**Úvod do funkcionální analýzy, ZS 2021-2022**
**Zadání písemné části zkoušky - termín 6.1.**

**Příklad 1** (8 bodů)**.** Na prostoru $X = L_\infty([0,1]) \oplus_2 L_3([0,1])$ nad tělesem komplexních čísel definujme funkcionál $\varphi : X \to \mathbb{C}$ předpisem

$$\varphi(f,g) := \int_0^1 \big(f(t) + g(t)\big)e^{-it}\,\mathrm{d}t, \quad f \in L_\infty([0,1]),\ g \in L_3([0,1]).$$

Ukažte, že $\varphi \in X^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

**Příklad 2** (15 bodů)**.** V tomto příkladu jsou uvažujte komplexní Banachovy prostory. Nechť je dán operátor $T : C([0,1]) \to c_0$ předpisem

$$Tf = \big(f(\tfrac{1}{n}) - f(0)\big)_{n=1}^\infty, \quad f \in C([0,1]).$$

(i) Dokažte, že $T$ je dobře definovaný spojitý lineární operátor a určete hodnotu $\|T\|$. (4 body)
(ii) Vyjádřete duální operátor $T^* : \ell_1 \to M([0,1])$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů. (6 bodů)
(iii) Určete, zda je operátor $T$ kompaktní. (5 bodů)

**Příklad 3** (27 bodů)**.** V tomto příkladu jsou uvažujte reálné Banachovy prostory. Nechť je dán operátor $T : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$ předpisem

$$Tf(t) = \int_0^1 \min(s,t) f(s)\,\mathrm{d}s, \qquad f \in L_2([0,1]).$$

(i) Ukažte, že $T$ je spojitý lineární operátor, který je kompaktní. (10 bodů)

*Hint: Uvažujte operátory $A : L_2([0,1]) \to C([0,1])$ a $B : C([0,1]) \to L_2([0,1])$, kde $A$ je dáno stejným předpisem jako $T$ a $B$ je "identita" (přesněji: $Af(t) = \int_0^1 \min(t,s)f(s)\,\mathrm{d}s$ a $Bf = [f]$). Ukažte, že $A$ a $B$ jsou lineární, spojité a s pomocí Arzela-Ascoliho věty ukažte, že $A$ je kompaktní. Na závěr použijte identitu $T = B \circ A$.*

(ii) Ukažte, že $T$ je samoadjungovaný. (2 body)
(iii) Ukažte, že pro $f \in C([0,1])$ platí $Tf(0) = 0$, $(Tf)'(1) = 0$ a $(Tf)''(t) = -f(t)$. (3 body)
(iv) Ukažte, že kdykoliv $f \in L_2([0,1])$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $Tf = \lambda f$, pak $f \in C^2([0,1])$ (2 body).
(v) Nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$ a ukažte, že vlastní podprostory příslušné nenulovým vlastním číslům jsou jednodimenzionální prostory generované funkcemi $\sin((\frac{\pi}{2} + k\pi)t)$ pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. (6 bodů)

*Pomůcka: Pokud to budete potřebovat, můžete bez výpočtu používat následující vzorce platné pro každé $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a každé $t \in [0,1]$:*

$$\int_0^1 \min(s,t)\sin(\alpha s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\alpha^2}\sin(\alpha t) - \frac{t}{\alpha}\cos(\alpha),$$

$$\int_0^1 \min(s,t)\cos(\alpha s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\alpha^2}\Big(\cos(\alpha t) - 1\Big) + \frac{t}{\alpha}\sin(\alpha).$$

(vi) Určete přesnou hodnotu $\|T\|$. (2 body)
(vii) Z Hilbert-Schmidtovy věty nalezněte diagonalizaci operátoru $T$, tj. posloupnost reálných čísel $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$ a posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^\infty$ splňující, že

$$Tf = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \Big(\int_0^1 f(t) f_n(t)\,\mathrm{d}t\Big) f_n, \qquad f \in L_2([0,1]).$$

(2 body)

**Nástin řešení**

**Příklad 1**: Uvažujme funkcionály $\varphi_1 : L_\infty \to \mathbb{C}$ a $\varphi_2 : L_3 \to \mathbb{C}$ definované předpisem

$$\varphi_1(f) = \int_0^1 f(t)e^{-it}\mathrm{d}t, \quad \varphi_2(f) = \int_0^1 f(t)e^{-it}\mathrm{d}t.$$

Pak pro $f \in L_\infty$ máme

$$|\varphi_1(f)| \leq \int_0^1 |f(t)| \leq \|f\|_\infty$$

a tedy $\varphi_1 \in (L_\infty)^*$ a $\|\varphi_1\| \leq 1$. Navíc, pro $f(t) = e^{it}$, $t \in [0,1]$ máme $|\varphi_1(f)| = \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1 = \|f\|_\infty$ a tedy $\|\varphi_1\| = 1$. Dle reprezentace $(L_3)^* = L_{3/2}$ máme $\varphi_2 \in (L_3)^*$ a $\|\varphi_2\| = \|e^{-it}\|_{3/2} = 1$.

Konečně, máme $\varphi(f,g) = \varphi_1(f) + \varphi_2(g)$ a tedy dle reprezentace $(L_\infty \oplus_2 L_3)^* = (L_\infty)^* \oplus_2 L_{3/2}$ máme $\varphi \in X^*$ a $\|\varphi\| = \|(\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|)\|_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

**Příklad 2**: Pro $f \in C([0,1])$ máme $f(\frac{1}{n}) \to f(0)$, proto $Tf(n) \to 0$ a tedy $Tf \in c_0$. Dále platí

$$|Tf(n)| \leq |f(\tfrac{1}{n})| + |f(0)| \leq 2\|f\|_\infty,$$

a tedy $T$ je spojitý lineární operátor (linearita je zřejmá) a $\|T\| \leq 2$. Pro $f(t) = 1 - 2t$ platí $\|Tf\| \geq |f(1) - f(0)| = 2 = 2\|f\|_\infty$ a tedy $\|T\| = 2$.

Pro každé $f \in C([0,1])$ a $x \in \ell_1$ platí

$$T^*x(f) = x(Tf) = \sum_{n=1}^\infty x_n Tf(n) = \sum_{n=1}^\infty x_n\big(f(\tfrac{1}{n}) - f(0)\big).$$

Protože $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\big(\delta(\frac{1}{n}) - \delta(0)\big)\| \leq \sum_{n=1}^\infty 2|x_n| \leq 2\|x\|_1 < \infty$, je $\mu := \sum_{n=1}^\infty x_n\big(\delta(\frac{1}{n}) - \delta(0)\big)$ dobře definovaný prvek prostoru $M([0,1])$ a

$$\mu(f) = \sum_{n=1}^\infty x_n\big(\delta(\tfrac{1}{n}) - \delta(0)\big)(f) = \sum_{n=1}^\infty x_n\big(f(\tfrac{1}{n}) - f(0)\big), \quad f \in C([0,1])$$

tedy dle předchozího výpočtu máme $T^*x = \mu = \sum_{n=1}^\infty x_n\big(\delta(\frac{1}{n}) - \delta(0)\big)$ pro každé $x \in \ell_1$.

Vyšetřeme nyní kompaktnost operátoru $T$. Pro $f_n(t) = \max\{0, 1 - (n+1)|1 - nt|\}$ platí že $\{f_n \neq 0\} \subset [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1}]$ a $\|f_n\| = f_n(\frac{1}{n}) = 1$, tedy $\|Tf_n - Tf_m\| \geq |(Tf_n - Tf_m)(\frac{1}{n})| = |1 - 0| = 1$ pro $n \neq m$. Tedy $T(B_{C([0,1])})$ obsahuje nekonečnou 1-separovanou množinu a $T$ proto není kompaktní.

**Příklad 3**: Předně si uvědomíme, že pro $f \in L_2([0,1])$ je $\|f\|_1 \leq \|1\|_2 \cdot \|f\|_2 = \|f\|_2 < \infty$ a tedy $L_2([0,1]) \subset L_1([0,1])$. Dále $Af$ je spojitá funkce pro každé $f \in L_2([0,1])$ dle věty o integrálu závislém na parametru (integrovatelná majoranta $\min(s,t)f(s)$ je například $|f(s)| \in L_1$). Navíc, platí

$$|Af(t)| \leq \int_0^1 |\min(s,t)f(s)|\mathrm{d}s \leq \int_0^1 |f(s)|\mathrm{d}s = \|f\|_1 \leq \|f\|_2, \quad t \in [0,1],\ f \in L_2([0,1]),$$

a tedy $A : L_2([0,1]) \to C([0,1])$ je spojitý lineární operátor a $\|A\| \leq 1$. Dále pro $f \in B_{L_2([0,1])}$ a $t, t' \in [0,1]$ platí

$$\begin{aligned} |Af(t) - Af(t')| &\leq \int_0^1 |\min(s,t) - \min(s,t')||f(s)|\mathrm{d}s \\ &\leq |t - t'| \int_0^1 |f(s)|\mathrm{d}s \leq |t - t'|\|f\|_1 \leq |t - t'|\|f\|_2 \leq |t - t'| \end{aligned},$$

kde využíváme faktu že $|\min(s,t) - \min(s,t')| \leq |t - t'|$ (což je snadné ověřit). Tedy každá $Af$ je 1-Lipschitzovská a dle Arzela-Ascoliho věty tak dostáváme, že $A$ je kompaktní operátor.

Dále pro $f \in C([0,1])$ platí

$$\|Bf\|_2 = \|f\|_2 \leq \sqrt{\int_0^1 \|f\|_\infty^2} \leq \|f\|_\infty,$$

a tedy $B$ je spojitý lineární operátor. Protože zřejmě $T = B \circ A$, je $T$ složením kompaktního operátoru se spojitým operátorem a tedy $T$ je kompaktní operátor.

Ověřme nyní, že $T$ je samoadjungovaný operátor. Pro $f, g \in L_2$ máme

$$\langle Tf, g\rangle = \int_0^1 \int_0^1 \min(s,t) f(s) \mathrm{d}s g(t) \mathrm{d}t = \int_0^1 f(s) \int_0^1 \min(s,t) g(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}s = \langle f, Tg\rangle$$

a tedy $T$ je samoadjungovaný (ve výpočtu jsme použili Fubiniovu větu).

Pokud je $f \in C([0,1])$, pak máme $Tf(0) = \int_0^1 \min(s,0) f(s) = \int_0^1 0 = 0$ a také

$$Tf(t) = \int_0^t s f(s) \mathrm{d}s + \int_t^1 t f(s) \mathrm{d}s,$$

a tedy podle "Newton Leibnitzovy formule"pro spojité funkce máme

$$Tf'(t) = tf(t) + \Big(t \int_t^1 f(s)\mathrm{d}s\Big)'(t) = tf(t) + \int_t^1 f(s)\mathrm{d}s - tf(t) = \int_t^1 f(s)\mathrm{d}s$$

a speciálně tak $(Tf)'(1) = 0$ a také

$$Tf''(t) = \Big(\int_t^1 f(s)\mathrm{d}s\Big)'(t) = -f(t), \quad t \in [0,1].$$

Výše jsme již ověřili, že pro $f \in L_2([0,1])$ je $Tf = Af$ spojitá funkce a tedy pokud $Tf = \lambda f$, pak $f$ je také spojitá funkce a dle předchozího pak $(Tf)'' = -f$ a tedy $Tf \in C^2([0,1])$.

Pokud je tedy splněno $Tf = \lambda f$, pak po dvojím zderivování dostáváme $\lambda f'' = -f$. Pokud je $\lambda = 0$, pak nutně $f = 0$ a tedy $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Pro $\lambda \neq 0$ musíme vyřešit diferenciální rovnici $f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0$ s podmínkami $f(0) = 0$ a $f'(1) = 0$. Pokud je $\lambda < 0$, pak fundamentální systém řešení je tvořen funkcemi $\{e^{t/\sqrt{|\lambda|}}, e^{-t/\sqrt{|\lambda|}}\}$ a tedy $f(t) = Ae^{t/\sqrt{|\lambda|}} + Be^{-t/\sqrt{|\lambda|}}$, po dosazení podmínky $f(0) = 0$ dostáváme že $A = -B$ a po dosazení podmínky $f'(1) = 0$ dostáváme $A = B$, tedy $A = B = 0$ a proto $f = 0$. Tedy $\sigma_p(T) \subset (0, \infty)$. Pro $\lambda > 0$ je fundamentální systém řešení je tvořen funkcemi $\{\sin(t/\sqrt{\lambda}), \cos(t/\sqrt{\lambda})\}$ a tedy

$$f(t) = A\sin(t/\sqrt{\lambda}) + B\cos(t/\sqrt{\lambda})$$

a po dosazení podmínky $f(0) = 0$ dostáváme, že $B = 0$. Tedy $f(t) = A\sin(t/\sqrt{\lambda})$ a po dosazení podmínky $f'(1) = 0$ dostáváme, že buď $f = 0$ (takové řešení ale nehledáme) nebo $\cos(1/\sqrt{\lambda}) = 0$, tedy $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dále je snadné ověřit, že pro každé $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je

$$T\Big(\sin\big((\tfrac{\pi}{2} + k\pi)t\big)\Big) = \tfrac{1}{(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \sin\big((\tfrac{\pi}{2} + k\pi)t\big)$$

a tedy $\sigma_p(T) = \{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2} \colon k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ a příslušné vlastní podprostory jsou jednodimenzionální prostory generované funkcemi $\sin\big((\frac{\pi}{2} + k\pi)t\big)$. Protože $T$ je kompaktní operátor, máme $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

Protože $T$ je kompaktní, samoadjungovaný a $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, máme $\|T\| = \max\{\lambda \colon \lambda \in \sigma_p(T)\} = \frac{4}{\pi^2}$.

Konečně, dle Hilbert-Schmidtovy věty máme

$$Tf = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \Big(\int_0^1 f(t) f_n(t)\,\mathrm{d}t\Big) f_n,$$

kde $\lambda_n = \frac{1}{(\frac{\pi}{2}+n\pi)^2}$ jsou nenulová vlastní čísla a $f_n = \frac{\sin\big((\frac{\pi}{2}+k\pi)t\big)}{\|\sin\big((\frac{\pi}{2}+k\pi)t\big)\|_2}$ jsou příslušné znormované vlastní vektory.

**Úvod do funkcionální analýzy, ZS 2021-2022**
**Zadání písemné části zkoušky - termín 17.1.**

**Příklad 4** (13 bodů)**.** V reálném Hlbertově prostoru $\ell_2$ je dán dvoudimenzionální podprostor $Y$ generovaný body $(2^{-n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ a $(3^{-n})_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$. Najděte ortonormální bázi $Y$ a s pomocí vzorce pro ortogonální projekci najděte nejbližší bod v $Y$ k bodu $e_1 = (1, 0, 0, \ldots) \in \ell_2$.

**Příklad 5** (23 bodů)**.** V tomto příkladu uvažujte reálné Banachovy prostory. Nechť je dán operátor $T : L_1([0, 2]) \to L_1([0, 2])$ předpisem

$$Tf(t) = \int_0^1 f(s)\mathrm{d}s + f(t), \quad f \in L_1([0, 2]).$$

(i) Ukažte, že $T$ je spojitý lineární operátor. (4 body)
(ii) Určete hodnotu $\|T\|$. (3 body)
(iii) Nalezněte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$. (6 bodů)
(iv) Určete, zda je $T$ isomorfismus a zda je $T$ kompaktní operátor. (2 body)
(v) Vyjádřete duální operátor $T^*$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů. (8 bodů)

**Příklad 6** (14 bodů)**.** Řešte následující úlohy.

(i) Určete Fourierovu transformaci funkce $e^{-a|x|}$ pro každé $a > 0$. (5 bodů)
(ii) Nalezněte funkci $h \in L_1(\mathbb{R})$ splňující

$$\widehat{h}(t) = \frac{1}{(t^2+1)(t^2+4)}, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \text{(4 body)}$$

(Hint: S pomocí výsledku z (i) vyjádřete funkci na levé straně rovnosti jako lineární kombinaci funkcí tvaru $\widehat{e^{-a|x|}}(t)$.)

(iii) Určete, čemu je rovno $\hat{\hat{h}}(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. (2 body)
(Hint: aplikujte Větu o inverzi)
(iv) Aplikujte předchozí body a odvoďte pro každé $x \in \mathbb{R}$ hodnotu integrálu

$$\int_0^\infty \frac{\cos(tx)}{(t^2+1)(t^2+4)}\mathrm{d}t. \qquad \text{(3 body)}$$

(Hint: vyjádřete cosinus ve tvaru exponenciály a zadaný integrál ve tvaru "$const \int e^{-itx}\widehat{h}(t)\mathrm{d}t = const \cdot \hat{\hat{h}}(x)$".)

**Nástin řešení**

**Příklad 4**: Nejprve nalezneme ortonormální bázi $Y$. Zvolme $\widetilde{x_1} := (2^{-n})_{n=1}^{\infty}$, pak

$$\|\widetilde{x_1}\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n}} = \sqrt{\frac{1/4}{1-1/4}} = \sqrt{1/3}.$$

Položme tedy $x_1 := \sqrt{3} \cdot (2^{-n})_{n=1}^{\infty}$. Uvažujme dále

$$\begin{aligned}\widetilde{x_2} &= (3^{-n})_{n=1}^{\infty} - \langle (3^{-n})_{n=1}^{\infty}, x_1\rangle x_1 = (3^{-n})_{n=1}^{\infty} - 3\Big(\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}3^{-n}\Big)(2^{-n})_{n=1}^{\infty} \\ &= (3^{-n})_{n=1}^{\infty} - 3\frac{1/6}{1-1/6}(2^{-n})_{n=1}^{\infty} = (3^{-n} - \tfrac{3}{5}2^{-n})_{n=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

Pak $\{x_1, \widetilde{x_2}\}$ je ortogonální báze $Y$ a zbývá znormovat prvek $\widetilde{x_2}$. Máme

$$\begin{aligned}\|\widetilde{x_2}\|_2^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}(3^{-n} - \tfrac{3}{5}2^{-n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n} - \frac{6}{5}\sum_{n=1}^{\infty} 6^{-n} + \frac{9}{25}\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} \\ &= \frac{1/9}{1-1/9} - \frac{6}{5}\frac{1/6}{1-1/6} + \frac{9}{25}\frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{8} - \frac{6}{5.5} + \frac{3}{25} = \frac{25-24}{8.25} = \frac{1}{200},\end{aligned}$$

tedy pro $x_2 = \frac{\widetilde{x_2}}{\|\widetilde{x_2}\|_2} = 10\sqrt{2}\widetilde{x_2}$ dostáváme, že ON báze $Y$ je $\{x_1, x_2\}$.

Ortogonální projekce na $Y$ je pak dána předpisem

$$P_Y(x) = \langle x, x_1\rangle x_1 + \langle x, x_2\rangle x_2, \quad x \in \ell_2,$$

a tedy nejbližší bod v $Y$ k bodu $e_1$ je bod

$$\begin{aligned}\langle e_1, x_1\rangle x_1 + \langle e_1, x_2\rangle x_2 &= x_1(1)x_1 + x_2(1)x_2 = \tfrac{3}{2}\widetilde{x_1} + 200(\tfrac{1}{3} - \tfrac{3}{10})\widetilde{x_2} \\ &= \tfrac{3}{2}\widetilde{x_1} + \tfrac{20}{3}\widetilde{x_2} = \big((\tfrac{3}{2} - \tfrac{20}{5})2^{-n} + \tfrac{20}{3}3^{-n}\big)_{n=1}^{\infty} = \big(-\tfrac{5}{2^{n+1}} + \tfrac{20}{3^{n+1}}\big)_{n=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

**Příklad 5**: Je snadné si rozmyslet, že $T$ je lineární. Dále pro každé $f \in L_1([0,2])$ máme

$$\|Tf\|_1 = \int_0^2 \Big|f(t) + \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s\Big|\,\mathrm{d}t \le \|f\|_1 + \int_0^2\int_0^1 |f(s)|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \le \|f\|_1 + \int_0^2 \|f\|_1\,\mathrm{d}t = 3\|f\|_1,$$

tedy $T$ je spojitý a $\|T\| \le 3$.

Uvažujme nyní $f = \chi_{[0,1]}$. Pak $\|f\|_1 = 1$ a

$$\|Tf\|_1 = \int_0^2 \Big|\int_0^1 1\,\mathrm{d}s + f(t)\Big|\,\mathrm{d}t = \int_0^2 1 + \chi_{[0,1]}(t)\,\mathrm{d}t = 2 + \int_0^2 \chi_{[0,1]}(t)\,\mathrm{d}t = 3,$$

tedy $\|T\| = 3$ a normy se nabývá.

Uvědomme si nyní, že $T = I + S$, kde $S : L_1([0,2]) \to L_1([0,2])$ je konečně-dimenzionální operátor daný předpisem $S(f)(t) = \int_0^1 f(s)\,\mathrm{d}s$ (tedy v oboru hodnot $S$ jsou pouze konstantní funkce, tj. obor hodnot $S$ je jednodimenzionální).

Pro určení $\sigma_p(S)$ řešme rovnici $Sf = \lambda f$. Pokud je $\lambda = 0$, pak například $f = \chi_{[0,1/2]} - \chi_{1/2,1}$ je nenulovým řešením této rovnice a tedy $0 \in \sigma_p(S)$. Pokud $\lambda \neq 0$, pak $f = Sf/\lambda$ a tedy $f$ musí být konstantní funkce, dejme tomu $f(t) = c$, $t \in [0,2]$. Pak ale $\lambda c = \lambda f(t)$ a zároveň $Sf(t) = c$ a tedy nutně nenulové řešení rovnice $Sf = \lambda f$ existuje, právě když $\lambda = 1$. Celkem tedy $\sigma_p(S) = \{0,1\}$ a protože $S$ je kompaktní (neboť je konečně-dimenzionální), dostáváme $\sigma_p(S) = \sigma(S) = \{0,1\}$.

Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ máme $T - \lambda I = S - (\lambda - 1)I$ a tedy snadno dostáváme, že $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{1,2\}$.

Protože $0 \notin \sigma(T)$, je operátor $T$ prostý a na, tedy isomorfismus a proto není kompaktní.

Pro určení duálního operátoru si uvědomíme, že $T^* = S^* + I^* = S^* + I$ a tedy bude stačit určit adjungovaný operátor $S^*$. S použitím reprezentace duálů klasických prostorů dostáváme, že pro každé $f \in L_\infty([0,2])$ je $S^*f$ jediná funkce z $L_\infty([0,2])$ splňující pro každé $g \in L_1([0,2])$

$$\int_0^1 g(t)S^*f(t)\,\mathrm{d}t = S^*f(g) = f(Sg) = \int_0^2 f(s)\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s = \int_0^2 g(t)\chi_{[0,1]}(t)\int_0^2 f(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,$$

a protože zřejmě $t \mapsto \chi_{[0,1]}(t)\int_0^2 f(s)\,\mathrm{d}s$ je omezená měřitelná funkce, dostáváme že $S^*f(t) = \chi_{[0,1]}(t)\int_0^2 f(s)\,\mathrm{d}s$, $t \in [0,2]$. Tedy

$$T^*f(t) = f(t) + \chi_{[0,1]}(t)\int_0^2 f(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in [0,2].$$

**Příklad 6**: Označme $f_a(x) = e^{-a|x|}$ pro $x \in \mathbb{R}$ a $a > 0$. Pak pro každé $t \in \mathbb{R}$ s použitím sudosti funkce cosinus dostáváme

$$\widehat{f_a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}(\cos(tx) - i\sin(tx))\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(tx)\,\mathrm{d}x,$$

a pokud dvakrát aplikujeme metodu per partes, dostaneme pro $t \neq 0$

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax}\cos(tx)\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{a}{t^2} - \frac{a^2}{t^2}I,$$

z čehož spočteme že $I = \frac{a}{a^2+t^2}$ a tedy

$$\widehat{f_a}(t) = \frac{2a}{(a^2+t^2)\sqrt{2\pi}}, \quad t \neq 0$$

a protože funkce $\widehat{f_a}$ je spojitá, vzorec platí i pro $t = 0$.

Nyní zkusíme najít $A, B \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{1}{(t^2+1)(t^2+4)} = \frac{A}{t^2+1} + \frac{B}{t^2+4}.$$

Po převedení na společného jmenovatele snadno zjistíme, že rovnost výše platí pro $A = \frac{1}{3} = -B$. Tedy,

$$\frac{1}{(t^2+1)(t^2+4)} = \frac{1}{3(t^2+1)} - \frac{1}{3(t^2+4)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\left(\tfrac{1}{3}\widehat{f_1}(t) - \tfrac{1}{6}\widehat{f_2}(t)\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

a tak pro $h(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{6}(e^{-|x|} - \frac{1}{2}e^{-2|x|})$, $x \in \mathbb{R}$ dostáváme, že

$$\widehat{h}(t) = \frac{1}{(t^2+1)(t^2+4)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Protože $h \in L_1(\mathbb{R})$ a $\widehat{h} \in L_1(\mathbb{R})$ (srovnáním u nekonečna s funkcí $\frac{1}{t^2}$) a protože funkce $h$ je zřejmě spojitá, dle Věty o inverzi dostáváme že $\hat{\hat{h}}(t) = h(-t) = h(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}$.

Konečně, s použitím předchozích bodů a sudosti funkce cosinus dostáváme

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(tx)}{(t^2+1)(t^2+4)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx}}{(t^2+1)(t^2+4)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\widehat{h}(t)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\hat{\hat{h}}(x) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}h(x) = \frac{\pi}{6}(e^{-|x|} - \tfrac{1}{2}e^{-2|x|}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Úvod do funkcionální analýzy, ZS 2021-2022**
**Zadání písemné části zkoušky - termín 24.1.**

**Příklad 7** (11 bodů)**.** V tomto příkladu uvažujte reálné Banachovy prostory. Nechť je dán operátor $T : c_0 \to L_3([0,1])$ předpisem

$$Tx(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n^2} \exp(-nt), \quad x \in c_0.$$

(i) Ukažte, že $T$ je dobře definovaný spojitý lineární operátor. (5 bodů)
(ii) Vyjádřete duální operátor $T^*$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů. (6 bodů)

**Příklad 8** (21 bodů)**.** V tomto příkladu uvažujte reálné Banachovy prostory. Nechť je dán operátor $T : C_0(\mathbb{R}) \to C_0(\mathbb{R})$ předpisem

$$Tf(t) = \frac{f(|t|)}{t^2+1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Ukažte, že $T$ je spojitý lineární operátor. (2 body)
(ii) Určete $\|T\|$. (2 body)
(iii) Nalezněte $\sigma_p(T)$. (5 bodů)
(iv) Nalezněte $\sigma(T)$. (10 bodů)
(v) Určete, zda je $T$ isomorfismus a zda je $T$ kompaktní operátor. (2 body)

**Příklad 9** (18 bodů)**.** V tomto příkladu uvažujeme konvoluci vzhledem k míře z definice Fourierovy transformace, tj. $\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda$. Nechť jsou dány funkce $f_n = \chi_{[-n,n]}$, $n \in \mathbb{N}$.

(i) Spočtěte hodnotu $(f_n * f_1)(0)$, $(f_n * f_1)(x)$ pro $|x| > n+1$ a dokažte, že $\|f_n * f_1\|_\infty \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (3 body)
(ii) Dokažte, že

$$\widehat{f_n * f_1}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(xn)\sin(x)}{x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(4 body)
(Hint: použijte vztah mezi konvolucí a Fourierovou transformací)
(iii) Položme $g_n = \widehat{f_n * f_1}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že $g_n \in L_1(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$. (2 body)
(iv) Dokažte, že $\|g_n\|_{L_1} \to \infty$. (5 bodů)
(Hint: Ukažte, že dokonce $\int_0^1 |g_n(t)| \mathrm{d}t \to \infty$. K tomu účelu nejprve dokažte nerovnost $\sin t \geq t \sin 1$, $t \in [0,1]$ a tuto nerovnost pak použijte společně se známým faktem, že $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d}x = \infty$.)
(v) S pomocí věty o inverzi ukažte, že $\|\widehat{g_n}\|_\infty \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. (2 body)
(vi) Dokažte, že Fourierova transformace jakožto zobrazení z $L_1(\mathbb{R})$ do $C_0(\mathbb{R})$ není surjektivní. (2 body)
(Hint: použijte výše zjištěné vlastnosti funkcí $g_n$ a jeden z důsledků Věty o otevřeném zobrazení.)

**Nástin řešení**
**Příklad 7**: Pro každé $x \in c_0$ a $t \in [0,1]$ platí

$$|Tx(t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{|x_n|}{n^2} \exp(-nt) \le \|x\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} < \infty,$$

tedy $Tf(t)$ je dobře definované reálné číslo a navíc

$$\|Tx\|_3^3 = \int_0^1 |Tx(t)|^3 \,\mathrm{d}t \le \|x\|_\infty^3 \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2}\Big)^3 \int_0^1 1 \,\mathrm{d}t = \|x\|_\infty^3 \cdot \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2}\Big)^3,$$

tedy $\|Tx\|_3 \le \|x\|_\infty \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Nyní je snadné si uvědomit, že $T$ je spojitý lineární operátor a $\|T\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

S použitím reprezentace duálů klasických prostorů dostáváme, že pro každé $f \in L_{3/2}([0,1])$ je $T^*f$ posloupnost z $\ell_1 = (c_0)^*$ a protože množina $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ je lineárně hustá v $c_0$, je $T^*f$ jediná posloupnost z $\ell_1$ splňující pro každé $n \in \mathbb{N}$

$$T^*f(n) = T^*f(e_n) = f(Te_n) = \int_0^1 f(t)(Te_n)(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f(t)\exp(-nt)}{n^2} \,\mathrm{d}t.$$

Celkem tedy dostáváme, že $T^*f = \Big(\int_0^1 \frac{f(t)\exp(-nt)}{n^2} \,\mathrm{d}t\Big)_{n=1}^{\infty}$.

**Příklad 8**: Pro každé $f \in C_0(\mathbb{R})$ je zřejmě $Tf$ spojitá funkce a $\lim_{t\to\pm\infty} Tf(t) = 0$, tedy $Tf \in C_0(\mathbb{R})$. Je snadné si uvědomit, že operátor $T$ je lineární a že platí

$$\|Tf\|_\infty \le \|f\|_\infty \cdot \|\tfrac{1}{t^2+1}\|_\infty = \|f\|_\infty,$$

tedy $T$ je spojitý lineární operátor a $\|T\| \le 1$. Na druhou stranu, pro libovolnou $f \in C_0(\mathbb{R})$ splňující $\|f\|_\infty = 1 = f(0)$ (například $f(t) = \frac{1}{t^2+1}$) máme $\|Tf\|_\infty \ge |Tf(0)| = 1$, tedy $\|T\| = 1$.

Pro určení $\sigma_p(T) \subset [-1,1]$ řešme pro $\lambda \in [-1,1]$ rovnici

$$\lambda f(t) = Tf(t) = \frac{f(|t|)}{1+t^2}. \tag{1}$$

Pokud existuje $t_0 > 0$ splňující $f(t_0) \neq 0$, pak ze spojitosti $f$ najdeme otevřený interval $I \subset (0,\infty)$ na kterém je funkce $f$ nenulová a po vydělení rovnice výše číslem $f(t)$ na intervalu $I$ dostáváme $\lambda = \frac{1}{1+t^2}$, $t \in I$. To ale není možné, neboť $\lambda$ je konstanta na intervalu $I$. Tedy každé řešení $f$ rovnice (1) splňuje že $f|_{(0,\infty)} \equiv 0$ a tedy $\lambda f(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Pokud je $\lambda \neq 0$, pak $f \equiv 0$ a tedy $\lambda \notin \sigma_p(T)$. Pokud je $\lambda = 0$, pak například $f(t) = \max\{0, 1 - |t+1|\}$ je nenulovým řešením a tedy $\sigma_p(T) = \{0\}$.

Pro určení $\sigma(T)$ si nejprve uvědomme, že $\sigma(T) \subset B(0, \|T\|) = [-1,1]$. Zafixujme $g \in C_0(\mathbb{R})$ a řešme pro $\lambda \in [-1,1]$ rovnici

$$g(t) = Tf(t) - \lambda f(t) = \frac{f(|t|)}{1+t^2} - \lambda f(t). \tag{2}$$

Pro $t \ge 0$ tak dostáváme $g(t) = f(t)(\frac{1}{t^2+1} - \lambda)$ a tedy $f(t) = g(t)\Big(\frac{1}{t^2+1} - \lambda\Big)^{-1}$ pro $t \in [0,\infty) \cap \{t\colon \frac{1}{1+t^2} \neq \lambda\}$. Uvědomme si, že $\mathrm{Rng}(\frac{1}{t^2+1}) = (0,1]$ a $\frac{1}{t^2+1} = 1$ právě když $t = 0$, a tedy pokud $\lambda \in (0,1)$, pak existuje $t_0 > 0$ splňující $\frac{1}{1+t_0^2} = \lambda$ a protože funkce $g$ je omezená, dostáváme pak

$$\lim_{t\to t_0} |f(t)| = \lim_{t\to t_0} \Big|g(t)\Big(\tfrac{1}{t^2+1} - \lambda\Big)^{-1}\Big| = \infty$$

a proto $f$ není omezená funkce, speciálně $f \notin C_0(\mathbb{R})$ a tedy neexistuje v $C_0(\mathbb{R})$ řešení rovnice (2) a proto $\sigma(T) \supset (0,1)$. Protože $\sigma(T)$ je uzavřená množina, dostáváme $[0,1] \subset \sigma(T)$. Na druhou stranu, zvolme $\lambda \in [-1,0)$. Dle výše zjištěného každé řešení rovnice (2) splňuje $f(t) = g(t)\Big(\frac{1}{t^2+1} - \lambda\Big)^{-1}$ pro $t \in [0,\infty)$. Pro $t < 0$ zase s použitím předchozího dostáváme

$$g(t) = \frac{f(-t)}{1+t^2} - \lambda f(t) = \frac{g(-t)}{1+t^2}\Big(\frac{1}{t^2+1} - \lambda\Big)^{-1} - \lambda f(t) = \frac{g(-t)}{1-\lambda(1+t^2)} - \lambda f(t),$$

a tedy jediným řešením rovnice (2) je funkce

$$f(t) = \begin{cases} g(t)\Big(\frac{1}{t^2+1} - \lambda\Big)^{-1} & t \geq 0, \\ \frac{1}{\lambda}\Big(\frac{g(-t)}{1-\lambda(1+t^2)} - g(t)\Big) & t < 0. \end{cases}$$

Protože $\lambda \notin \operatorname{Rng}(\frac{1}{t^2+1})$, je $f$ spojitá funkce na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ a snadno spočteme, že $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0) = g(0)(1-\lambda)^{-1}$, $\lim_{t\to 0^-} f(t) = \frac{g(0)}{\lambda}(\frac{1}{1-\lambda} - 1)$ a tak snadno nahlédneme že $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0) = \lim_{t\to 0^-} f(t)$, tedy $f$ je spojitá funkce na $\mathbb{R}$. Navíc, snadno spočteme že

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = (0-\lambda)^{-1} \lim_{t\to\infty} g(t) = 0$$

a

$$\lim_{t\to -\infty} f(t) = \tfrac{1}{\lambda}\Big(0 \cdot \lim_{t\to\infty} g(t) - \lim_{t\to-\infty} g(t)\Big) = 0,$$

a tedy $f \in C_0(\mathbb{R})$ je řešením rovnice (2) a $\lambda \notin \sigma(T)$. Celkem tedy $\sigma(T) = [0,1]$.

Protože $0 \in \sigma_p(T)$, operátor $T$ není prostý a tedy není isomorfismus. Protože spektrum operátoru $T$ není spočetné, operátor $T$ není kompaktní.

**Příklad 9**: Pro každé $x \in \mathbb{R}$ máme

$$(f_n * f_1)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} \chi_{[-1,1]}(x-y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{[-n,n]\cap[x-1,x+1]} \mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lambda([-n,n]\cap[x-1,x+1]).$$

Tedy, $(f_n * f_1)(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$, $(f_n * f_1)(x) = 0$ pro $|x| > n+1$ a konečně

$$\|f_n * f_1\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{x\in\mathbb{R}} \lambda([x-1,x+1]) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Dále platí $\widehat{f_n * f_1} = \widehat{f_n} \cdot \widehat{f_1}$. Spočtěme tedy nejprve $\widehat{f_n}$ (ve výpočtu níže používáme sudost funkce cosinus a lichost funkce sinus):

$$\widehat{f_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} e^{-itx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^n \cos(tx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \Big[\frac{\sin(tx)}{t}\Big]_0^n = \frac{2\sin(nt)}{t\sqrt{2\pi}}, \quad t \neq 0.$$

Dostáváme tak že pro $x \neq 0$ platí $\widehat{f_n * f_1}(x) = \widehat{f_n}(x)\widehat{f_1}(x) = \frac{2\sin(nx)}{x\sqrt{2\pi}} \frac{2\sin(x)}{x\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(nx)\sin(x)}{x^2}$.

Protože Fourierova transformace je zobrazení do $C_0(\mathbb{R})$, je funkce $|g_n| = |\widehat{f_n * f_1}|$ spojitá a tedy je integrovatelná, právě když je integrovatelná "u $\pm\infty$". Protože $|g_n(x)| \leq \frac{2}{\pi x^2} \in L_1(\mathbb{R} \setminus [-1,1])$, ze srovnávacího kritéria vidíme, že $|g_n|$ je integrovatelná "u $\pm\infty$"a tedy $g_n \in L_1(\mathbb{R})$.

Odhadněme nyní $\|g_n\|_{L_1}$. Předně metodami z prvního semestru matematické analýzy ověříme, že $\sin t \geq t \sin 1$ pro $t \in [0,1]$ (plyne například z toho, že funkce $\sin t$ je konkávní na $[0,1]$). Pak odhadneme

$$\begin{aligned} \|g_n\|_1 &\geq \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{|\sin(nx)\sin(x)|}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^n \frac{n|\sin(t)|\sin(\frac{t}{n})}{t^2}\,\mathrm{d}t \geq \frac{2\sin 1}{\pi} \int_0^n \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \\ &\geq \frac{2\sin 1}{\pi} \int_1^n \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2\sin 1}{\pi} \int_0^\infty \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t = \infty, \end{aligned}$$

tedy $\|g_n\|_1 \to \infty$.

Protože $\widehat{f_n * f_1} = g_n \in L_1$, z věty o inverzi dostáváme $\widehat{g_n}(x) = f_n \hat{\hat{*}} f_1(x) = (f_n * f_1)(-x)$ s.v. a ze spojitosti funkce $\widehat{g_n}$ tak dostáváme, že $\|\widehat{g_n}\|_\infty \leq \|f_n * f_1\|$ a s použitím již dokázaného bodu (i) tak platí $\|\widehat{g_n}\|_\infty \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Víme, že Fourierova transformace je prosté lineaární zobrazení $L_1$ do $C_0(\mathbb{R})$. Kdyby bylo surjektivní, pak by se jednalo o isomorfismus (dle jednoho z důsledků Věty o otevřeném zobrazení). Ale to by byl spor neboť výše bylo ukázáno, že $\|\widehat{g_n}\|_\infty \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ kdežto $\|g_n\|_1 \to \infty$, tedy nemůže existovat konstanta $c$ splňující $\|g_n\|_1 \leq c\|g_n\|_\infty$, $n \in \mathbb{N}$.

**Úvod do funkcionální analýzy, ZS 2021-2022**
**Zadání písemné části zkoušky - termín 31.1.**

**Příklad 10** (14 bodů)**.** V tomto příkladu uvažujte reálné Banachovy prostory. Nechť je dán operátor $T : C([0,1]) \to L_2([0,1], \sin t \, \mathrm{d}\lambda)$ předpisem

$$Tf(t) = \sqrt{t} f(t), \quad f \in C([0,1]).$$

(připomeňme, že mírou $\sin t \, \mathrm{d}\lambda$ rozumíme borelovskou míru $\mu$, pro kterou platí $\int_0^1 f(t) \mathrm{d}\mu(t) = \int_0^1 f(t) \sin t \, \mathrm{d}t$ pro každou $f \in C([0,1])$)

(i) Ukažte, že $T$ je spojitý lineární operátor. (4 body)
(ii) Vyjádřete duální operátor $T^*$ pomocí reprezentace duálů klasických prostorů. (5 bodů)
(iii) Uvažujme podprostor

$$Z = \{f \in C([0,1]) \colon f|_{[0,\frac{1}{2}]} = 0\} \subset C([0,1]).$$

Je $T|_Z$ isomorfismus? (5 bodů)

**Příklad 11** (27 bodů)**.** V tomto příkladu uvažujte komplexní Banachovy prostory. Nechť je dán operátor $T : \ell_1 \to \ell_1$ předpisem

$$T(x) = \left(\tfrac{2}{1}x_2, -\tfrac{1}{2}x_1, \tfrac{3}{2}x_4, -\tfrac{2}{3}x_3, \ldots, \tfrac{n+1}{n}x_{2n}, -\tfrac{n}{n+1}x_{2n-1}, \ldots\right), \qquad x \in \ell_1.$$

(i) Ukažte, že $T$ je spojitý lineární operátor. (3 body)
(ii) Určete $\|T\|$. (2 body)
(iii) Nalezněte $\sigma_p(T)$ a pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ nalezněte alespoň jeden nenulový vlastní vektor. (10 bodů)
(iv) Nalezněte $\sigma(T)$. (10 bodů)
(v) Určete, zda je $T$ isomorfismus a zda je $T$ kompaktní operátor. (2 body)

**Příklad 12** (9 bodů)**.** Nechť je dána funkce $f(x) = (|x| - 3)\chi_{[-3,3]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Nalezněte Fourierovu transformaci $\widehat{f}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. (5 bodů)
(ii) Aplikujte předchozí bod a s pomocí Plancherelovy věty odvoďte hodnotu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\cos(3t) - 1}{t^2}\Big)^2 \mathrm{d}t.$$

(4 body)

**Nástin řešení**
**Příklad 10**: Pro každou $f \in C([0,1])$ platí

$$\|Tf\|_{L_2}^2 = \int_0^1 tf^2(t)\sin t\,\mathrm{d}t \le \|f\|_\infty^2 \int_0^1 t\sin t\,\mathrm{d}t \le \sin 1\|f\|_\infty^2,$$

tedy $Tf \in L_2([0,1],\sin t\,\mathrm{d}\lambda)$ a $T$ je dobře definovaný spojitý lineární operátor splňující $\|T\| \le \sqrt{\sin 1}$.

S použitím reprezentace duálů klasických prostorů dostáváme, že pro každé $f \in L_2([0,1],\sin t\,\mathrm{d}\lambda)$ je $T^*f \in M([0,1])$ jediná znaménková míra splňující pro každé $g \in C([0,1])$

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}(T^*f)(t) = T^*f(g) = g(Tf) = \int_0^1 \sqrt{t}f(t)g(t)\sin t\,\mathrm{d}t,$$

a tedy vidíme, že $T^*f = \sqrt{t}f(t)\sin t\,\mathrm{d}\lambda$.

Pro $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ uvažujme funkce $f_n(x) := \max\{1 - n|x-1|, 0\} \in S_Z$, $x \in [0,1]$. Pak $\{f_n \neq 0\} \subset (1-1/n, 1+1/n)$ a tedy

$$\|Tf_n\|_{L_2}^2 = \int_{1-\frac{1}{n}}^1 tf_n(t)^2 \sin t\,\mathrm{d}t \le \int_{1-\frac{1}{n}}^1 \sin 1\,\mathrm{d}t = \frac{\sin 1}{n} \to 0,$$

a proto $T|_Z$ není isomorfismus.

**Příklad 11**: Pro každé $x \in \ell_1$ platí

$$\|Tx\|_1 = \sum_{n=1}^\infty |\tfrac{n+1}{n}x_{2n}| + |\tfrac{n}{n+1}x_{2n-1}| \le 2^3 \sum_{n=1}^\infty |x_{2n}| + |x_{2n-1}| \le 2\|x\|_3,$$

tedy $Tx \in \ell_1$ a snadno pak nahlédneme, že $T$ je spojitý lineární operátor a $\|T\| \le 2$. Pro $e_2 \in S_{\ell_1}$ dále platí $\|T(e_2)\|_1 = \|2e_1\|_1 = 2$, tedy $\|T\| = 2$.

Pro určení $\sigma_p(T) \subset B_{\mathbb{C}}(0,2)$ řešme pro $\lambda \in B_{\mathbb{C}}(0,2)$ rovnici $\lambda x = Tx$. Porovnáním jednotlivých souřadnic vidíme, že $x \in \ell_1$ je řešením této rovnice, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ je splněna následující soustava rovnic

$$\lambda x_{2n-1} = \tfrac{n+1}{n}x_{2n} \quad \& \quad \lambda x_{2n} = -\tfrac{n}{n+1}x_{2n-1}.$$

Pokud je $\lambda = 0$, pak dostáváme $x_{2n} = x_{2n-1} = 0$ a tedy nenulové řešení neexistuje, a proto $0 \notin \sigma_p(T)$. Pro $\lambda \neq 0$ musíme pro každé $n \in \mathbb{N}$ řešit soustavu rovnic danou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -\frac{n+1}{n} & 0 \\ \frac{n}{n+1} & \lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -\frac{n+1}{n} & 0 \\ 0 & 1+\lambda^2 & 0 \end{array}\right)$$

a tedy pokud má soustava rovnic nenulové řešení, musí být $\lambda^2 + 1 = 0$ (tj. $\lambda = \pm i$). Tedy $\sigma_p(T) \subset \{\pm i\}$. Pro $\lambda = \pm i$ lehko spočteme, že nenulovým řešením rovnice $\lambda x = Tx$ je například vektor $x = (\mp i2, 1, 0, 0, 0, \dots)$ (nebo jakýkoliv jiný vektor, pro který platí $\lambda x_{2n-1} = \frac{n+1}{n}x_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$).

Pro určení $\sigma(T)$ zvolme $\lambda \in B(0,2) \setminus \{\pm i\}$, $y \in \ell_1$ a řešme rovnici $\lambda x - Tx = y$ pro $x \in \ell_1$. Pak $x \in \ell_1$ je řešením této rovnice, právě když pro každé $n \in \mathbb{N}$ je splněna soustava rovnic

$$\lambda x_{2n-1} - \tfrac{n+1}{n}x_{2n} = y_{2n-1} \quad \& \quad \lambda x_{2n} + \tfrac{n}{n+1}x_{2n-1} = y_{2n}.$$

Pokud je $\lambda = 0$, pak rovnici řeší $x = (2y_2, -\frac{1}{2}y_1, \dots, \frac{n+1}{n}y_{2n}, -\frac{n}{n+1}y_{2n-1}, \dots) = Ty \in \ell_1$, a tedy $0 \notin \sigma(T)$. Pro $\lambda \neq 0$ musíme pro každé $n \in \mathbb{N}$ řešit soustavu rovnic danou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} \lambda & -\frac{n+1}{n} & y_{2n-1} \\ \frac{n}{n+1} & \lambda & y_{2n} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda\frac{n}{n+1} & -1 & \frac{n}{n+1}y_{2n-1} \\ -\lambda\frac{n}{n+1} & -\lambda^2 & -\lambda y_{2n} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} \lambda\frac{n}{n+1} & -1 & \frac{n}{n+1}y_{2n-1} \\ 0 & -(1+\lambda^2) & \frac{n}{n+1}y_{2n-1} - \lambda y_{2n} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} -(1+\lambda^2)\lambda\frac{n}{n+1} & 0 & -\frac{n\lambda^2}{n+1}y_{2n-1} - \lambda y_{2n} \\ 0 & -(1+\lambda^2) & \frac{n}{n+1}y_{2n-1} - \lambda y_{2n} \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} (1+\lambda^2) & 0 & \lambda y_{2n-1} + \frac{n+1}{n}y_{2n} \\ 0 & (1+\lambda^2) & -\frac{n}{n+1}y_{2n-1} + \lambda y_{2n} \end{array}\right)$$

a tedy řešení rovnice je dáno vektorem $x$, pro nějž platí (používáme, že $\lambda \notin \{0, \pm i\}$)

$$x_{2n-1} = \tfrac{\lambda}{1+\lambda^2}y_{2n-1} + \tfrac{n+1}{n(1+\lambda^2)}y_{2n}, \qquad x_{2n} = -\tfrac{n}{(n+1)(1+\lambda^2)}y_{2n-1} + \frac{\lambda}{1+\lambda^2}y_{2n},$$

což je vsutku prvek $\ell_1$, neboť

$$\begin{aligned} |x_{2n-1}| + |x_{2n}| &\leq \tfrac{|\lambda|}{|1+\lambda^2|}|y_{2n-1}| + \tfrac{2}{|1+\lambda^2|}|y_{2n}| + \tfrac{1}{|1+\lambda^2|}|y_{2n-1}| + \tfrac{|\lambda|}{|1+\lambda^2|}|y_{2n}| \\ &\leq \tfrac{2}{|1+\lambda^2|}(2|y_{2n-1}| + 2|y_{2n}|) = \tfrac{4}{|1+\lambda^2|}(|y_{2n-1}| + |y_{2n}|), \end{aligned}$$

a tedy $\|x\|_1 \leq \frac{4}{|1+\lambda^2|}\|y\|_1$. Celkem tak dostáváme, že $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{\pm i\}$.

Protože $0 \notin \sigma(T)$, operátor $T$ je isomorfismus a tedy není kompaktní.

**Příklad 12:** Pro $t \in \mathbb{R}$ platí (používáme, že funkce $f(x)$ je sudá, a tedy $f(x)\sin x$ je lichá a $f(x)\cos x$ je sudá)

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-itx}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)\cos tx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^3 (x-3)\cos tx\,\mathrm{d}x$$

a s použitím metody per partes pro $t \neq 0$ pak dostáváme

$$\widehat{f}(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\Big(\tfrac{1}{t}\Big[(x-3)\sin tx\Big]_{x=0}^3 - \tfrac{1}{t}\int_0^3 \sin tx\,\mathrm{d}x\Big) = \frac{2}{t\sqrt{2\pi}}\Big[\frac{\cos tx}{t}\Big]_{x=0}^3 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\frac{\cos(3t)-1}{t^2}$$

a pro $t = 0$ máme

$$\widehat{f}(0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^3 (x-3)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(\tfrac{9}{2} - 9) = -\frac{9}{\sqrt{2\pi}}.$$

Protože $f \in L_1 \cap L_2$, aplikací Plancherelovy věty máme $\|\widehat{f}\|_2^2 = \|f\|_2^2$ a tedy

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Big(\frac{\cos(3t)-1}{t^2}\Big)^2\,\mathrm{d}t &= \frac{2\pi}{4}\int_{\mathbb{R}} \big(\widehat{f}(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\|f\|_2^2 = \frac{\pi}{2}\int_{-3}^3 (|x|-3)^2\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^3 (x-3)^2\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\Big[\frac{(x-3)^3}{3}\Big]_0^3 = 9\pi. \end{aligned}$$

**Úvod do funkcionální analýzy, ZS 2021-2022**
**Zadání písemné části zkoušky - termín 7.2.**

**Příklad 13** (10 bodů)**.** Na prostoru $X = c_0 \oplus_\infty C([0,1])$ nad tělesem reálných čísel definujme funkcionál $\varphi : X \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(x,f) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} + \int_0^1 tf(t^2)\,\mathrm{d}t + f(0), \quad x \in c_0,\ f \in C([0,1]).$$

Ukažte, že $\varphi \in X^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

**Příklad 14** (25 bodů)**.** V tomto příkladu uvažujte reálné Banachovy prostory. Nechť je dán Hilbertův prostor $H = L_2([0,1], t\ \mathrm{d}t)$ (připomeňme, že mírou $t$ d$t$ rozumíme borelovskou míru $\mu$, pro kterou platí $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}\mu(t) = \int_0^1 f(t)t\ \mathrm{d}t$ pro každou $f \in C([0,1])$). Ať jsou dány funkce $f_1, f_2 \in H$ předpisem

$$f_1(t) = \sqrt{2}, \quad f_2(t) = 6t - 4, \quad t \in [0,1].$$

Nechť operátor $T : H \to H$ je dán předpisem

$$Tf(t) = f(t) + \langle f, f_1 \rangle + \langle f, f_2 \rangle t, \quad f \in L_2([0,1]).$$

(i) Ukažte, že $\{f_1, f_2\}$ je ortonormální systém v $H$. (3 body)
(ii) Ukažte, že $T$ je spojitý lineární operátor. (3 body)
(iii) Nalezněte $\sigma_p(T)$ a $\sigma(T)$. (10 bodů)
(iv) Určete, zda je $T$ isomorfismus a zda je $T$ kompaktní operátor. (2 body)
(v) Vyjádřete hilbertovsky adjungovaný operátor $T^\star$. (7 bodů)

**Příklad 15** (15 bodů)**.** Nechť je dána funkce $f(x) = e^{ix-3|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

(i) Nalezněte Fourierovu transformaci $\widehat{f}(t)$, $t \in \mathbb{R}$. (7 bodů)
(Hint: mělo by vám vyjít "const. $\frac{1}{t^2-2t+10}$")
(ii) Ukažte, že $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$ a určete, čemu je rovno $\hat{\hat{f}}(t)$ pro $t \in \mathbb{R}$. (2 body)
(iii) Aplikujte předchozí body a odvoďte pro každé $x \in \mathbb{R}$ hodnotu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)}{t^2 - 2t + 10} \mathrm{d}t.$$

(6 bodů)
(Hint: uvědomte si, že $\sin(tx)$ lze napsat s pomocí imaginární části $e^{-itx}$ a vyjádřete zadaný integrál ve tvaru "$const\,\mathrm{Im}\left(\int e^{-itx}\widehat{f}(t)\mathrm{d}t\right) = const \cdot \mathrm{Im}\left(\hat{\hat{f}}(x)\right)$".)

**Nástin řešení**
**Příklad 13**: Uvažujme funkcionály $\varphi_1 : c_0 \to \mathbb{R}$ a $\varphi_2 : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad \varphi_2(f) = \int_0^1 tf(t^2)\,\mathrm{d}t + f(0).$$

Pak pro $f \in C([0,1])$ máme

$$|\varphi_2(f)| \le \int_0^1 |tf(t^2)|\,\mathrm{d}t + |f(0)| \le \|f\|_\infty \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \|f\|_\infty = \frac{3}{2}\|f\|_\infty$$

a tedy $\varphi_1 \in (C([0,1]))^*$ a $\|\varphi_2\| \le \frac{3}{2}$. Navíc, pro $f(t) = 1$, $t \in [0,1]$ máme $|\varphi_2(f)| = \int_0^1 t\mathrm{d}t + 1 = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\|f\|_\infty$ a tedy $\|\varphi_2\| = \frac{3}{2}$. Dle reprezentace $(c_0)^* = \ell_1$ máme $\varphi_1 \in (c_0)^*$ a $\|\varphi_1\| = \|(3^{-n})\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} = \frac{1}{2}$.

Konečně, máme $\varphi(f,g) = \varphi_1(f) + \varphi_2(g)$ a tedy dle reprezentace $(c_0 \oplus_\infty C([0,1]))^* = (c_0)^* \oplus_1 (C([0,1]))^*$ máme $\varphi \in X^*$ a $\|\varphi\| = \|(\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\|)\|_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$.

**Příklad 14**: Protože

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \int_0^1 \sqrt{2}(6t-4)t\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\Big[6\tfrac{t^3}{3} - 4\tfrac{t^2}{2}\Big]_{t=0}^1 = 0,$$

je $\{f_1, f_2\}$ ortogonální systém a protože

$$\|f_1\|^2 = \langle f_1, f_1 \rangle = \int_0^1 2t\,\mathrm{d}t = 1, \quad \|f_2\|^2 = \langle f_2, f_2 \rangle = \int_0^1 (6t-4)^2 t\,\mathrm{d}t = 4\int_0^1 9t^3 - 12t^2 + 4t\,\mathrm{d}t = 1,$$

je tento systém dokonce ortonormální.

Označme $S : L_2([0,1], t\,\mathrm{d}t) \to L_2([0,1], t\,\mathrm{d}t)$ operátor daný předpisem $Sf(t) = \langle f, f_1 \rangle + \langle f, f_2 \rangle t$, pak pro $f \in L_2$ s použitím Cauchy-Schwartzovy nerovnosti máme

$$|Sf(t)| \le \|f\|_2\|f_1\|_2 + \|f\|_2\|f_2\|_2 t = \|f\|_2(1+t), \quad t \in [0,1],$$

a tedy

$$\|Sf\|_2^2 \le \|f\|_2^2 \int_0^1 (1+t)^2 t\,\mathrm{d}t \le 4\|f\|_2^2 \int_0^1 \mathrm{d}t = 4\|f\|_2^2.$$

Snadno tak nahlédneme, že $S$ je spojitý lineární operátor, $\|S\| \le 2$ a protože $T = I + S$, je $T$ také spojitý lineární operátor (a $\|T\| \le 3$).

Uvědomme si nyní, že $T = I + S$, kde $S$ je konečně-dimenzionální operátor definovaný výše (v oboru hodnot $S$ jsou funkce tvaru $a + bt$, $t \in [0,1]$, tj. obor hodnot $S$ je dvoudimenzionální a je generován funkcemi $f_1$ a $f_2$ neboť $\mathrm{Span}\{1, t\} = \mathrm{Span}\{f_1, f_2\}$).

Pro určení $\sigma_p(S)$ řešme rovnici $Sf = \lambda f$. Pokud je $\lambda = 0$, pak libovolná nenulová funkce $f \in \{f_1, f_2\}^\perp$ splňuje že $Sf = 0$ a tedy $0 \in \sigma_p(S)$ (taková $f$ zřejmě existuje, neboť v opačném případě by $\{f_1, f_2\}$ byla ortonormální báze $H$ a celý prostor $H$ by byl konečně-dimenzionální, což zřejmě není neboť například $t^2 \in H \setminus \mathrm{span}\{f_1, f_2\}$). Pokud $\lambda \ne 0$, pak $f = Sf/\lambda \in \mathrm{Rng}\, S = \mathrm{Span}\{f_1, f_2\}$ a tedy $f$ musí být tvaru $f = af_1 + bf_2$ pro nějaké konstanty $a, b \in \mathbb{R}$. Pak ale pro s.v. $t \in [0,1]$ platí

$$Sf(t) = \langle af_1 + bf_2, f_1 \rangle + \langle af_1 + bf_2, f_2 \rangle t = a + bt,$$

a zároveň

$$\lambda f(t) = \lambda(af_1(t) + bf_2(t)) = \lambda(\sqrt{2}a + b(6t-4)) = \lambda(\sqrt{2}a - 4b + 6bt),$$

tedy $\lambda \ne 0$ je vlastním číslem, právě když existuje nenulové řešení soustavy rovnic

$$a = \lambda(\sqrt{2}a - 4b), \quad b = 6\lambda b.$$

To existuje pouze pokud $\lambda = \frac{1}{6}$ (pak soustavu řeší například $(a,b) = (\frac{-4}{6-\sqrt{2}}, 1)$), nebo pokud $b = 0$ a $\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (pak soustavu řeší například $(a,b) = (1,0)$). Celkem tedy dostáváme, že $\sigma_p(S) = \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Protože operátor $S$ je konečně-dimenzionální, je také kompaktní a tedy $\sigma_p(S) = \sigma(S) = \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ máme $T - \lambda I = S - (\lambda - 1)I$ a tedy snadno dostáváme, že $\sigma_p(T) = \sigma(T) = \{1, \frac{7}{6}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

Protože $0 \notin \sigma(T)$, je operátor $T$ prostý a na, tedy isomorfismus a proto není kompaktní.

Pro určení hilbertovsky adjungovaného operátoru si uvědomíme, že $T^\star = S^\star + I^\star = S^\star + I$ a tedy bude stačit určit adjungovaný operátor $S^\star$. Pro každé $g \in L_2$ je $S^\star g$ jediná funkce z $L_2$ splňující pro každé $f \in L_2$ rovnici $\langle Sf, g\rangle = \langle f, S^\star g\rangle$, kde

$$\langle f, S^\star g\rangle = \int_0^1 tf(t)S^\star g(t)\,\mathrm{d}t.$$

a

$$\begin{aligned}
\langle Sf, g\rangle &= \int_0^1 tg(t)(\langle f, f_1\rangle + \langle f, f_2\rangle t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tg(t)\int_0^1 f(s)(f_1(s) + tf_2(s))s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t \\
&\overset{FUBINI}{=} \int_0^1 sf(s)\int_0^1 tg(t)f_1(s) + t^2g(t)f_2(s)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s \\
&= \int_0^1 sf(s)\Big(\langle 1, g\rangle f_1(s) + \langle t, g\rangle f_2(s)\Big)\,\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

a tedy vidíme, že $S^\star g(s) = \langle 1, g\rangle f_1(s) + \langle t, g\rangle f_2(s)$, $s \in [0,1]$ (jedná se opravdu o funkci z $L_2$ neboť to je lineární kombinace funkcí $f_1$ a $f_2$).

Tedy, pro $g \in L_2$ máme $T^\star g(s) = g(s) + \langle 1, g\rangle f_1(s) + \langle t, g\rangle f_2(s)$, $s \in [0,1]$.

**Příklad 15**: Pro $t \in \mathbb{R}$ s použitím lichosti funkce sinus a sudosti funkce cosinus dostáváme

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{ix-3|x|}e^{-itx}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-3|x|}e^{-i(t-1)x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-3x}\cos((t-1)x)\,\mathrm{d}x$$

a pokud dvakrát aplikujeme metodu per partes, dostaneme pro $t \neq 1$

$$I = \int_0^\infty e^{-3x}\cos((t-1)x)\,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{3}{(t-1)^2} - \frac{9}{(t-1)^2}I,$$

z čehož spočteme že $I = \frac{3}{9+(t-1)^2}$ a tedy

$$\widehat{f}(t) = \frac{6}{(9+(t-1)^2)\sqrt{2\pi}} = \frac{6}{(t^2-2t+10)\sqrt{2\pi}}, \quad t \neq 1$$

a protože funkce $\widehat{f}$ je spojitá, vzorec platí i pro $t = 1$.

Protože funkce $\widehat{f}$ je spojitá, je integrovatelná, právě když je integrovatelná "u $\pm\infty$". Protože $|\widehat{f}(t)| \leq \frac{6}{(t-1)^2} \in L_1(\mathbb{R} \setminus [-10, 10])$, ze srovnávacího kritéria vidíme, že $\widehat{f}(t)$ je integrovatelná "u $\pm\infty$"a tedy $\widehat{f} \in L_1(\mathbb{R})$. Protože funkce $f$ je spojitá, dle věty o inverzi tak máme, že $\hat{\hat{f}}(t) = f(-t)$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Konečně, s použitím předchozích bodů a toho že $\sin(tx) = -\operatorname{Im}(e^{-itx})$ dostáváme pro $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin(tx)}{t^2-2t+10}\mathrm{d}t &= -\frac{\sqrt{2\pi}}{6}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\operatorname{Im}(e^{-itx})\,\mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{2\pi}}{6}\operatorname{Im}\Big(\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)e^{-itx}\,\mathrm{d}t\Big) \\
&= -\frac{\sqrt{2\pi}}{6}\operatorname{Im}(\sqrt{2\pi}\hat{\hat{f}}(x)) = -\frac{2\pi}{6}\operatorname{Im}(f(-x)) = -\frac{\pi}{3}\operatorname{Im}(e^{-ix-3|x|}) \\
&= \frac{\pi}{3}e^{-3|x|}\sin(x).
\end{aligned}$$