

Matematická analýza VI – požadavky ke zkoušce (LS 2024/25)

1. Metrické prostory

Metrické prostory, normované lineární prostory, prostory se skalárním součinem a jejich vzájemný vztah. Otevřená a uzavřená koule, otevřené a uzavřené množiny, jejich sjednocení a průniky. Otevřená/uzavřená koule je otevřená/uzavřená množina. Průměr množiny, omezené množiny, vzdálenosti bodů a množin. Vnitřní, vnější a hraniční body. Vnitřek, hranice a uzávěr množiny, jejich vlastnosti – popis uzávěru a hranice, vztah vnitřku, uzávěru a hranice k otevřenosti a uzavřenosti. Izolované a hromadné body, popis uzávěru pomocí hromadných bodů. Limita posloupnosti, Cauchyovská posloupnost. Vztahy mezi konvergencí, uzávěrem a hromadnými body. Spojitá zobrazení, Heineho podmínka pro spojitost, charakterizace spojitých zobrazení pomocí vzorů otevřených/uzavřených množin. Lipschitzovská zobrazení, izometrie a kontrakce, vzdálenost bodu od množiny je Lipschitzovské zobrazení. Úplné prostory a jejich uzavřené podmnožiny. Banachova věta o pevném bodu. Kritérium pro Lipschitzovská zobrazení a kontrakce. Aplikace Banachovy věty – výpočet odmocnin, Picardova věta o lokální existenci a jednoznačnosti řešení ODR.

2. Fourierovy řady

Trigonometrické polynomy v reálném a komplexním tvaru a jejich vzájemný vztah (odvození). Trigonometrické řady – komplexní a reálný tvar. Výpočet koeficientů pro stejnoměrně konvergentní trigonometrickou řadu. Fourierovy koeficienty a řady pro funkce v L^1 . Riemannovo-Lebesgueovo lemma. Vlastnosti Dirichletova jádra (bez důkazu). Bodová konvergence Fourierovy řady pro funkce, které jsou po částech diferencovatelné. Cesàrovska sčítatelnost řad, Fejérové jádro a jeho vlastnosti (bez důkazu). Fejérová věta a aproximace spojitých funkcí trigonometrickými polynomy.

Ortogonální a ortonormální množiny, úplné ortonormální množiny, úplný prostor se skalárním součinem. Věta o nejlepší aproximaci, Besselova nerovnost. Fourierovy koeficienty a Fourierova řada prvku vzhledem k ortonormální množině. Parsevalova rovnost a rozvoj do Fourierovy řady pro úplné ortonormální množiny. Fourierovy řady v L^2 : volba ortonormální množiny, tvar Fourierových koeficientů a Fourierovy řady. Aproximace funkcí v L^p spojitými funkcemi (bez důkazu). Rozvoj do Fourierovy řady, úplnost a Parsevalova rovnost pro komplexní trigonometrický systém.

Není-li uvedeno jinak, jsou všechna tvrzení vyžadována s důkazem. Důkazům je nutné rozumět, tj. umět vysvětlit jednotlivé kroky (nikoliv je pouze znát z paměti). Všechny definice je potřeba umět ilustrovat na příkladech.