quad x \notin (0,60).
\end{aligned}$$

a)

$$\mathbb{E}X = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_\mathbb{R} xf(x)dx = \int_0^{60}\frac{x}{60}dx = 30.$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}X_1 = \mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 &= \int_0^{60} x^2\frac{1}{60}dx - 30^2 \\
&= \left[\frac{x^3}{180}\right]_0^{60} - 900 = 1200 - 900 = 300.
\end{aligned}$$

Střední doba čekání na ukončení první opravy je tedy 30 minut, rozptyl je 300.

b) Označme X dobu do ukončení obou oprav, pak $X = \max\{X_1, X_2\}$. Určíme nejprve distribuční funkci náhodné veličiny X, tj.

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X<x) = P(X_1<x, X_2<x) = P(X_1<x)P(X_2<x) \\
&= \left(\int_0^x \frac{1}{60}dt\right)^2 = \left(\frac{x}{60}\right)^2 = \frac{x^2}{3600}.
\end{aligned}$$

Z distribuční funkce F_X určíme hustotu f_X náhodné veličiny X jako

$$f_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} F_X(x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^2}{3600} = \frac{x}{1800}, \ x \in (0, 60).$$

Rozdělení doby do ukončení obou oprav je určeno uvedenou distribuční funkcí nebo ekvivalentně vypočítanou hustotou.

c)

$$P(X \leq 45) = \int_0^{45} \frac{x}{1800} dx = \left[\frac{x^2}{3600} \right]_0^{45} = \frac{2025}{3600} = \frac{9}{16}.$$

d) Označme Y čas ukončení obou oprav, pak $Y = X_1 + X_2$. Sdružená hustota $f_{X_1,X_2}(x,y) = f_{X_1}(x) f_{X_2}(y) = \frac{1}{3600}$ pro $(x,y) \in [0,60]^2$ (jelikož jsou náhodné veličiny X_1 a X_2 nezávislé). Pro jednoduchost rozdělíme výpočet na dvě situace (viz obrázek 6.9):

I. $t \leq 60$, pak

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y < t) = P(X_1 + X_2 < t) = \int_0^t \int_0^{t-x} \frac{1}{3600} dy dx \\ &= \frac{1}{3600} \int_0^t (t-x) dx = \frac{1}{3600} \left[\frac{(t-x)^2}{-2} \right]_0^t = \frac{t^2}{7200}, \quad t \in (0, 60), \end{aligned}$$

tedy $f_Y(t) = \frac{t}{3600}, \quad t \in (0, 60)$.

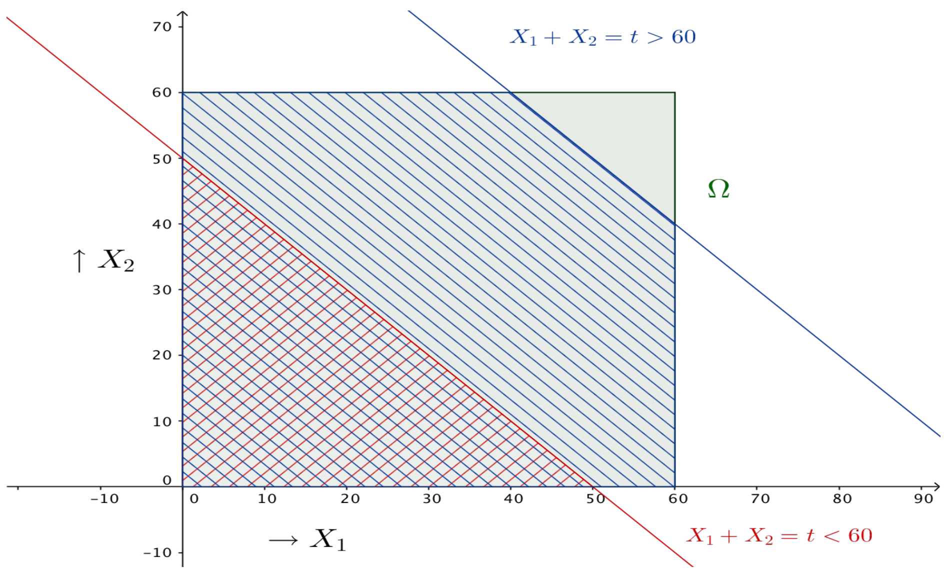
II. $t > 60$, pak

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y < t) = P(X_1 + X_2 < t) = \int_0^{60} \int_0^{\min\{60, t-x\}} \frac{1}{3600} dy dx \\ &= \frac{1}{3600} \left(\frac{t^2}{2} - (t-60)^2 \right) = \frac{1}{3600} \left(\frac{-t^2}{2} + 120t - 3600 \right) \\ &= -\frac{t^2}{7200} + \frac{t}{30} - 1, \end{aligned}$$

tedy $f_Y(t) = -\frac{t}{3600} + \frac{1}{30}, \quad t \in (60, 120)$.

e) $T_1 = \min\{X_1, ..., X_n\}$ a $T_2 = \max\{X_1, .., X_n\}$. Pak

$$\begin{aligned} F_{T_2}(x) &= P(T_2 < x) = P(X_1 < x, ..., X_n < x) = \prod_{i=1}^n P(X_i < x) \\ &= \left(\int_0^x \frac{1}{60} dt \right)^n = \left(\frac{x}{60} \right)^n, \end{aligned}$$



Obrázek 6.9: Zelený čtverec $[0, 60]^2$ zobrazuje množinu všech realizací náhodných veličin X_1, X_2 (tj. prostor Ω), červeně vyšrafovaná oblast je oblast, kde $Y < t$ pro $t < 60$ (část 1.), modře vyšrafovaná oblast je oblast, kde $Y < t$ pro $t > 60$ (část 2.).

$$f_{T_2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{60}\right)^n = \frac{nx^{n-1}}{60^n},$$

$$\begin{aligned} F_{T_1}(x) &= P(T_1 < x) = P(\min\{X_1, ..., X_n\} < x) \\ &= 1 - P(\min\{X_1, ..., X_n\} \geq x) = 1 - P(X_1 \geq x, ..., X_n \geq x) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \int_x^{60} \frac{1}{60} dt = 1 - \left(\frac{60-x}{60}\right)^n \end{aligned}$$

a

$$f_{T_1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(1 - \left(\frac{60-x}{60}\right)^n\right) = \frac{n(60-x)^{n-1}}{60^n}.$$

3. a) Jelikož má náhodný vektor (X, Y) rovnoměrné rozdělení na Ω, je

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= c, \quad (x, y) \in \Omega \\ &= 0, \quad (x, y) \notin \Omega. \end{aligned}$$

$$\int_\Omega c dx dy = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{\pi}.$$

b)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy = \int_{y \in \mathbb{R}: x^2+y^2 \leq 1} \frac{1}{\pi} dy = \frac{1}{\pi} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dy \\ &= \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi}, \quad x \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

c) X a Y jsou nezávislé, když $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ pro všechna x a y. Jelikož je úloha symetrická, máme $f_X(x) = f_Y(x)$. Dostáváme $f_{X,Y}(x, y) = 0 \neq f_X(x) f_Y(x)$ pro $(x, y) \in [-1, 1]^2 \setminus \Omega$, tedy veličiny X a Y nejsou nezávislé. To lze také snadno nahlédnout z tvaru množiny Ω[1]

4. a)

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2+2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(\rho x+y)^2+(1-\rho^2)x^2}{2(1-\rho^2)}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} e^{-\frac{(\rho x+y)^2}{2(1-\rho^2)}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

[1]Aby mohly být náhodné veličiny X a Y nezávislé, musela by být tato množina obdelníková. Takto nabývá sice náhodná veličina X hodnot z intervalu $[-1, 1]$, ale pro konkrétní hodnoty y, kterých nabývá náhodná veličina Y, už nabývá náhodná veličina X pouze hodnot z intervalu $[-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]$.

V poslední rovnosti jsme využili faktu, že $\frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}e^{-\frac{(\rho x+y)^2}{2(1-\rho^2)}}$ je hustota normálního rozdělení s parametry $\mu = -\rho x$ a $\sigma^2 = 1 - \rho^2$. Rozdělení náhodné veličiny X je tedy normované normální rozdělení.

b) Ze symetrie dostaneme $Y \sim N(0,1)$ a $f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. X a Y jsou nezávislé $\Leftrightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. To platí pouze pro $\rho = 0$, v ostatních případech jsou náhodné veličiny X a Y závislé.

5. Označme A délku hodu Anny a B délku hodu Barbory. Pak $A \sim N(67,36)$ a $B \sim N(75,9)$. Zajíma nás pravděpodobnost, že Anna hodí dál než Barbora, tedy že $Z = A - B > 0$. Z věty 3.6 víme, že Z má normální rozdělení s parametry $\mu = 67 - 75 = -8$ a $\sigma^2 = 36 + 9 = 45$. Tedy

$$
\begin{aligned}
P(Z > 0) &= P\left(\frac{Z+8}{\sqrt{45}} > \frac{8}{\sqrt{45}}\right) = 1 - P\left(\frac{Z+8}{\sqrt{45}} < \frac{8}{\sqrt{45}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{8}{\sqrt{45}}\right) \\
&= 1 - \Phi(1.1926) = 1 - (0.74 \cdot \Phi(1.19) + 0.26 \cdot \Phi(1.20)) \\
&= 1 - (0.74 \cdot 0.8830 + 0.26 \cdot 0.8849) = 0.1165.
\end{aligned}
$$

6. a) S využitím věty 2.7 dostaneme

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{2} = a.$$

Z věty 2.8 a důsledku 3.11 dostaneme

$$\mathrm{var}Y = \mathrm{var}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{4}{n^2}\mathrm{var}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}X_i = \frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{3n}.$$

b) S využitím výsledků ze cvičení 2. e) dostaneme $f_Z(x) = \frac{nx^{n-1}}{a^n}, \quad x \in (0,a)$. Pak dostaneme

$$\mathbb{E}Z = \int_0^a x f_Z(x)dx = \int_0^a \frac{nx^n}{a^n}dx = \left[\frac{nx^{n+1}}{a^n(n+1)}\right]_0^a = \frac{n}{n+1}\cdot a$$

a

$$\mathbb{E}Z^2 = \int_0^a x^2 f_Z(x)dx = \int_0^a \frac{nx^{n+1}}{a^n}dx = \left[\frac{nx^{n+2}}{a^n(n+2)}\right]_0^a = \frac{n}{n+2}\cdot a^2.$$

Tedy

$$\begin{aligned}\mathrm{var}Z = \mathbb{E}Z^2 - (\mathbb{E}Z)^2 &= \frac{na^2}{n+2} - \frac{n^2a^2}{(n+1)^2} = a^2\frac{n(n+1)^2 - n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} \\ &= a^2\frac{n^3+2n^2+n-2n^2-n^2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{a^2n}{(n+1)^2(n+2)}.\end{aligned}$$

c) Jelikož $\mathbb{E}Z \to \mathbb{E}Y$, $\mathrm{var}Y \to 0$ a $\mathrm{var}Z \to 0$, pak lze odhadnout, že pro $n \to \infty$ bude náhodná veličina Z konvergovat v nějakém smyslu k náhodné veličině Y. V jakém smyslu lze najít v sekci 4.1.

6.6 Řešení cvičení 4.4

1. Označme X počet narozených kuřat v dubnu, pak $X \sim Po(\lambda)$, kde $\lambda = 30 \cdot 8 = 240$. $P(X > 230) = 1 - P(X \leq 230) = \sum_{i=0}^{230} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \sum_{i=0}^{230} e^{-240}\frac{240^k}{k!}$. Jelikož tuto sumu umíme jen obtížně vyčíslit (bez použití speciálního softwaru), využijeme aproximaci Poissonova rozdělení pomocí CLV. Uvažujeme $\bar{X} \sim N(\lambda, \lambda)$ (využíváme faktu, že $\mathbb{E}X = \mathrm{var}X = \lambda$). Tedy

$$\begin{aligned}P(X > 230) \approx P(\bar{X} > 230) &= 1 - P(\bar{X} < 230) \\ &= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 240}{\sqrt{240}} < \frac{230 - 240}{\sqrt{240}}\right) = 1 - \Phi(-0.6455) \\ &= 1 - (1 - \Phi(0.6455)) \approx 0.45 \cdot \Phi(0.64) + 0.55 \cdot \Phi(0.65) \\ &= 0.45 \cdot 0.7389 + 0.55 \cdot 0.7422 = 0.7407.\end{aligned}$$

Jelikož X je diskrétní náhodná veličina nabývající pouze celých hodnot, platí $P(X > 230) = P(X \geq 231)$. Pokud bychom pracovali s druhým výrazem a použili aproximaci pomocí centrální limitní věty, dostaneme

$$\begin{aligned}P(X \geq 230) \approx P(\bar{X} \geq 231) &= 1 - P(\bar{X} < 231) \\ &= 1 - P\left(\frac{\bar{X} - 240}{\sqrt{240}} < \frac{231 - 240}{\sqrt{240}}\right) = 1 - \Phi(-0.5809) \\ &= \Phi(0.5809)) \approx 0.7193.\end{aligned}$$

Uvědomme si, že oproti diskrétnímu rozdělení spojité nerozlišuje $P(X < x)$ a $P(X \leq x)$. Oba získané odhady jsou tedy relevantní odhady pomocí centrální limitní věty. Pokud získaný odhad ověříme pomocí simulační studie (provedené v softwaru R s počtem realizací $n = 10^6$), pak zjistíme, že přibližně v 72.7 % případů je simulovaná hodnota nad 230. Tedy odhad získaný pomocí simulačni studie je mezi odhady získanými pomocí centrální limitní věty.

2. Označme X_i čas čekání na metro před i-tou cestou během semestru, která proběhla v čase kolem deváté ranní hodiny a nebo kolem páté večerní, a Y_j čas čekání na metro před j-tou cestou během semestru, která proběhla v čase kolem druhé hodiny odpolední. Pak $X_i \sim R(0, 3)$, $i = 1, ..., 126$, a $Y_j \sim R(0, 6)$, $j = 1, ..., 14$. Označme $X = \sum_{i=1}^{126} X_i$, $Y = \sum_{j=1}^{14} Y_i$ a $Z = X + Y$. Jelikož $\mathbb{E}X_i = 1.5$, $\mathrm{var}X_i = \frac{3}{4}$, $\mathbb{E}Y_i = 3.5$, $\mathrm{var}X_i = \frac{49}{12}$, má X přibližně normální rozdělení s parametry $\mu_1 = 129 \cdot 1.5 = 193$, $\sigma_1^2 = 129 \cdot \frac{3}{4} = 96.75$ a Y má přibližně normální rozdělení s parametry $\mu_2 = 14 \cdot 3.5 = 49$, $\sigma_2^2 = 14 \cdot \frac{49}{12} = 51.1667$. Z věty 3.6 víme, že Z má tedy přibližně normální rozdělení s parametry $\mu = \mu_1 + \mu_2 = 242$ a $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 106.1667$. Tedy

$$\begin{aligned}
P(Z > 240) &= P\left(\frac{Z - 242}{\sqrt{106.1667}} > \frac{230 - 242}{\sqrt{106.1667}}\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{Z - 242}{\sqrt{106.1667}} < \frac{240 - 242}{\sqrt{106.1667}}\right) \approx 1 - \Phi(-0.1941) \\
&= 1 - (1 - \Phi(0.1941)) = \Phi(0.1941) \\
&\approx 0.59 \cdot \Phi(0.19) + 0.41 \cdot \Phi(0.20) = 0.59 \cdot 0.5753 + 0.41 \cdot 0.5793 \\
&= 0.5769.
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že výsledná pravděpodobnost je pouhý odhad, jelikož používáme centrální limitní větu pro $n_1 = 129$ a $n_2 = 14$. Pokud ale provedeme simulační studii v softwaru R, tak při 10^6 realizovaných simulací bude přibližně v 58.0 % případů hodnota součtu Z větší než 420, tedy hledaná pravděpodobnost odhadnutá z této simulační studie je 0.580, tedy přibližně stejná jako ta vypočtená.

3. Letecká společnost prodává letenky a chce co nejvíce ušetřit. Letadlo Boeing Next Generation 737-900 má 220 míst, ale ví se, že zhruba 5 % lidí se k odletu nedostaví.

   a) Předpokládejme, že každý z pasažérů s lístkem bude mít stejnou pravděpodobnost, že nenastoupí na svůj let. Označme $X_i = 1$ v případě, že se i-tý pasažér dostaví k odletu, a $X_i = 0$ v opačném případě. Pak $X_i \sim Alt(0.95)$ (jelikož zhruba 5 % lidí nenastoupí) a $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{225} X_i$ je počet pasažárů, kteří se dostaví k odletu. Z Moivreovi-Laplaceovi centrální limitní věty dostaneme

$$
\begin{aligned}
P(S_n \leq 220) &= P\left(\frac{S_n - 225\cdot 0.95}{\sqrt{225\cdot 0.5\cdot 0.95}} \leq \frac{220 - 225\cdot 0.95}{\sqrt{225\cdot 0.05\cdot 0.95}}\right)\\
&\approx \Phi(1.9118) \approx 0.82\cdot\Phi(1.91) + 0.18\cdot\Phi(1.92)\\
&= 0.82\cdot 0.9719 + 0.18\cdot 0.9726 = 0.9720.
\end{aligned}
$$

Podobně jako v předchozím příkladu můžeme postupovat i následujícím způsobem:

$$
\begin{aligned}
P(S_n < 221) &= P\left(\frac{S_n - 225\cdot 0.95}{\sqrt{225\cdot 0.5\cdot 0.95}} < \frac{221 - 225\cdot 0.95}{\sqrt{225\cdot 0.05\cdot 0.95}}\right)\\
&\approx \Phi(2.2177) \approx 0.115\cdot\Phi(2.20) + 0.885\cdot\Phi(2.22)\\
&= 0.115\cdot 0.9861 + 0.885\cdot 0.9868 = 0.9867.
\end{aligned}
$$

Pokud provedeme simulační studii (opět pomocí softwaru R a počtem 10^6 realizací, pak relativní četnost případů, kdy bude místo pro všechny příchozí pasažery, je 0.9888. Jak vidíme, při druhém postupu jsme dostali přesnější odhad hledané pravděpodobnosti.

b) Najděme takové n, aby $P(S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 220) \approx 0.9$.

$$\begin{aligned}
P(S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 220) &\approx 0.9 \\
P\left(\frac{S_n - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}} \leq \frac{220 - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}}\right) &\approx 0.9 \\
\Phi\left(\frac{220 - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}}\right) &\approx 0.9 \\
\frac{220 - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}} &\approx \Phi^{-1}(0.9) \\
\frac{220 - n \cdot 0.95}{\sqrt{n \cdot 0.95 \cdot 0.05}} &\approx 1.2815 \\
220 - n \cdot 0.95 &\approx 0.2793 \cdot \sqrt{n} \\
220 &\approx 0.95 \cdot n + 0.2793 \cdot \sqrt{n} \\
\frac{220}{0.95} &\approx n + \frac{0.2793}{0.95} \cdot \sqrt{n} \\
\frac{220}{0.95} + \left(\frac{0.2793}{2 \cdot 0.95}\right)^2 &\approx \left(\sqrt{n} + \frac{0.2793}{2 \cdot 0.95}\right)^2 \\
\left[\sqrt{\frac{220}{0.95} + \left(\frac{0.2793}{2 \cdot 0.95}\right)^2} - \frac{0.2793}{2 \cdot 0.95}\right]^2 &\approx n \\
227.1479 &\approx n.
\end{aligned}$$

Pokud použijeme na počátku nerovnost $S_n < 221$, dostaneme odhad $n \approx 228.1904$. Při simulační studii pro $n = 227$ dostaneme relativní četnost případů, kdy budou všichni příchozí pasažéři odbaveni, rovnu 0.9393, pro $n = 228$ je tato relativní četnost přibližně 0.8874. Tedy oba odhady získané pomocí centrální limitní věty jsou dobré.

4 I. Úlohu budeme řešit pomocí Poissonova rozdělení. Označme X_i počet zásahů

plavčíka během i-tého dne prázdnin. Pak $X_i \sim Po(\frac{1}{2}),\ i = 1, 2, ..., 62.$

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{62} X_i > 26) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{62} X_i - 62\cdot 1/2}{\sqrt{62\cdot 1/2}} > \frac{26 - 62\cdot 1/2}{\sqrt{62\cdot 1/2}}\right) \\ &= P\left(Z > \frac{-5}{\sqrt{31}}\right) = 1 - P(X \le \frac{-5}{\sqrt{31}}) \approx 1 - \Phi\left(\frac{-5}{\sqrt{31}}\right) \\ &= 1 - \Phi(-0.8980) = \Phi(0.8980) \\ &= 0.2\cdot 0.8133 + 0.8\cdot 0.8159 = 0.8154. \end{aligned}$$

II. Zkusme vyřešit úlohu ještě jednou pomocí exponenciálního rozdělení. Označme Y_i čas, který uplyne mezi $(i-1)$-ním a i-tým zásahem plavčíka. Pak $Y_i \sim Exp(\frac{1}{2})$. Pak

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{27} Y_i < 62) &= P\left(\frac{\sum_{i=1}^{27} Y_i - 27\cdot 2}{\sqrt{27\cdot 4}} < \frac{62 - 27\cdot 2}{\sqrt{27\cdot 4}}\right) = P\left(Z < \frac{8}{\sqrt{108}}\right) \\ &\approx \Phi(0.7698) = 0.02\cdot 0.7764 + 0.98\cdot 0.7794 = 0.7793. \end{aligned}$$

Jak je viděl, při použití CLV dává přístup přes počet událostí (které má Poisonovo rozdělení) jiný výsledek, než přístup pomocí časů mezi událostmi (které mají exponenciální rozdělení). Pokud provedeme simulační studii, dostaneme že odhadovaná pravděpodobnost je přibližně rovna 0.787, tedy druhý přístup dává o něco přesnější výsledek.

„*Inu, svět je malý a o náhody tu není nouze.*“

—Lustig

Poznámka nakonec: Všechny předešlé příklady se dají řešit i pomocí Morrisovy věty [16]. Jelikož je ale zatím Morrisova věta řídce používaná a nepatří do základních kurzů pravděpodobnosti, tak jsme všechny uvedené příklady v tomto materiálu řešili klasických způsobem.

Přílohy

Tabulka 6.1: Distribuční funkce $\Phi(x)$ normovanáno normálního rozdělení.

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.5000	0.24	0.5948	0.48	0.6844	0.72	0.7642	0.96	0.8315
0.01	0.5040	0.25	0.5987	0.49	0.6879	0.73	0.7673	0.97	0.8340
0.02	0.5080	0.26	0.6026	0.50	0.6915	0.74	0.7703	0.98	0.8365
0.03	0.5120	0.27	0.6064	0.51	0.6950	0.75	0.7734	0.99	0.8389
0.04	0.5160	0.28	0.6103	0.52	0.6985	0.76	0.7764	1.00	0.8413
0.05	0.5199	0.29	0.6141	0.53	0.7019	0.77	0.7794	1.01	0.8438
0.06	0.5239	0.30	0.6179	0.54	0.7054	0.78	0.7823	1.02	0.8461
0.07	0.5279	0.31	0.6217	0.55	0.7088	0.79	0.7852	1.03	0.8485
0.08	0.5319	0.32	0.6255	0.56	0.7123	0.80	0.7881	1.04	0.8508
0.09	0.5359	0.33	0.6292	0.57	0.7157	0.81	0.7910	1.05	0.8531
0.10	0.5398	0.34	0.6331	0.58	0.7190	0.82	0.7939	1.06	0.8554
0.11	0.5438	0.35	0.6368	0.59	0.7224	0.83	0.7967	1.07	0.8577
0.12	0.5478	0.36	0.6406	0.60	0.7257	0.84	0.7995	1.08	0.8599
0.13	0.5517	0.37	0.6443	0.61	0.7291	0.85	0.8023	1.09	0.8621
0.14	0.5557	0.38	0.6480	0.62	0.7324	0.86	0.8051	1.10	0.8643
0.15	0.5596	0.39	0.6517	0.63	0.7357	0.87	0.8078	1.11	0.8665
0.16	0.5636	0.40	0.6554	0.64	0.7389	0.88	0.8106	1.12	0.8686
0.17	0.5675	0.41	0.6591	0.65	0.7422	0.89	0.8133	1.13	0.8708
0.18	0.5714	0.42	0.6628	0.66	0.7454	0.90	0.8159	1.14	0.8729
0.19	0.5753	0.43	0.6664	0.67	0.7486	0.91	0.8186	1.15	0.8749
0.20	0.5793	0.44	0.6700	0.68	0.7517	0.92	0.8212	1.16	0.8770
0.21	0.5832	0.45	0.6736	0.69	0.7549	0.93	0.8238	1.17	0.8790
0.22	0.5871	0.46	0.6772	0.70	0.7580	0.94	0.8264	1.18	0.8810
0.23	0.5910	0.47	0.6808	0.71	0.7611	0.95	0.8289	1.19	0.8830

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.20	0.8849	1.48	0.9306	1.76	0.9608	2.08	0.9812	2.64	0.9959
1.21	0.8869	1.49	0.9319	1.77	0.9616	2.10	0.9821	2.66	0.9961
1.22	0.8888	1.50	0.9332	1.78	0.9625	2.12	0.9830	2.68	0.9963
1.23	0.8907	1.51	0.9345	1.79	0.9633	2.14	0.9838	2.70	0.9965
1.24	0.8925	1.52	0.9357	1.80	0.9641	2.16	0.9846	2.72	0.9967
1.25	0.8944	1.53	0.9370	1.81	0.9649	2.18	0.9854	2.74	0.9969
1.26	0.8962	1.54	0.9382	1.82	0.9656	2.20	0.9861	2.76	0.9971
1.27	0.8980	1.55	0.9394	1.83	0.9664	2.22	0.9868	2.78	0.9973
1.28	0.8997	1.56	0.9406	1.84	0.9671	2.24	0.9875	2.80	0.9974
1.29	0.9015	1.57	0.9418	1.85	0.9678	2.26	0.9881	2.82	0.9976
1.30	0.9032	1.58	0.9429	1.86	0.9686	2.28	0.9887	2.84	0.9977
1.31	0.9049	1.59	0.9441	1.87	0.9693	2.30	0.9893	2.86	0.9979
1.32	0.9066	1.60	0.9452	1.88	0.9699	2.32	0.9898	2.88	0.9980
1.33	0.9082	1.61	0.9463	1.89	0.9706	2.34	0.9904	2.90	0.9981
1.34	0.9099	1.62	0.9474	1.90	0.9713	2.36	0.9909	2.92	0.9982
1.35	0.9115	1.63	0.9484	1.91	0.9719	2.38	0.9913	2.94	0.9984
1.36	0.9131	1.64	0.9495	1.92	0.9726	2.40	0.9918	2.96	0.9985
1.37	0.9137	1.65	0.9505	1.93	0.9732	2.42	0.9922	2.98	0.9986
1.38	0.9162	1.66	0.9515	1.94	0.9738	2.44	0.9927	3.00	0.99865
1.39	0.9177	1.67	0.9525	1.95	0.9744	2.46	0.9931	3.20	0.99931
1.40	0.9192	1.68	0.9535	1.96	0.9750	2.48	0.9934	3.40	0.99966
1.41	0.9207	1.69	0.9545	1.97	0.9756	2.50	0.9938	3.60	0.999841
1.42	0.9222	1.70	0.9554	1.98	0.9761	2.52	0.9941	3.80	0.999928
1.43	0.9236	1.71	0.9564	1.99	0.9767	2.54	0.9945	4.00	0.999968
1.44	0.9251	1.72	0.9573	2.00	0.9772	2.56	0.9948	4.50	0.999997
1.45	0.9265	1.73	0.9582	2.02	0.9783	2.58	0.9951	5.00	0.999999
1.46	0.9279	1.74	0.9591	2.04	0.9793	2.60	0.9953		
1.47	0.9292	1.75	0.9599	2.06	0.9803	2.62	0.9955		

Literatura

[1] M. Ahsanullah, B. M. G. Kibria, M. Shakil, *Normal and Student's t Distributions and Their Applications*, Atlantis press, Miami, 2014.

[2] J. Anděl, *Matematika náhody*, MatfyzPress, Praha, 2007.

[3] F. Bartoš, A. Sarafoglou, H. R. Godmann, A. Sahrani, D. K. Leunk, P. Y. Gui, D. Voss, K. Ullah, M. J. Zoubek, F. Nippold, F. Aust, F. F. Vieira, C.-G. Islam, A. J. Zoubek, S. Shabani, J. Petter, I. B. Roos, A. Finnemann, A. B. Lob, M. F. Hoffstadt, J. Nak, J. Ron, K. Derks, K. Huth, S. Terpstra, T. Bastelica, M. Matetovici, V. L. Ott, A. S. Zetea, K. Karnbach, M. C. Donzallaz, A. John, R. M. Moore, F. Assion, R. Bork, T. E. Leidinger, X. Zhao, A. K. Motaghi, T. Pan, H. Armstrong, T. Peng, M. Bialas, J. Y.-C. Pang, B. Fu, S. Yang, X. Lin, D. Sleiffer, M. Bognar, B. Aczel, E.-J. Wagenmakers, *Fair coins tend to land on the same side they started: Evidence from 350,757 flips*, (2024-01-11). Dostupné online: https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.04153

[4] P. Billingsley, *Probability and Measure - Third Edition*, Wiley, New York, 1995.

[5] G. Buffon, *Editor's note concerning a lecture given 1733 by Mr. Le Clerc de Buffon to the Royal Academy of Sciences in Paris*, Histoire de l'Académie Royale des Sciences, 1733.

[6] G. Buffon, *Essai d'arithmétique morale*, Histoire naturelle, générale et particulière, Supplément, (1777) **4**, 46–123.

[7] E. Calda, V. Dupač, *Matematika pro gymnázia - Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika*, Prometheus, Praha, 2008.

[8] G. Cardano, *The book on Games of chance (Liber de Ludo Aleae)*, Holt, Rinehart and Winston, 1961.

[9] Ch. Döbler, *A short proof of Lévy's continuity theorem without using tightness*, Statistics & Probability Letters, (2022) **185**, n. pag.

[10] V. Dupač, M. Hušková, *Pravděpodobnost a matematická statistika*, Karolinum, Praha, 2009.

[11] H. Fisher, *A History of the Central Limit Theorem: From Classical to Modern Probability Theory*, Springer, New York, 2011.

[12] M. Grabinski, G. Klinkova, *Scrutinizing Distributions Proves That IQ Is Inherited and Explains the Fat Tail*, Applied Mathematics, (2020) **11**, 957–984.

[13] A. Hald, *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750*, John Wiley and Sons, New Jersey, 2003.

[14] K. Helisová, *Příklady na cvičení k předmětu B0B01PST*, (2023-10-09). Dostupné online: https://math.fel.cvut.cz/en/people/heliskat/01PST_cviceni2.pdf.

[15] O. Kallenberg, *Foundations of modern probability*, Springer, New York, 2002.

[16] O. Kohut, *Morrisova věta*, (2023-12-12) Dostupné online: https://morrisovaveta.com.

[17] P. S. Laplace, *Théorie analytique des probabilités*, Courcier, Paris, 1820.

[18] J. Lukeš, J. Malý, *Míra a integrál*, Karolinum, Praha, 2002.

[19] K. Mačák, *Počátky počtu pravděpodobnosti*, Prometheus, Praha, 1997.

[20] M. Navara, *Pravděpodobnost a matematická statistika*, skriptum FEL ČVUT, 1. vydání, Praha, 2007.

[21] J. Petáková, *Matematika - Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ*, Prometheus, Praha, 1998.

[22] A. T. Peterson, D. J. Dunworth, *Mythology in Our Midst: A Guide to Cultural References*, Greenwood Publishing Group, Westport, 2004.

[23] P. Pflaumer, *A Statistical Analysis of the Roulette Martingale System: Examples, Formulas and Simulations with R*, The 17th International Conference on Gambling & Risk, Las Vegas, 2019.

[24] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný, M. Zelený, *Matematická analýza 1.*,(2023-11-13). Dostupné online: https://www.karlin.mff.cuni.cz/ pick/analyza.pdf

[25] Z. Prášková, P. Lachout, *Základy náhodných procesů*, Karolinum, Praha, 2001.

[26] A. Rényi, *Teorie pravděpodobnosti*, Academia, Praha, 1972.

[27] J. M. Tanner, *A History of the Study of Human Growth*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.

[28] J. Seco, F. Verhaegen, *Monte Carlo Techniques in Radiation Therapy*, CRC press, London, 2013.

[29] E. Seneta, *I.J. Bienaymé [1796–1878]: Criticality, Inequality, and Internationalization **., International Statistical Review, (1998) **66**, n. pag.

[30] B. Spinoza, *Etika*, Svoboda, Praha, 1977.

[31] S. Svistova, T. Nikitina, *The normal distribution application: systolic blood pressure*, E3S Web of Conferences, (2023) **376**, n. pag.

[32] G. Székely, *Paradoxes in Probability Theory and Mathematical Statistics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986.

[33] J. Štěpán, *Teorie pravděpodobnosti - Matematické základy*, Academia, Praha, 1987.

[34] H. R. Thiry-Cherques, *Chance and Fortune*, Organization, (2005) **12**, 590–600.

[35] J. Veselý, *Matematická analýza pro učitele, druhý díl*, MatfyzPress, Praha, 1997.

[36] J. Veselý, *Základy matematické nalýzy, druhý díl*, MatfyzPress, Praha, 2009.

[37] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge university press, New York, 1991.

[38] K. Zvára, J. Štěpán, *Pravděpodobnost a matematická statistika*, MatfyzPress, Praha, 1997.

Rejstřík