

Proseminář z Matematické analýzy, ZS 2024 – 2025
Teoretické příklady

TP1. (na 7. října) Necht' $\{a_k\}_{k=1}^n$ je konečná posloupnost reálných čísel splňující $a_k > -1$, $k = 1, \dots, n$. Předpokládejme zároveň, že $a_k > 0$ pro $k = 1, \dots, n$, nebo $a_k < 0$ pro $k = 1, \dots, n$. Dokažte, že

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

TP2. (na 7. října) Necht' $\{a_k\}_{k=1}^n$ je konečná aritmetická posloupnost kladných reálných čísel. Dokažte, že

$$\sqrt{a_1 a_n} \leq \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}.$$

TP3. (na 14. října) Lze interval $(0, 1)$ napsat jako sjednocení disjunkt-ních netriviálních uzavřených či otevřených (smí se používat oboje) intervalů, tak, že jich užijeme nekonečně mnoho?

TP4. (na 14. října) Zkonstruuje bijekci mezi $(0, 1)$ a $(0, 1]$.

TP5. (na 21. října) Necht' $\alpha > 0$, $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Dokažte, že

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^n a_k^2 + \frac{\alpha}{4} \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

Hint: Interpretujte úlohu jako kvadratickou nerovnici.

TP6. (na 4. listopadu) Najděte všechna celá čísla m splňující

$$(1 + m)^n \geq 1 + mn \quad \text{pro všechna } n \in \mathbb{N}.$$

TP7. (na 11. listopadu) Nalezněte supremum a infimum množiny

$$A = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < 3n \right\}.$$

TP8. (na 11. listopadu) Nalezněte supremum a infimum množiny

$$B = \{ \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor : n \in \mathbb{N} \}.$$

Připomeňme, že $\lfloor x \rfloor$ značí dolní celou část čísla x , tedy největší celé číslo, které je menší nebo rovno číslu x .

TP9. (na 11. listopadu) Rozhodněte, zda posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ daná vztahem

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

má vlastní limitu. Připomeňme, že

$$(2n)!! = (2n) \cdot (2n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 2,$$

$$(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1.$$

TP10. (na 11. listopadu) Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \right).$$

TP11. (na 18. listopadu) Necht' $\alpha \in \mathbb{Q}$. Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n! \alpha \pi).$$

TP12. (na 2. prosince) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická posloupnost s kladnými členy. Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} \right).$$

TP13. (na 16. prosince) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$. Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 1 \cdot a_n}{n^2}.$$

TP14. (na 25. listopadu) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost kladných reálných čísel splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a$$

pro nějaké $a \in \mathbb{R}$. Musí potom platit, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a?$$

TP15. (na 2. prosince) Pro dané $k \in \mathbb{N}$ spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^k + 2^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}}.$$

TP16. (na 16. prosince) Necht' $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená posloupnost splňující

$$a_{n+1} \geq a_n - \frac{1}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní.

TP17. (na 16. prosince) Najděte monotónní funkci $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, která má nekonečně mnoho bodů nespojitosti.

TP18. (na 16. prosince) Existuje funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která má v každém bodě limitu ∞ ?

TP19. (na 9. prosince) Necht' $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je periodická funkce splňující $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. Dokažte, že $f(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

TP20. (na 16. prosince) Najděte nekonstantní funkci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, která je periodická s periodou 1 a zároveň periodická s periodou $\sqrt{2}$.

TP21. (na 6. ledna) Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje $f(1) = 1$ a $f'(1) = 2$. Spočtěte

$$\lim_{x \rightarrow 1} (f(x))^{\frac{1}{\log x}}.$$

TP22. (na 6. ledna) Najděte všechny spojitě funkce $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad x, y \in (0, \infty).$$