Zkoušková písemka z Teorie míry a integrálu 1
13. února 2025

Příklad 1. (15 bodů) Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\arctan(x^{2n})}{x^2(1+x^2)}\,dx.$$

Příklad 2. (20 bodů) Nechť je funkce F dána předpisem

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-2ax^2}}{x^2}\,dx.$$

(i) Nalezněte definiční obor funkce F (tj. určete, pro která $a \in \mathbb{R}$ platí $F(a) \in \mathbb{R}$).
(ii) Pro všechna a z definičního oboru F spočtěte $F(a)$.

Hint: Při výpočtu můžete bez důkazu využít faktu, že $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Příklad 3. (15 bodů) Nechť a, $b > 0$ a nechť je množina M dána předpisem

$$M = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 \le x^2 + xy + y^2 \right\}.$$

Spočtěte míru $\mathcal{L}_2(M)$ této množiny.