

Zkoušková písemka z Teorie míry a integrálu 1
16. ledna 2025

Příklad 1. (15 bodů) Vyjádřete integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^{2x^2} + 1} dx$$

jako součet řady reálných čísel.

Příklad 2. Necht' je funkce F dána předpisem

$$F(a) = \int_0^{\infty} \frac{\log(1 + a^2 x^2)}{x^2(1 + x^2)} dx, \quad a \in (-1, 1).$$

(i) (15 bodů) Pro všechna $a \in (-1, 1)$ spočtěte $F'(a)$.

(ii) (5 bodů) Pro všechna $a \in (-1, 1)$ spočtěte $F(a)$.

Příklad 3. (15 bodů) Necht' je množina M dána předpisem

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq 3z\}.$$

Spočtěte míru $\mathcal{L}_3(M)$ této množiny.