

Písemná zkouška z UFA (A)
ZS 2023/2024

Úloha 1. Necht' je zobrazení $T: L_1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ dáno předpisem

$$Tf(t) = \int_0^t s^2 f(s) \, ds.$$

Ukažte, že T je spojitý lineární operátor a spočtěte jeho normu. Pomocí standardní reprezentace duálů popište duální operátor T^* .

Úloha 2. Definujme zobrazení $T: \ell_\infty \rightarrow \ell_\infty$ předpisem

$$T((x_n)) = (-x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_4, \dots).$$

Ukažte, že T je spojitý lineární operátor. Určete, je-li operátor T kompaktní. Vyšetřete jeho spektrum a bodové spektrum.

Používáte-li nějaké sofistikovanější věty, zformulujte je.

Řešení

Úloha 1. $\|T\| = 1$, $T^*\mu(s) = s^2\mu([s, 1])$.

Úloha 2. $\|T\| = 2$, není kompaktní, $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma(T) = B(-1, 1)$.