1 Olinova část

Úloha 1.1. Dokažte, že grupa, ve které má každý prvek řád 1 nebo 2, je komutativní. (2)

Úloha 1.2. Nalezněte nekomutativní podgrupu $\mathbf{SL}_3(\mathbb{Z}_3)$, ve které bude mít každý prvek řád 1 nebo 3. (5)

Úloha 1.3. Dokažte, že existuje prostý homomorfismus $\mathbf{Q} \to \mathbf{S}_8$. (2)

Úloha 1.4. Dokažte, že pro $n < 8$ neexistuje prostý homomorfismus $\mathbf{Q} \to \mathbf{S}_n$. (6)

Úloha 1.5. Dokažte, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a prvočíslo p obsahuje grupa $\mathbf{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ prvek řádu $p^n - 1$. (7)

Úloha 1.6. Nechť p je prvočíslo. Popište všechny prvky řádu p v grupě $\mathbb{Z}^*_{p^2}$. (4)

Úloha 1.7. Určete všechna $n \geq 2$ taková, že $\mathbf{A}_n \times \mathbb{Z}_2$ je isomorfní $\mathbf{S}_n$. (4)

Úloha 1.8. Grupa $\mathbf{A}_4$ působí na množině $\mathbb{Z}_3^4$ permutováním: $\pi \in \mathbf{A}_4$ udělá z čtveřice

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbb{Z}_3^4$$

čtveřici

$$(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, a_{\pi(3)}, a_{\pi(4)}) \in \mathbb{Z}_3^4.$$

Kolik má tato akce orbit? (2)

2 Aniččina část

Úloha 2.1. Najděte příklad metrického prostoru X a množin $A, B \subseteq X$ takových, že $A \subsetneq B$ a $\partial B \subsetneq \partial A$. Zde ∂ značí hranici množiny. (1)

Úloha 2.2. Jedná se o metriku na množině reálných čísel?

(a) $d(x, y) = (x - y)^2$
(b) $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ (3)

Úloha 2.3. Určete $f'(\pi)$, je-li

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2}\,\mathrm{d}x, \quad t > 0.$$

Poznámka: platí

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}.$$

(3)

Úloha 2.4. Olin si vybral pět různých čísel z množiny $\{1, \ldots, 7\}$ a jejich součin prozradil Aničce. Anička přemýšlela, jaká je parita součtu oněch pěti čísel, po chvíli však zjistila, že se to zjistit nedá. Jaký součin jí Olin sdělil? (2)

Úloha 2.5. Najděte všechny spojité funkce na $[0, 1]$, které splňují

$$\int_0^1 f(x)(x - f(x))\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}.$$

(5)

Úloha 2.6. V metrickém prostoru $X = \mathbb{R}$ najděte příklad množiny, jejíž hromadné body jsou právě všechna přirozená čísla. (4)

Úloha 2.7. Mějme v rovině soubor disjunktních měřitelných množin kladné míry (v Lebesguově dvoudimenzionální míře). Dokažte, že jich je nejvýš spočetně. (6)