

Písemná zkouška z UFA (D)
ZS 2023/2024

Úloha 1. Necht' je zobrazení $T: \ell_2 \rightarrow C([0, 1])$ dáno předpisem

$$T((x_n))(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \sqrt[n]{t}.$$

Ukažte, že T je dobře definovaný spojitý lineární operátor a spočtěte jeho normu. Pomocí standardní reprezentace duálů popište duální operátor T^* .

Úloha 2. Definujme zobrazení $T: C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ předpisem $Tf(x) = \int_x^1 t f(t) dt$. Ukažte, že T je spojitý lineární operátor. Určete, je-li operátor T kompaktní. Vyšetřete jeho spektrum a bodové spektrum.

Používáte-li nějaké sofistikovanější věty, zformulujte je.

Řešení

Úloha 1. $\|T\| = \frac{\pi}{\sqrt{6}}$, $(T^*\mu)_n = \frac{1}{n} \int_{[0,1]} \sqrt[n]{t} d\mu(t)$.

Úloha 2. $\|T\| = \frac{1}{2}$, je kompaktní, $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = \{0\}$.