

1. ZAPOČTOVÁ PÍSEMKA Z TMĚ 1 - ŘEŠENÍ

$$\boxed{1.} \quad f_n(x) = n^2 x^{-4} e^{-\frac{n}{x}}$$

(i) f_n je spojitá na $(1, \infty) \Rightarrow$ měřitelná na $(1, \infty)$

(ii) f_n je nezáporná a měřitelná na $(1, \infty)$, a tedy

$$\int_1^\infty f_n(x) dx \quad \text{existuje}$$

$$(iii) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 x^{-4} e^{-\frac{n}{x}} = \frac{1}{x^2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{x}\right)^2 e^{-\frac{n}{x}}$$

$$\stackrel{\text{Heine}}{=} \frac{1}{x^2} \lim_{\substack{y \rightarrow \infty \\ x \in (1, \infty)}} \frac{y^2}{e^y} = 0, \quad (\text{použilo by se} \\ \text{2x l'Hospitalovo pravidlo})$$

$$(iv) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty f_n(x) dx \stackrel{?}{=} \int_1^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_1^\infty 0 dx = 0$$

$?$ ověříme předpoklady Lebesgueovy věty

Dle (i) jsou f_n měřitelné na $(1, \infty)$. Najdeme integrovatelnou majorantu. Zafixujeme $x \in (1, \infty)$ a položíme

$$g(y) = \frac{y^2}{x^4} e^{-\frac{y}{x}}, \quad y \in [1, \infty)$$

$$\Rightarrow g'(y) = \frac{2y}{x^4} e^{-\frac{y}{x}} - \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2}{x^4} e^{-\frac{y}{x}} = \frac{y}{x^4} e^{-\frac{y}{x}} \left(2 - \frac{y}{x}\right)$$

$$\Rightarrow g'(y) \geq 0 \Leftrightarrow y \leq 2x$$

Tedy g je neklesající na $[1, 2x]$ a nerostoucí na $[2x, \infty)$

$$\Rightarrow g(y) \leq \frac{4x^2}{x^4} e^{-2} = \frac{4}{e^2 x^2}, \quad y \in [1, \infty)$$

$$\Rightarrow |f_n(x)| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} g(n) \leq \frac{4}{e^2 x^2}, \quad x \in (1, \infty)$$

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{4}{e^2 x^2} dx < \infty.$$

$$\boxed{2.} \quad f(x) = \frac{\sqrt{x} \log x}{1-x^2}$$

(i) f je spojitá na $(0, 1) \Rightarrow$ měřitelná na $(0, 1)$

(ii) $f \leq 0$ měřitelná na $(0, 1) \Rightarrow \int_0^1 (-f(x)) dx$ existuje

$\Rightarrow \int_0^1 f(x) dx$ existuje

$$(iii) \quad \frac{\sqrt{x} \log x}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{x} (\log x) x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\log x) x^{2n+\frac{1}{2}},$$

$x \in (0, 1)$

$$\text{Tedy } \int_0^1 \frac{\sqrt{x} \log x}{1-x^2} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (\log x) x^{2n+\frac{1}{2}} dx$$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (\log x) x^{2n+\frac{1}{2}} dx$$

per
partes

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left[(\log x) \frac{x^{2n+\frac{3}{2}}}{2n+\frac{3}{2}} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{2n+\frac{3}{2}}}{2n+\frac{3}{2}} dx \right)$$

$$= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+\frac{3}{2}} \cdot \left[\frac{x^{2n+\frac{3}{2}}}{2n+\frac{3}{2}} \right]_0^1 = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+\frac{3}{2})^2}$$

② Funkce $f_n(x) = x^{2n+\frac{1}{2}} \log x$ jsou záporně měřitelné na $(0, 1) \Rightarrow -f_n(x) \geq 0$ měřitelné na $(0, 1)$, lze na ně tedy použít Leviho větu pro řady:

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-f_n(x)) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-f_n(x)) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 f_n(x) dx$$