Úvodní písemka

1. Upravte výraz:

$$\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{x}+y\right)}{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}}.$$

2. Řešte rovnici v $\mathbb{R}$.

$$\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x}+\cos^2 x \operatorname{tg} x = 1.$$

3. Je dáno komplexní číslo

$$a=\frac{15-5i}{1+2i}-\frac{1-3i}{i}+(3+i)(-1+2i).$$

Vypočtěte a^5.

4. V množině reálných čísel řešte nerovnici:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\leq -2.$$

5. Vypočtěte limitu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2-5x+1}.$$

6. V komplexních číslech řešte rovnici

$$\bar{z}=z^2.$$

7. Řešte rovnici

$$1-\sin 3x=\cos^2 3x.$$

8. Řešte v $\mathbb{R}$ ronici:

$$4^x+3^{x+3}=4^{x+3}-3^{x+2}.$$

9. V $\mathbb{R}$ řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}3^{\log x}+4^{\log y}&=4\\3^{2\log x}-4^{2\log y}&=8\end{aligned}$$

10. Určete desátý člen aritmetické posloupnosti, ve které $a_2+a_3=9$ a $a_2\cdot a_3=14$.
11. Součet prvních čtyř po sobě jdoucích členů geometrické poslopupnosti je 80. Určete ji, je-li $a_4=9a_6$.

Řešení - písemka

1.

$$\frac{\left(\frac{x^2+y^2}{x}+y\right)}{\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}}=\frac{\frac{x^2+xy+y^2}{x}}{\frac{(x^2+y^2)(x^3-y^3)}{x^2y^2(x^2+y^2)}}=\frac{x^2+xy+y^2}{x}\frac{x^2y^2}{(x-y)(x^2+xy+y^2)}=\frac{xy^2}{x-y},\quad x\neq 0, y\neq 0, x\neq y.$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x}+\cos^2 x \operatorname{tg} x&=1\\ \sin x\cos x+\sin x\cos x&=1\\ 2\sin x\cos x=\sin 2x&=1\\ x&=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}a&=\frac{15-5i}{1+2i}\frac{1-2i}{1-2i}-\frac{1-3i}{i}\frac{i}{i}+(-3-2-i+6i)=\frac{15-10-35i}{5}+(3+i)+(-5+5i)=1-7i+3+i-5+5i\\&=-1-i=\sqrt{2}(\sin\frac{5\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{4}i)\Rightarrow a^5=4\sqrt{2}(\sin\frac{25\pi}{4}+\cos\frac{25\pi}{4}i)=4\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}i)=4+4i.\end{aligned}$$

4.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+\log_{\frac{1}{2}}(x+2)\leq -2$$
$$\log_{\frac{1}{2}}(x-2)(x+2)\leq \log_{\frac{1}{2}}4, \quad (x^2-4)>0$$
$$x^2-4\geq 4$$
$$x\geq 2\sqrt{2}.$$

5.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x}{x^2-5x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(2-\frac{3}{x})}{x^2(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}=2.$$

6.

$$\bar{z}=z^2$$
$$a-bi=(a^2-b^2)+2abi$$
$$\Rightarrow -b=2ab\Rightarrow a=\frac{-1}{2}\ \vee\ b=0$$
$$\Rightarrow a=a^2-b^2\Rightarrow 0,1,\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

7.

$$1-\sin 3x=\cos^2 3x$$
$$1-\sin 3x=1-\sin^2 3x$$
$$(1-\sin 3x)(1-(1+\sin 3x))=0\Rightarrow \sin 3x=1\vee \sin 3x=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi\vee x=\frac{k\pi}{3}.$$

8.

$$4^x(1-4^3)=3^x(-3^3-3^2)$$
$$\left(\frac{4}{3}\right)^x=\frac{4\cdot 3^2}{4^3-1}$$
$$x=\log_{\frac{4}{3}}\frac{4\cdot 3^2}{4^3-1}=\log_{\frac{4}{3}}\frac{36}{63}=\log_{\frac{4}{3}}\frac{4}{7}=\frac{\log\frac{4}{7}}{\log\frac{4}{3}}$$

9. $A=3^{\log x}$, $B=4^{\log y}\Rightarrow\ A+B=4, A^2-B^2=(A+B)(A-B)=8\Rightarrow A=3, B=1\Rightarrow \log x=1, \log y=0\Rightarrow x=10, y=1.$

10.

$$a_2=a, 2a+d=9, a^2+da=14\Rightarrow d=9-2a\Rightarrow a^2+a(9-2a)=14$$
$$\Rightarrow a^2-9a+14=(a-7)(a-2)=0\Rightarrow a=2, d=5, a_{10}=a_2+8d=42, \vee a=7, d=-5, a_2=-33.$$

11.

$$a_4=9a_6\Rightarrow d=\pm 3\vee a_4=a_6=0, d=3\Rightarrow a(1+3+9+27)=80$$
$$\Rightarrow a=2, d=-3\Rightarrow a(1-3+9-27)=-20a=80\Rightarrow a=-4, a_4=0\Rightarrow a=80, d=0.$$

Grafy funkcí

Načrtněte grafy následujících funkcí

1. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
2. $f(x) = |\ln|x||$
3. $f(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$
4. $f(x) = \ln(x+1) + 3$
5. $f(x) = \frac{2\cos^2 x}{\cos x - |\cos x|}$
6. $f(x) = \ln \sin x$
7. $f(x) = \ln(\ln \sin x)$
8. $f(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{cotg} x}{|\mathrm{cotg} x|}}$

Důkazy

9. Dokažte, že číslo $\sqrt[n]{2}$ je iracionální $\forall n \geq 2$.
10. Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.
11. Dokažte, že součet třetích mocnin tří po sobě jdoucích přirozených čísel je dělitelný devíti.
12. Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n je $n^3 - n$ dělitelné šesti.
13. Dokažte matematickou indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí
    i) $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$
    ii) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
    iii) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$
14. Jestliže $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti, potom i a^2, b^2, c^2 jsou tři po sobě jdoucí členy aritmetické posloupnosti. Dokažte.

Supremum, infimum, maximum a minimum

Zjistěte, zda v následujících množinách existuje maximum, minimum, supremum a infimum, a pokud ano, určete je.

15.
$$M = \left\{ \frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

16.
$$M = \left\{ \frac{n}{n+2}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

17.
$$M = \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Řešení

Důkazy

9. Nechť $\sqrt[n]{2}$ je racionální, pak existují nesoudělná čísla $p, q \in \mathbb{Z}$, pro která platí $\sqrt[n]{2} = \frac{p}{q}$. Tedy $2q^n = p^n$, proto je p^n sudé, a tedy i p je sudé. Z toho plyne, že existuje $k \in \mathbb{Z}$ splňující $p = 2k$. Pak $2q^n = 2^n k^n$, proto je q také sudé, což je ve sporu s nesoudělností p a q.

10. Nechť je prvočísel konečne mnoho. Označme je postupně $p_1, p_2, ..., p_n$. Potom $p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ je číslo, které neni dělitelné žádným z čísel p_i, $i = 1, ..., n$, a tedy by bylo dalším prvočíslem. Proto nemůže být prvočísel konečně mnoho.

11.
$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = 3n^3 + 6n = 3(n^3 + 2n)$$

Stačí tedy ukázat, že $(n^3 + 2n)$ je dělitelné třemi.

I. Pro $n = 1$ dostaneme $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$, což je číslo dělitelné třemi

II. Nechť platí, že $n^3 + 3n$ je dělitelné třemi, pak $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = (n^3 + 2n) + (3n^2 + 3n + 3) = (n^3 + 2n) + 3(n^2 + n + 3)$. Tedy i $(n+1)^3 + 2(n+1)$ je dělitelné třemi, čímž je důkaz indukcí hotov.

12. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n-1)n(n+1)$, což je součin tří po sobě jdoucích čísel a ten musí být dělitelný šesti.

13. i) I. Pro $n = 1$ dostaneme $1 = 1$.

II. Nechť $1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, pak $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$, čímž je důkaz indukcí hotov.

ii) I. Pro $n = 1$ dostaneme $1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$.

II. Nechť platí $1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, pak $1^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(2n^2+n)+6(n+1)^2}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, čímž je důkaz indukcí hotov.

III) I. Pro $n = 1$ dostaneme $1^3 = 1^1$

II. Nechť platí $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n^2)$, pak $1^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \ldots + n^2) + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1^3) = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = (1 + 2 + \ldots + (n+1))^2$, címž je důkaz indukcí hotov.

14.
$$\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} = 2\frac{1}{c+a} \Rightarrow \frac{a+2b+c}{ab+ac+bb+bc} - \frac{2}{c+a} = 0 \Rightarrow \frac{(a+2b+c)(c+a) - 2(ab+ac+bb+bc)}{(ab+ac+bb+bc)(c+a)} \Rightarrow$$
$$(a+2b+c)(c+a) - 2(ab+ac+bb+bc) = 0 \Rightarrow a^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc - 2b^2 = 0 \Rightarrow a^2 + c^2 = 2b^2.$$

Supremum, infimum, maximum a minimum

15. Snadno nahlédneme, že $0 < \frac{1}{1+x^2} \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, jelikož $1 \leq 1 + x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Jelikož $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+0^2} = 1$ pro $x = 0$ a $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$, je 1 maximem množiny M, a tedy i jejím supremem. Víme, že $0 < \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$. Předpokládejme, že existuje $\epsilon > 0$ takové, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí $\epsilon \leq \frac{1}{1+x^2}$, pak $\epsilon(1 + x^2) \leq 1$. Pro $x = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ dostaneme $\epsilon(1 + \frac{1}{\epsilon}) = \epsilon + 1 > 1$, což je spor s předpokladem, tedy takové $\epsilon > 0$ neexistuje. Proto $\inf M = 0$. Jelikož 0 není prvkem množiny M, minimum neexistuje.

16. Nejprve ukažme, že posloupnost $\{\frac{n}{n+2}\}$ je rostoucí:

$$\frac{n}{n+2} < \frac{n+1}{n+3}$$
$$n(n+3) = n^2 + 3n < n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2).$$

Pak $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{n}{n+2} \geq \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, tedy $\min M = \inf M = \frac{1}{3}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $1 > \frac{n}{n+2}$. Předpokládejme, že existuje $K < 1$ takové, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $K > \frac{n}{n+2}$. Pak

$$K > \frac{n}{n+2}$$
$$\frac{2K}{1-K} > n$$

Tedy pro $n > \frac{2K}{1-K}$ dojdeme ke sporu. $1 \notin M$, tedy $\sup M = 1$ a maximum neexistuje.

17. Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, pak $\frac{(-1)^{2m-1}}{2m-1} < 0 < \frac{(-1)^{2n}}{2n}$, tedy libovolný lichý člen posloupnosti $\frac{(-1)^n}{n}$ je menší, než libovolný sudý člen této poslopupnosti. Proto se u vyšetřování suprema a maxima stačí omezit na sudé členy a u vyšetřování infima a minima jen na liché členy Posloupnost $\frac{(-1)^{2n}}{2n} = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, je klesající, tedy první člen je zároveň maximálním členem této posloupnosti $\Rightarrow \max M = \sup M = \frac{1}{2\cdot 1} = \frac{1}{2}$. Posloupnost $\frac{(-1)^{2m-1}}{2m-1} = \frac{-1}{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}$ je rostoucí, tedy $\min M = \inf M = \frac{-1}{2\cdot 1-1} = -1$.