

### 3. ZKOUŠKOVÁ PÍSEMKÁ

Jednotlivé kroky při výpočtech stručně zdůvodněte.

- (a) (13 bodů) Necht'  $X = L_1([0, 1]) \oplus_2 L_2([0, 1])$  jakožto prostor nad  $\mathbb{C}$  a  $T: X \rightarrow X$  je definován jako

$$T(f, g) = (Uf + Vg, Wg), \quad (f, g) \in X,$$

kde pro  $x \in [0, 1]$  máme

$$Uf(x) = \int_0^x f(t)dt, f \in L_1([0, 1]), \quad Vg(x) = g(x), g \in L_2([0, 1]), \quad Wg(x) = \int_x^1 g(t)dt, g \in L_2([0, 1]).$$

- (3 body) Ukažte, že  $T$  je spojitý lineární operátor na  $X$ .  
 (4 body) V rámci standardních dualit nalezněte  $T^*$ .  
 (3 body) Zjistěte, zda je  $T$  kompaktní (uvažte posloupnost  $\{\sin(2\pi nt)\}$ ).  
 (3 body) Zjistěte, zda je  $V: L_2([0, 1]) \rightarrow L_1([0, 1])$  izomorfismus do.

- (b) (10 bodů) Uvažujme prostor  $X = L_4([0, 1])$  uvažovaný jako prostor nad  $\mathbb{C}$  a předpis

$$(Tf)(x) = -2f(x) + \int_0^x \sin t f(t)dt, \quad x \in [0, 1], f \in X.$$

- (1 bod) Ukažte, že  $X$  je nekonečněrozměrný vektorový prostor.  
 (2 body) Ukažte, že  $T$  je spojitý lineární operátor na  $X$ .  
 (3 body) Zjistěte, zda je  $T$  kompaktní.  
 (4 body) Nalezněte bodové spektrum  $T$  a spektrum  $T$ .

- (c) (7 bodů) Necht' jsou dány funkce  $f_1(x) = \chi_{(-1,1)}(x)$  a  $f_2(x) = \chi_{(-2,2)}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Necht'  $F$  značí Fourierovu transformaci na  $L_1(\mathbb{R}, \mu_1)$ .

- (2 body) Ukažte, že konvoluce  $f = f_1 * f_2$  vzhledem k  $\mu_1$  je spojitá funkce s kompaktním nosičem.  
 (2 body) Spočtěte  $F(f)$ .  
 (3 body) Uvažte větu o inverzi a spočtěte integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2t \sin t}{t^2} dt.$$

$$1. X = L_1 \oplus_2 L_2 \Rightarrow X^* \cong L_\infty \oplus_2 L_2$$

$u, v, w \in AC$ , tedy měnitelné

$$\|u\|_1 = \int_0^1 |u| dx \leq \|u\|_2, \quad \|u\|_2^2 = \int_0^1 |u|^2 dx \leq \int_0^1 (|u| + |u|^2) dx = \|u\|_1 + \|u\|_2^2$$

$$\|u\|_2 = \sqrt{\|u\|_1}$$

$$\Rightarrow \|T(f, g)\|^2 = \|(u, v, w)\|^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|w\|_2^2 \leq (\|u\|_1 + \|v\|_1 + \|w\|_1) = 2\|(f, g)\|^2$$

$$\Rightarrow \|T\| \leq \sqrt{2}, \quad T \text{ lineární}$$

$$T^*: (u, v) \in X^* = L_\infty \oplus_2 L_2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad T^*(u, v) = (\alpha, \beta) \in X$$

$$T^* \text{ je } (u, v) \mapsto \int_0^1 f \alpha + \int_0^1 g \beta, \quad (f, g) \in X$$

$$T^*(u, v) \cdot (f, g) = (u, v) \cdot (T(f, g)) = (u, v) \cdot (u, v, w) = \int_0^1 u f + \int_0^1 v g + \int_0^1 w g = \int_0^1 \left( \int_0^1 |f| dt \right) u(x) + \int_0^1 g(x) v(x) + \int_0^1 g(x) w(x)$$

$$F.V. \int_0^1 \left( \int_0^1 u(x) dx \right) f(t) dt + \int_0^1 g(t) v(t) dt + \int_0^1 g(t) \left( \int_0^1 v(x) dx \right) dt$$

$$= \int_0^1 f(t) (A u(t)) + \int_0^1 g(t) (B v(t) + C v(t)),$$

$$\text{tedy } A u(t) = \int_0^1 u, \quad B v(t) = v(t), \quad C v(t) = \int_0^1 v \Rightarrow T^*(u, v) \in$$

$$A: L_\infty \rightarrow L_\infty$$

$$B: L_\infty \rightarrow L_2$$

$$C: L_2 \rightarrow L_2 = (A, B, C).$$

Uvažujme  $(f_n, g_n) = (0, e_n)$ , kde  $(e_n) \in L_2$  je o.b.-systém (normovaný)

$e_n(t) = \sin 2\pi n t$ . Když  $T$  je lineární, existuje  $(u, v) \in X$ , že

$T(0, e_n) = (v e_n, w e_n)$  konverguje k  $(u, v) \in X$ . Tedy

$v e_n \xrightarrow{s.v.} u$ ,  $w e_n \xrightarrow{s.v.} v$ , kde  $|u| \leq 1$  s.v. pro  $n \in \mathbb{N}$ .

Tedy  $\|e_n - e_m\|_2^2 = \int_0^1 |e_n - e_m|^2 dx \rightarrow 0$ , když

$e_n \xrightarrow{L_2} u$ , spor (z  $(e_n)$  má být  $\|e_n\|_2 = 1$  pro každé  $n$ ).

- $V: L_2 \rightarrow L_1$  izomorfizmas at, pat  $\overline{\text{Rig } V} = \text{Rig } V \subset L_1$ ,  $\gamma$   
 $(C(0,1) \subset L_2, L_1$ , kad  $\text{Rig } V$  je kurtis  $\gamma L_1$ . Pat  $\text{Rig } V = L_1$   $\gamma$   
 $L_1$   $\gamma$  izomorfizmas  $L_2$ . Spar, uždė:  $L_2$  refleksionis  $\gamma L_1$  uždė.

$$2. T f(x) = -2f(x) + \int_0^x (\sin t) f(t) dt, f \in X = L_2(0,1), x \in [0,1]$$

$$A \in S f(x) = \int_0^x (\sin t) f(t) dt$$

• Uvážime  $\{f_n: n \in \mathbb{N}, \text{ kde } f_n = \chi_{(1/n, 1/n)}\}$ , to je ukončená LN množina.

•  $S f \in AC(0,1)$ , takže  $\sin \cdot f \in L_2 \subset L_1$

$$\|S f\|_2^2 = \int_0^1 \left| \int_0^x \sin f \right|^2 dx \leq \int_0^1 \left( \int_0^x |f| \right)^2 dx \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_2^4, \Rightarrow T = -2I + S \in \mathcal{L}(X)$$

•  $S$  je lineární: Uvážime  $L_2 \xrightarrow{\tilde{S}} C(0,1) \xrightarrow{I} L_2, p=2$   
 $(\tilde{S}(B_{L_2}))$  omezená  
 $\tilde{S}$  je lineární. Arzelà-Ascoli:  $f \in B_{L_2}, p=2, p=2 \Rightarrow \|f\|_2 \leq 1$  je  
 $|S f(x) - S f(y)| \leq \int_x^y |\sin t| |f(t)| dt \leq \int_x^y |f(t)| dt \leq \left( \int_x^y 1^2 dt \right)^{1/2} \left( \int_x^y |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq$   
 $\leq (y-x)^{1/2}$ . Tedy  $\tilde{S}: L_2 \rightarrow C(0,1)$  je lineární,  $I$  je spoj. k., tedy

$S = I \circ \tilde{S}$  je lineární.

• Proto  $T = -2I + S$  není lineární, jindež  $I = \frac{S-T}{2}$  je lineární.

$$\mathcal{D}_p(S): \lambda f(x) = \int_0^x (\sin t) f(t) dt$$

$$\lambda = 0 \Rightarrow 0 = \underbrace{\int_0^x (\sin t) f(t) dt}_{\substack{\in L_1 \\ \in AC}} \Rightarrow 0 = (\sin x) f(x) \text{ s.v.}$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \lambda f(x) = \int_0^x \sin t f(t) dt \Rightarrow f = 0 \text{ s.v.} \Rightarrow 0 \in \mathcal{D}_p(S)$$

$$\Rightarrow \lambda f'(x) = \sin x + f(x), x \in (0,1)$$

$$\Rightarrow f'(x) - \frac{\sin x}{\lambda} f(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = C e^{\frac{-\cos x}{\lambda}}, \text{ ale } f(0) = 0 \text{ dává } C = 0, \text{ tedy } f = 0$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_p(S) = \emptyset, S \text{ je lineární} \Rightarrow \mathcal{D}(S) = \{0\}$$

$$\text{Tedy } \mathcal{D}(T) = -2 + \mathcal{D}(S) = \{-2\}$$

$$\mathcal{D}_p(T) = \emptyset$$

$$3. \cdot f_1 = \chi_{(-1,1)}, f_2 = \chi_{(-2,2)}$$

$f_1 \in L_1, f_2 \in L_\infty \Rightarrow f_1 * f_2$  stejn. spojitel omrzeti, dake

$$\text{spt } f_1 * f_2 \subset \text{spt } f_1 + \text{spt } f_2 \subset [-3,3]$$

$$\begin{aligned} \hat{f}_1(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \int_0^1 \cos xt dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\sin xt}{t} \right]_{x=0}^{x=1} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}, & t = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\hat{f}_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \frac{\sin xt}{t} \right]_{x=0}^{x=2} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2t}{t}, & t \neq 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2, & t = 0 \end{cases}$$

$$\widehat{f_1 * f_2}(t) = \hat{f}_1(t) \hat{f}_2(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{\sin t \sin 2t}{t^2}, & t \neq 0 \\ \frac{2}{\pi} \cdot 2, & t = 0 \end{cases}$$

$$f_1 * f_2(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f_1 * f_2}(t) e^{i \cdot 0 \cdot t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\pi} \frac{\sin t \sin 2t}{t^2} dt$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t \sin 2t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2} \sqrt{2\pi} (f_1 * f_2)(0) = \frac{\pi}{2} \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(-y) dy =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{(-1,1)}(y) \chi_{(-2,2)}(-y) dy = \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 1 dy = \pi$$