1. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte.

(a) (11 bodů) Nechť $X = L_2([-\pi,\pi]) \oplus_7 \ell_1$ a $Y = L_1([-\pi,\pi]) \oplus_8 c_0$ jsou prostory uvažované nad $\mathbb{C}$. Uvažujme předpis

$$T(f,x) = (g,y), \quad \text{kde} \quad g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e^{int} \text{ a } y = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\Big)_{n=1}^{\infty}.$$

(4 body) Ukažte, že T je spojitý operátor z X do Y.

(5 bodů) Nalezněte duální operátor $T^*: Y^* \to X^*$ v rámci standardních dualit.

(2 body) Zjistěte, zda je X reflexivní prostor.

(b) (12 bodů) Uvažujme na $\mathbb{R}$ míru $\mu = e^{-|t|}\lambda(t)$, tj. míru definovanou jako $\mu(A) = \int_A e^{-|t|}dt$ pro $A \subset \mathbb{R}$ borelovskou. Nechť $X = L_6(\mathbb{R},\mu)$ uvažovaný jako prostor nad $\mathbb{C}$ a uvažujme předpis

$$(Tf)(x) = 2f(x) + \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)t d\mu(t)\right)x + \left(\int_{\mathbb{R}} f(t)(|t|)d\mu(t)\right)x^2, \quad x \in \mathbb{R}, f \in X.$$

(3 body) Ukažte, že T je spojitý lineární operátor na X.

(5 bodů) Nalezněte bodové spektrum T.

(2 body) Nalezněte spektrum T.

(2 body) Zjistěte, zda je T kompaktní.

(c) (7 bodů) Nechť je dána funkce $f(x) = (\cos x)\chi_{(0,\pi)}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Nechť F značí Fourierovu transformaci na $L_1(\mathbb{R})$ a P Fourierovu-Plancherelovu transformaci na $L_2(\mathbb{R})$.

(4 body) Nalezněte Pf.

(3 body) Určete hodnotu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{t}{1-t^2}(1+e^{-i\pi t})\right|^2 dt.$$

1. Niech $X = L_2([-\pi,\pi]) \oplus_7 \ell_1$, $Y = L_1([-\pi,\pi]) \oplus_8 c_0$

Wtedy $X^* \cong L_2([-\pi,\pi]) \oplus_{7'} \ell_\infty$, $Y^* \cong L_\infty([-\pi,\pi]) \oplus_{8'} \ell_1$

gdzie $\frac{1}{7} + \frac{1}{7'} = 1$, $\frac{1}{8} + \frac{1}{8'} = 1$, tzn. $7' = \frac{7}{6}$, $8' = \frac{8}{7}$

- Dla $T_1 : L_2 \to c_0$ jest zdefiniowane do dla Riemanna-Lebesgue'a,
$$f \mapsto \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt\right)_{n=1}^{\infty}$$
jest liniowe i $\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{int} dt\right| \leq \|f\|_{L_2} \cdot \|e^{int}\|_{L_2} =$
$= \|f\|_{L_2} \cdot \sqrt{2\pi}$. Tzn. $T \in \mathcal{L}(L_2, c_0)$

- Dla $T_2 : \ell_1 \to L_1$ mamy $\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum x_n e^{int}\right| dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} \sum |x_n| \, dt =$
$x \mapsto \sum x_n e^{int}$
$= 2\pi \|x\|_{\ell_1}$.

Tzn. $T_2 \in \mathcal{L}(\ell_1, L_1)$.

Zatem $\|T(f,x)\|_Y = \|(T_2 x, T_1 f)\|_Y = \left(\|T_2 x\|_{L_1}^8 + \|T_1 f\|_{c_0}^8\right)^{1/8}$
$\leq \left((2\pi)^8 \|f\|_{L_2}^8 + (2\pi)^8 \|x\|_{\ell_1}^8\right)^{1/8} \leq (2\pi)\left(\|f\|_{L_2}^8 + \|x\|_{\ell_1}^8\right)^{1/8} \leq$
$\leq (2\pi) \cdot K \cdot \left(\|f\|_{L_2}^7 + \|x\|_{\ell_1}^7\right)^{1/7} = 2\pi K \|(f,x)\|_X$
[K jest stałą izomorfizmu między $\|\cdot\|_8$ a $\|\cdot\|_7$ na $\mathbb{R}^2$.]

- $(T^*(g,y))(f,x) = (g,y)(T(f,x)) = (g,y)(T_2 x, T_1 f) =$
$(g,y) \in Y^* = L_\infty \oplus_{8'} \ell_1$, $T^*(g,y) = (h,z) \in X^*$
$= g(T_2 x) + y(T_1 f) = \int_{-\pi}^{\pi} (T_2 x) g + \sum_{n=1}^{\infty} (T_1 f)_n y_n =$
$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum x_n e^{int}\right) g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int}\right) y_n$, $(f,x) \in X$

Tzn. $(h,z)(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) z(t) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n$, $(f,x) \in X$

Proto: . $\sum_{n=1}^{\infty} x_n z_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum x_n e^{int}\right) g(t) \overset{\alpha)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{int}\right)$

$\lceil \alpha)$ Lebesgue: $\| \sum |x_n e^{int} g(t)| \|_{1} \le \left(\sum |x_n|\right) \|g\|_\infty = \|x\|_1 \|g\|_\infty < \infty \rfloor$

. $\int_{-\pi}^{\pi} f(t) h(t) \overset{\beta)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{n=1}^{\infty} y_n e^{int}\right) dt$

$\lceil \beta)$: $\| |f(t)| \left(\sum y_n e^{int}\right) \|_{L_1} \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \sum |y_n| \, dt \le$

$\le \|y\|_{\ell_1} \int_{-\pi}^{\pi} |f| \le \|y\|_{\ell_1} \|f\|_{L_2} \sqrt{2\pi} < \infty \Rightarrow$ Lebesgue $\rfloor$

Tedy $T^*(g, y) = \left(\sum_{1}^{\infty} y_n e^{-int}, \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{int}\right)_{n=1}^{\infty} \right)$

- X není reflexivní, neboť ℓ_1 je uzavřený podprostor X, ~~ko~~ že je nereflexivní prostor.

2. $X = L_6(\mathbb{R}, e^{-|t|}\lambda(t))$, $\varphi_1(f) = \int_{\mathbb{R}} f(t) \overbrace{t}^{g_1} d\mu(t)$, $f_1(x) = x$

$\varphi_2(f) = \int f(t) \overbrace{\cancel{t}|t|}^{g_2} d\mu(t)$, $f_2(x) = x^2$

Pak $6' = \frac{6}{5}$, $g_1 \in L_{6'}(\mu)$, $g_2 \in L_{6'}(\mu)$ $\Rightarrow$ $\varphi_1, \varphi_2 \in X^*$, $f_1, f_2 \in X$

$\Rightarrow$ $Sf = \varphi_1(f) f_1 + \varphi_2(f) f_2 \in \mathcal{F}(X) \subset \mathcal{K}(X)$

- Tedy $T\cancel{f} = 2I + S$ má spektrum, neboť jinak by $I = \frac{1}{2}(T-S)$ byl kompaktní.

- $\sigma_p(S)$: $\lambda f = \varphi_1(f) f_1 + \varphi_2(f) f_2$. Když $\lambda = 0$, pak $\ker \varphi_1 \cap \ker \varphi_2$ má kodimenzi 2, tedy je nenulový. Proto $\lambda \in \sigma_p(S)$.

Ať $\lambda \neq 0$: Pak $f = a f_1 + b f_2$ pro $a, b \in \mathbb{C}$. Pak

$$\lambda a f_1 + \lambda b f_2 = (a\varphi_1(f_1) + b\varphi_1(f_2)) f_1 + (a\varphi_2(f_1) + b\varphi_2(f_2)) f_2$$

$$\varphi_1(f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot t\, e^{-|t|}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-|t|} = 2\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}\, dt = 4$$

$$\varphi_1(f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \cdot t\, e^{-|t|} = 0$$

$$\varphi_2(f_1) = \int_{-\infty}^{\infty} t|t|\, e^{-|t|} = 0$$

$$\varphi_2(f_2) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |t|\, e^{-|t|} = 2\int_0^{\infty} t^3 e^{-t} = 2 \cdot 6 = 12$$

f_1, f_2 jsou lineárně nezávislé, tedy platí

$\lambda a = a \cdot 4 + b \cdot 0$
$\lambda b = a \cdot 0 + b \cdot 12$
$\Rightarrow$ $a(\lambda - 4) = 0$, $b(\lambda - 12) = 0$
$\Rightarrow$ $\lambda = 4 \Rightarrow f_1$ je vlastní vektor pro 4
$\lambda = 12 \Rightarrow f_2$ je vlastní vektor pro 12

Tedy $\sigma_p(S) = \{0, 4, 12\} = \sigma(S)$ z kompaktnosti S.
Tedy $\sigma_p(T) = \{2, 6, 14\}$.
Proto $\sigma(T) = 2 + \sigma_p(S) = \{2, 6, 14\}$.

3. $f=(\cos x)\,\chi_{(0,\pi)}(x)$. Pak $f \in L_1 \cap L_2$, tedy $Ff = Pf$.

- $$Ff(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-itx}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \cos x \, e^{-itx}\,dx.$$

$$I = \int_0^{\pi} \underset{\sin x}{\cos x}\ \underset{e^{-itx}(-it)}{e^{-itx}}\,dx = \left[\sin x\, e^{-itx}\right]_0^{\pi} - (-it)\int_0^{\pi} \underset{-\cos x}{\sin x}\ \underset{e^{-itx}(-it)}{e^{-itx}}\,dx =$$

$$= it\left(\left[-\cos x\, e^{-itx}\right]_0^{\pi} + it\int (-\cos x)\, e^{-itx}\right)$$

$$= it\left(-\left((-1)e^{-it\pi} - 1\right) - it\, I\right) =$$

$$= it\left(1 + e^{-it\pi}\right) + t^2 I \quad \Rightarrow \quad I = \frac{it}{1-t^2}\left(1+e^{-it\pi}\right), \ t \neq \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad Ff(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{it}{1-t^2}\left(1+e^{-it\pi}\right), \ t \neq \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad Pf = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{it}{1-t^2}\left(1+e^{-it\pi}\right), \ t \neq \pm 1$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{t}{1-t^2}\left(1+e^{-it\pi}\right)\right|^2 dt = (2\pi)\, \|Pf\|^2_{L^2(\mathbb{R})} =$$

$$= (2\pi)\, \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = (2\pi)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} (\cos x)^2\,dx$$

$$= (2\pi) \int_0^{\pi} (\cos x)^2\,dx = \frac{2\pi}{2}\left[x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \pi^2$$