4. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKA

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte.

(a) (11 bodů) Nechť $X = L_2([-\pi, 0]) \oplus_2 L_2([0, \pi])$ jakožto prostor nad $\mathbb{C}$, přičemž skalární součin je definován jako

$$< (f_1, g_1), (f_2, g_2) >_X = < f_1, f_2 >_{L_2([-\pi,0])} + < g_1, g_2 >_{L_2([0,\pi])}, \quad (f_1, g_1), (f_2, g_2) \in X.$$

Nechť

$$e_1 = (\sin t, \sin t), e_2 = (\cos t, \sin t), f = (\sin t, \sin 2t).$$

(4 body) Nalezněte nějakou ortonormální bázi prostoru $Y = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$.

(4 body) Spočtěte vzdálenost $\operatorname{dist}(f, Y)$.

(3 body) Ukažte, že $L_2([-\pi, 0])$ je izometricky izomorfní prostoru $L_2([0, \pi])$.

(b) (12 bodů) Nechť $X = L_2(\mathbb{R})$ je uvažovaný jakožto prostor nad $\mathbb{C}$ a nechť

$$g(t) = \min\{1, \frac{1}{|t|}\}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Uvažujme předpis

$$Tf(t) = g(t)f(|t|), \quad t \in \mathbb{R}, f \in X.$$

(3 body) Ukažte, že zobrazení $Sf(t) = f(|t|)$, $t \in \mathbb{R}$, $f \in X$, je dobře definované zobrazení na X.

(2 body) Ukažte, že T je spojité lineární zobrazení na X.

(3+4 body) Nalezněte bodové spektrum T a spektrum T.

(c) (7 bodů) Nechť je dána funkce $f(x, y) = \chi_{(-1,1)}(x)\chi_{(0,1)}(y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Nechť F značí Fourierovu transformaci na $L_1(\mathbb{R}^2, \mu_2)$ a P Plancherelovu transformaci na $L_2(\mathbb{R}^2, \mu_2)$.

(4 body) Spočtěte Pf.

(3 body) Ukažte, že $F(f) \in L_2(\mathbb{R}^2, \mu_2)$ a vyčíslete integrál

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{\sin t}{t} \cdot \frac{e^{-is} - 1}{s} \right|^2 d(t, s).$$

1. $e_1 = (\sin t, \sin t)$, $e_2 = (\cos t, \sin t)$, $Y = \operatorname{span}\{e_1, e_2\}$, $f = (\sin t, \sin 2t)$

- $\tilde{e}_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$, kde $\|e_1\|^2 = \int_{-\pi}^{0} \sin^2 + \int_{0}^{\pi} \sin^2 = 2\int_0^{\pi} \sin^2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$

  tj. $\tilde{e}_1 = \frac{(\sin t, \sin t)}{\sqrt{\pi}}$

- $u = e_2 - \langle e_2, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 = (\cos, \sin) - \frac{1}{\pi}\left(\langle (\cos, \sin), (\sin, \sin) \rangle\right)(\sin, \sin)$

  $= (\cos, \sin) - \frac{1}{\pi}\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)(\sin, \sin) = (\cos, \sin) - \frac{1}{2}(\sin, \sin) =$

  $= (\cos - \frac{1}{2}\sin, \frac{1}{2}\sin)$

- $\|u\|^2 = \int_{-\pi}^{0} (\cos - \frac{1}{2}\sin)^2 + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 = \frac{\pi}{8} + \int_{-\pi}^{0} \cos^2 - \cos\sin + \frac{1}{4}\sin^2 =$

  $= \frac{\pi}{8} + \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} + \frac{2\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi + 2\pi + 3\pi}{8} = \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}$

- $\tilde{e}_2 = \frac{(\cos - \frac{1}{2}\sin, \frac{1}{2}\sin)}{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}} \Rightarrow \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ je ON-báza Y.

- dist(f, Y): $\|f - P_Y f\|^2 = \|(\sin t, \sin 2t) - \langle f, \tilde{e}_1 \rangle \tilde{e}_1 - \langle f, \tilde{e}_2 \rangle \tilde{e}_2\|^2 =$

  [$\langle f, \tilde{e}_1 \rangle = \langle (\sin t, \sin 2t), (\sin t, \sin t) \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{0} \sin^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

  $\langle f, \tilde{e}_2 \rangle = \langle (\sin t, \sin 2t)(\cos - \frac{1}{2}\sin, \frac{1}{2}\sin) \rangle \frac{1}{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}} =$

  $= \left(\int_{-\pi}^{0} -\frac{1}{2}\sin^2\right) \frac{1}{\frac{\sqrt{3\pi}}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \frac{\pi}{2} = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}}$]

$= \|(\sin t, \sin 2t) - \frac{1}{2}(\sin t, \sin t) + \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3\pi}}(\cos - \frac{1}{2}\sin, \frac{1}{2}\sin)\|^2 =$

$= \|(\sin, \sin 2t) - \frac{1}{2}(\sin t, \sin t) + \frac{1}{3}(\cos - \frac{1}{2}\sin, \frac{1}{2}\sin)\|^2 =$

$= \|(\frac{1}{3}\cos + \frac{1}{3}\sin, \sin 2t - \frac{1}{3}\sin t)\|_*^2 =$

$= \int_{-\pi}^{0} \frac{1}{9}(\overbrace{\cos^2 + \sin^2}^{1} + 2\cos\sin) + \int_0^{\pi} \sin^2 2t + \frac{1}{9}\sin^2 t - \frac{2}{3}\sin 2t \sin t$

$= \frac{1}{9}\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{9}\frac{\pi}{2} = \frac{2 + 9 + 1}{18}\pi = \frac{12}{18}\pi = \frac{2}{3}\pi$

$\Rightarrow$ dist$(f, P_Y f) = \sqrt{\frac{2}{3}\pi}$

• Uvažujme zobrazení $f \in L_2([-\pi, 0)) \longmapsto Tf \in L_2([0, \pi))$

kde $\quad Tf(x) = f(x - \pi)\,, \; x \in [0, \pi]$

z translační invariantnosti Lebesgueovy míry plyne, že T je dobře definováno

[$f = g$ s.v. $\Rightarrow$ $Tf = Tg$ s.v. pro f, g měřitelné]

Dále $\quad \|Tf\|^2_{L_2([0,\pi))} = \|f\|^2_{L_2([-\pi,0))}$, inverze k T je dána vzorcem

$$(T^{-1}g)(x) = g(x + \pi), \; x \in [-\pi, 0), \; g \in L_2([0, \pi))$$

Tedy T je izometrický izomorfismus.

2. $g(t) = \min\{1, \frac{2}{|t|}\}$, $t \in \mathbb{R}$.

$Tf(t) = g(t) f(|t|)$, $t \in \mathbb{R}$, $f \in L_2(\mathbb{R})$

- $f_1 = f_2$ s.v. na $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f_1(|t|) = f_2(|t|)$ s.v. na $\mathbb{R}$

Γ $A = \{t \geq 0 : f_1(t) = f_2(t)\}$, pak $\lambda([0,\infty) \setminus A) = 0$, $\lambda((-\infty, 0] \setminus (-A)) = 0$

$B = \{t \in \mathbb{R} : f_1(|t|) = f_2(|t|)\} = \{t \geq 0, \dots\} \cup \{t < 0; \dots\} \subset$

$\subset \underbrace{\{t \geq 0 : f_1(t) = f_2(t)\}}_{\subset A} \cup \underbrace{\{t < 0 : f_1(-t) = f_2(-t)\}}_{\subset -A}$, tedy

$\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = 0$, tj. $f_1(|t|) = f_2(|t|)$ pro t s.v. $\rfloor$

- $\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 = \int_0^\infty |f(t)|^2 + \int_{-\infty}^0 |f(-t)|^2 < \infty$.
- $\|g\|_\infty \leq 1$, tedy $\|Tf\|_{L_2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (g(t) f(|t|))^2 \, dt \leq$

$\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(|t|)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{0} |f(-t)|^2 + \int_0^\infty |f(t)|^2 =$

$= 2\int_0^\infty |f(t)|^2 \, dt = 2\|f\|_X^2$. Tedy $T \in \mathcal{L}(X)$, zjevně lineární.

- $g(t) f(|t|) = \lambda f(t)$ pro $\lambda \in \mathbb{C}$.

$g(t) = 1 \Rightarrow 1 \in \sigma_p(T)$

- $\lambda = 1 \Rightarrow f = \chi_{(-1,1)}$ je vl. vektor pro $\lambda = 1$
- $\lambda \neq 1$, $\lambda \neq 0$ $\Rightarrow$ $t \geq 0$ dává $\underbrace{(g(t) - \lambda)}_{\neq 0 \text{ s.v.}} f(t) = 0$ s.v. na $(0,\infty)$

$\Rightarrow f = 0$ s.v. na $(0, \infty)$ $\Rightarrow$ $g(t) f(-t) = \lambda f(t)$, $t < 0$ s.v.

$\Rightarrow$ $t \mapsto f(-t) = 0$ s.v. pro $(-\infty, 0)$ $\Rightarrow$ $f = 0$ s.v. na $(-\infty, 0)$

$g(t) \neq 0$ na $(-\infty, 0)$

- $\lambda = 0$: $g(t) f(|t|) = 0$ $\Rightarrow t \mapsto f(|t|) = 0$ pro t s.v. $\Rightarrow$

$f = \chi_{(-1,0)}$ je vl. vektor pro 0

$\Rightarrow \sigma_p(T) = \{0, 1\}$

- $g(t) f(|t|) - \lambda f(t) = h(t)$, kde $\lambda \notin \{0,1\}$, $h \in X$. Ať $\lambda \notin [0,1]$

$t > 0$: $f(t)(g(t) - \lambda) = h(t)$ $\qquad$ $t < 0$: $f(t) = \dfrac{g(t) f(-t) - h(t)}{\lambda} =$

$f(t) = \dfrac{h(t)}{g(t) - \lambda}$ $\qquad = -\dfrac{h(t)}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda} g(t) \dfrac{h(-t)}{g(-t) - \lambda}$

Tedy $(T-\lambda I)^{-1}: h \longmapsto \begin{cases} \dfrac{h(t)}{g(t)-\lambda}, & t>0 \\ -\dfrac{h(t)}{\lambda} + \dfrac{g(t)}{\lambda}\,\dfrac{h(-t)}{g(-t)-\lambda}, & t<0 \end{cases}$

Zjevně je pravá strana v X, neboť $\left|\dfrac{1}{g-\lambda}\right| \le \dfrac{1}{\operatorname{dist}(\lambda, [0,1])}$

Ať $\lambda \in (0,1)$, pak ex. $t_0 > 1$, že $g(t_0) = \lambda$, ať $h = \chi_{(0,2t_0)}$.

Pak $g(t)f(t) - \lambda f(t) = h(t)$ dává

$f(t) = \dfrac{1}{g(t)-\lambda}$ pro s.v. $t \in (0, 2t_0)$

Tedy $f = \dfrac{1}{g(t)-g(t_0)} = \dfrac{1}{1/t - 1/t_0} = \dfrac{t_0 t}{t_0 - t}$ s.v. na okolí t_0.

Pak ale $f \notin L_2(\mathbb{R})$, tedy $T-\lambda I$ není na pro $\lambda \in (0,1)$.

Tedy $(0,1) \subset \sigma(T) \subset [0,1]$, tj. $[0,1] = \sigma(T)$

3. $f = \chi_{(-1,1)}(x)\,\chi_{(0,1)}(y)$. Pak $f \in L_1 \cap L_2$, tedy

$F = P$ a máme

$$Pf(t,s) = Ff(t,s) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\underbrace{e^{-i\langle (t,s),(x,y)\rangle}}_{e^{-itx}\,e^{-isy}}\,dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} e^{-itx}\,dx \int_{0}^{1} e^{-isy}\,dy = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\left[\frac{\sin tx}{t}\right]_0^1 \cdot \left[\frac{e^{-isy}}{-is}\right]_{y=0}^{y=1} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin t}{t}\,\frac{e^{-is}-1}{-is}, \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\text{osy}\}$$

- $P : L_2 \to L_2$, tedy $F(f) = P(f) \in L_2$ a platí

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{\sin t}{t}\,\frac{e^{-is}-1}{s}\right|^2 d(t,s) = \pi^2\int_{\mathbb{R}^2}\left|\frac{1}{\pi}\,\frac{\sin t}{t}\,\frac{e^{-is}-1}{-is}\right|^2 \frac{d(t,s)}{2\pi}\,2\pi$$

$$= \pi^2\cdot 2\pi\int_{\mathbb{R}^2}|f(x,y)|^2\,d\lambda_2(x,y) = \pi^2\int_{\substack{-1<x<1\\ 0<y<1}} 1^2\,dx\,dy = \pi^2\cdot 2 = 2\pi^2$$