Cvičení I

Výsledky úloh 2 a 4 jsou na konci druhé strany.

Úloha 1 (oblíbené chyby ve zkouškových písemkách)**.** Opravte následující výroky:

(a) 143 je prvočíslo.
(b) 187 je prvočíslo.
(c) 91 je prvočíslo.
(d) 343 je prvočíslo.
(e) Ideál v komutativním okruhu je podmnožina uzavřená na $+$, $-$ a násobení libovolnými prvky okruhu.
(f) Ireducibilním rozkladem x rozumíme zápis $x = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_k^{e_k}$, kde p_i jsou ireducibilní po dvou neasociované a $e_i \in \mathbb{N}$.
(g) Podobor euklidovského oboru je vždy euklidovský.
(h) Podobor oboru hlavních ideálů je vždy obor hlavních ideálů.
(i) Podobor Gaussova oboru je vždy Gaussův.

Vsuvka (kterak počítat NSD ve „složitějších“ oborech aneb Věta 56 (1) z Algebry I)**.** R, Q jako výše,[1] $f, g \in R[x]$. Pak $\mathrm{NSD}_{R[x]}(f,g)$ existuje a $\mathrm{NSD}_{R[x]}(f,g) = c \cdot d$, kde $c = \mathrm{NSD}_R(\mathrm{c}(f), \mathrm{c}(g))$, $d = \mathrm{NSD}_{Q[x]}(f,g)$, $d \in R[x]$ primitivní.

☼ **Úloha 2.** Nalezněte $\mathrm{NSD}_R(f,g)$, je li

(a) $f = 6x^2 - 12x - 18$, $g = 8x^3 + 16x^2 - 8x - 16$, $R = \mathbb{Z}[x]$,
(b) $f = x^2 - y^2$, $g = x^2 + 2xy + y^2$, $R = \mathbb{C}[x,y]$,
(c) $f = x^3 + x^2 + x + x^2y + xy + y^2 + 1$, $g = x^3 + x + x^2y^2 + xy + y^3 + y^2$, $R = \mathbb{Z}_2[x,y]$.[2]

Úloha 3. Nechť $\Bbbk$ je těleso a $p \in \Bbbk[y]$. Dokažte, že $x+p$ je ireducibilní prvek $\Bbbk[x,y]$.

Vsuvka (kterak nalézti vyjádření pomocí elementárních symetrických polynomů)**.** Nechť R je obor integrity. Máme-li symetrický polynom $f_0 \in R[x_1, \dots, x_n]$, jehož nejvyšším termem (v lexikografickém uspořádání) je $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}$ (nezbytně $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$) a koeficient u onoho členu je c, pak přejdeme k polynomu

$$f_1 = f_0 - c s_1^{k_1 - k_2} s_2^{k_2 - k_3} \cdots s_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} s_n^{k_n},$$

kde s_i je i-tý elementární symetrický polynom v $x_1, \dots, x_n$. Dále totéž provedeme s polynomem f_1 atd., dokud ještě je co odčítat. Hledané vyjádření je součtem toho, co jsme postupně poodčítali.

☼ **Úloha 4.** Nalezněte vyjádření daných polynomů z $\mathbb{C}[x,y,z]$ pomocí elementárních symetrických polynomů:

(a) $x^2yz + xy^2z + xyz^2$,
(b) $x^3(y+z) + y^3(x+z) + z^3(x+y)$.

[1] Tj. R Gaussův obor, Q jeho podílové těleso.
[2] V zadání vytištěném na cvičení chyběl člen y^2 v g.

Úloha 5. Je reálný polynom $(x_1+x_2-x_3-x_4)(x_1-x_2+x_3-x_4)(x_1-x_2-x_3+x_4)$ symetrický?[3]

Úloha 6. Nahlédněte, že druhá mocnina determinantu Vandermondovy matice

$$V(x_1,\dots,x_n) = \left(x_i^{j-1}\right)_{i,j=1}^{n}$$

je symetrický polynom vzhledem k proměnným $x_1,\dots,x_n$.

⋆ **Úloha 7.** Pro všechna $x,y,z\in\mathbb{R}$ dokažte

$$x^4+y^4+z^4+3x^2y^2+3x^2z^2+3y^2z^2 \geq 2x^3y+2x^3z+2xy^3+2xz^3+2y^3z+2yz^3$$

a rozhodněte, kdy nastává rovnost.

⋆ **Úloha 8.** Nechť α, β jsou kořeny reálného polynomu x^2+2x-2. Aniž byste určili hodnoty α a β, spočtěte hodnotu $\alpha^6+\beta^6$. (Nápověda: Buď zatněte zuby a vyjádřete pomocí elementárních symetrických polynomů, nebo zkuste vymyslet rekurenci pro hodnoty $t_n=\alpha^n+\beta^n$.)

⋆ **Úloha 9.** Symetrické polynomy lze chápat jako speciální případ polynomů, které jsou *invariantní* vůči některým lineárním zobrazením – v tomto konkrétním případě vůči zobrazením daným permutačními maticemi. Co jsou polynomy v $\mathbb{C}[x,y]$, které jsou invariantní vůči lineárnímu zobrazení

(a) $(x,y)\mapsto(x,0)$?
(b) $(x,y)\mapsto(-x,y)$?
(c) $(x,y)\mapsto(-y,x)$?
(d) Rozmyslete si, že množina zobrazení, vůči kterým je polynom invariantní, je uzavřená na skládání, a pokud řešíme jen regulární zobrazení (což se typicky děje), pak i na inverzní zobrazení (a samozřejmě tato množina obsahuje identické zobrazení) (tj. jde o *grupu*).

Výsledky.

2. (a) $2x+2$ (*ne* $x+1$), (b) $x+y$, (c) x^2+y+1.

4. (a) s_1s_3, (b) $s_1^2s_2-2s_2^2-s_1s_3$.[4]

[3] V zadání vytištěném na cvičení obsahovala první závorka $+x_3$ namísto $-x_3$.

[4] V zadání na cvičení bylo v (b) chybně jen s_1^2, ne $s_1^2s_2$.