

Geometrie 1

Tento soubor obsahuje znění číslovaných položek (především definic a vět) jak byly předneseny v ZS 2025/26. Soubor také obsahuje hlavní argumenty důkazů. Spolu se zápisky z přednášek je tento seznam i hlavním studijním materiálem ke zkoušce. Co tento seznam **neobsahuje** jsou nejružnější motivace, vysvětlení, drobné detaily důkazů, zajímavosti, animace, ad-hoc příklady atd. Naopak zde budou koncem semestru přidány detailní požadavky na zkoušku.

Předmět Geometrie 1 přirozeně navazuje na Matematickou analýzu a zejména Lineární algebru. Skripta LA z prvního ročníku z roku 2023/24 jsem umístil na svoje stránky (abych tak zafixoval číslování definic a vět) a odkazuji se na ně v tomto textu.

Zkouška bude písemná a bude obsahovat početní i teoretickou část. V početní části budou příklady obtížností odpovídající základním příkladům, které se objevily na cvičeních.

V teoretické části se budou zkoušet

- Základní definice, u kterých bude zde nastaven vysoký požadavek na získané body (kdo neumí základní definice, neudělá zkoušku). Jedná se o definice 1.2, 1.6, 1.8, 2.2, 2.4, 2.9, 2.13, 2.18, 2.21, 2.29, 2.31, 2.35, 3.1, 3.4, 3.6, 3.14, 3.19, 3.20, 3.21, 4.1, 4.3, 4.7, 4.9, 4.14, 4.15, 5.1, 5.9, 5.10, 6.1, 6.5
- Znění všech ostatních definic, vět, lemmat a důsledků (ne však poznámek a příkladů).
- Všechny důkazy (v té míře přesnosti a podrobnosti, v jaké byly odpřednášeny) kromě následujících položek, u kterých se důkazy zkoušet **nebudou**: 1.13, 1.16, 2.20, 2.26, 2.33, 2.38, 2.40, 3.3, 3.7, 3.9, 3.11, 3.13, 3.15, 3.16, 3.24, 3.25, 4.12, 4.20, 5.2, 5.7, 5.14, 5.17, 5.19, 5.20, 6.14

1 Shodná zobrazení

Cílem této kapitoly je studovat shodná zobrazení v rovině a v prostoru bez toho, že by se formálně definoval afinní prostor. Zároveň chceme zopakovat středoškolskou analytickou geometrii a co nejpřirozeněji na ni navázat.

Příklad 1.1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky

$$p : 3x + 4y - 7 = 0.$$

Definice 1.2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Lemma 1.3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Důkaz. Necht' $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou shodnosti a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

- Zřejmě $\|g(f(\mathbf{X})) - g(f(\mathbf{Y}))\| = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $g \circ f$ je shodnost.
- Je-li $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$, potom platí $0 = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Čili f je prosté.
- Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{Im} f$, pak díky prostotě f existují jejich jednoznačně určené vzory $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(\mathbf{P}) = \mathbf{X}$, $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Y}$. Potom platí

$$\|f^{-1}(\mathbf{X}) - f^{-1}(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\| = \|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Tedy f^{-1} zachovává vzdálenosti.

□

Věta 1.4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (ortogonální matice).

Důkaz. Připomeňte si unitární matice, srovnej LA 8.5. Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest $\mathbf{A}$ má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| &= \|\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})\| = \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T (\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))} \\ &= \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ v $\mathbb{R}^n$. Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi $\mathbb{R}^n$.

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi $\mathbb{R}^n$. Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{O}\| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j\| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = \|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 1 + 1 - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$$

dostáváme $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé. (pozn. K témuž závěru bychom došli i aplikací polarizační identity z lineární algebry, která říká, že skalární součin lze vyjádřit pomocí normy tímto skalárním součinem indukované, LA Tvrzení 8.32.)

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1 | \dots | \mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, které je podle první části důkazu shodné a pro jeho invers platí $g^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \mathbf{X} - \mathbf{A}^T \mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i . Definujme konečně $h = g^{-1} \circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz

$$h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \dots, h_n(\mathbf{Y}))^T.$$

Pak platí

$$\|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{O})\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{O}\|^2,$$

$$\begin{aligned} \|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)\|^2 &= \|h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + \dots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \dots + (y_i - 1)^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i\|^2. \end{aligned}$$

V druhé rovnosti prvního a třetí druhého řádku jsme využili, že h je shodnost. Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$.

Poznamenejme, že v definici shodnosti se využívá pouze toho, že $(\mathbb{R}^n, \rho)$, kde $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, je metrický prostor. Tato věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru. $\square$

Důsledek 1.5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{X} + (\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Definice 1.6. Shodné zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathbb{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice a $\vec{p}$ nějaký vektor z $\mathbb{R}^n$ nazýváme posunutí. Množina všech posunutí tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří tzv. ortogonální podgrupu označovanou $\mathbb{O}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin). Podgrupa $\mathbb{O}(n)$ tvořená přímými zobrazeními se značí buď $\mathbb{O}_+(n)$, nebo častěji $\mathbb{SO}(n)$ (speciální ortogonální grupa).

Věta 1.7. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

Definice 1.8. Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme jeho samodružnými body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f .

Řekneme, že množina M je samodružná množina zobrazení f , jestliže platí $f(M) = M$, tedy zobrazení ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť).

Lemma 1.9. Přímka $\mathbf{Q} + LO\{\mathbf{v}\}$ je samodružnou množinou shodnosti f právě tehdy, když $LO\{\mathbf{v}\}$ je jeho samodružný směr a $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ je násobkem $\mathbf{v}$.

Důkaz. Necht' $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Vektor $\mathbf{v}$ je nenulový (jinak by $q = \mathbf{Q} + LO\{\mathbf{v}\}$ nebyla přímkou). Označme $\mathbf{R} = \mathbf{Q} + \mathbf{v}$.

Zobrazení f zobrazuje přímky na přímky. Přímka q je samodružná právě tehdy, když obrazy jejích dvou bodů $\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ na ní leží, tedy existují různá čísla $\alpha_{\mathbf{Q}}, \alpha_{\mathbf{R}}$ taková, že

$$f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \alpha_{\mathbf{Q}}\mathbf{v}, \quad f(\mathbf{R}) = \mathbf{Q} + \alpha_{\mathbf{R}}\mathbf{v}.$$

Je-li tomu tak, pak je zjevně $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ násobkem $\mathbf{v}$ a dále $\mathbf{A}\mathbf{v} = f(\mathbf{R}) - f(\mathbf{Q}) = (\alpha_{\mathbf{R}} - \alpha_{\mathbf{Q}})\mathbf{v}$ a tedy $LO\{\mathbf{v}\}$ je samodružný směr.

Naopak, jestliže je $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ násobkem $\mathbf{v}$, tedy $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \alpha_{\mathbf{Q}}\mathbf{v}$ leží na přímce q . Protože je navíc $\mathbf{v}$ vlastní, je $f(\mathbf{R}) = \mathbf{A}(\mathbf{Q} + \mathbf{v}) + \mathbf{p}$ rovněž na přímce q . $\square$

Věta 1.10. Pro každou shodnost $f \in \mathbb{E}(2)$ nastane právě jedna z těchto možností.

- f je přímá shodnost a
 - má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vl. číslem 1, pak jde o identitu.
 - má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vl. číslem -1 . V tomto posledním případě jde o otočení o π neboli o středovou souměrnost.
 - nemá žádné samodružné body a všechny směry jsou samodružné s vl. číslem 1, pak ji nazýváme posunutí.
- f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastním číslem -1 a
 - buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost
 - nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.

Zobrazení	Identita	Neidentické posunutí	Neidentické otočení	Osová souměrnost	Posunutá souměrnost
Samodružné body	všechny	-	střed otočení	osa souměrnosti	-
Samodružné směry	všechny	všechny	všechny (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	směr osy a kolmý na osu	směr osy a kolmý na osu
Samodružné přímky	všechny	všechny ve směru posunutí	všechny jdoucí středem (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	osa a přímky na ni kolmé	jedna přímka
Přímé/nepřímé	přímé	přímé	přímé	nepřímé	nepřímé

Důkaz. Podle věty 1.4 je f tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$$

pro nějakou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Samodružné body f jsou právě řešení soustavy $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ a samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům $\mathbf{A}$. Rozlišíme dva případy:

- f je přímé, tedy $\det(\mathbf{A}) = 1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále rozlišujeme dva případy:

- $\alpha = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pro $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ jde o identitu – pak jsou všechny body samodružné. Pro $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}$ jde o posunutí, a to nemá žádné samodružné body (soustava $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ nemá řešení).
- $\alpha \neq 0$. Potom platí $\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 2(1 - \cos \alpha) \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení pro libovolné $\mathbf{p}$ a tedy f má právě jeden samodružný bod $\mathbf{S}$. Lze psát

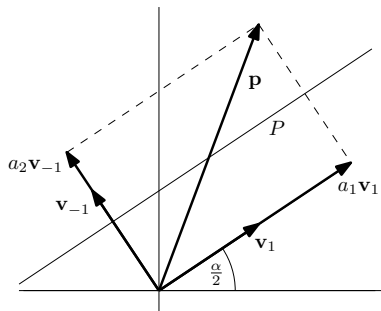
$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{S},$$

takže jde o otočení kolem $\mathbf{S}$. Pro $\alpha = \pi$ je $\mathbf{A} = -\mathbf{I}_n$, tedy všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem -1 a jde o středovou souměrnost. V opačném případě $\mathbf{A}$ nemá žádné vlastní vektory (nad $\mathbb{R}$), tedy f nemá samodružné směry.

- f je nepřímé, tedy $\det(\mathbf{A}) = -1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Matice $\mathbf{A}$ má vlastní čísla 1 a -1 s příslušnými na sebe kolmými vlastními vektory $\mathbf{v}_1 = (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2})$, $\mathbf{v}_{-1} = (-\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2})$.



Označme $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{-1})$, což je ON báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$ a $\mathbf{p} = a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_{-1}$ vyjádření vektoru posunutí v této bázi. Můžeme jistě psát

$$f(\mathbf{X}) = [\mathbf{A}\mathbf{X} + a_2 \mathbf{v}_{-1}] + a_1 \mathbf{v}_1 = f_2(f_1(\mathbf{X})),$$

kde $f_1(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X}) + a_2 \mathbf{v}_{-1}$ a $f_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + a_1 \mathbf{v}_1$. Příímým výpočtem ověříme, že každý bod přímky $p(t) = \frac{a_2}{2} \mathbf{v}_{-1} + t \mathbf{v}_1$ je samodružným bodem zobrazení f_1 a jedná se tedy o osovou souměrnost podle této přímky. Zobrazení f_2 je ovšem posunutím ve směru této přímky, které pro $a_1 = 0$ degeneruje v identitu.

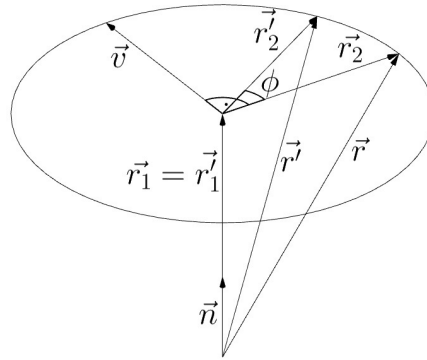
□

Připomeňte si pojem orientace a vektorové součinu z LA 7.6, LA 8.8 případně souvislost s determinantom LA celá kapitola 7.

Věta 1.11 (Rodriguesova formule). Mějme dva vektory $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, přičemž $\mathbf{n}$ je jednotkový. Pak pro vektor $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$, který dostaneme otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ o úhel ϕ v kladném směru platí:

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos \phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

Otočením v kladném směru přitom myslíme, že při úhlu $\phi \in (0, \pi)$ tvoří vektory $(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kladně orientovanou bázi $\mathbb{R}^3$ a při úhlu $\phi \in (-\pi, 0)$ záporně orientovanou.



Důkaz. Rozložme $\mathbf{r}$ na složku $\mathbf{r}_1 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ (tj. projekci do směru $\mathbf{n}$) a složku $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ kolmou na $\mathbf{n}$. Označme $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \mathbf{n} \times (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_2$. Jelikož $\mathbf{n} \perp \mathbf{r}_2$, platí

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{n} \times \mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_2\|.$$

Otočení kolem vektoru $\mathbf{n}$ o úhel ϕ zúžená na $LO\{\mathbf{r}_2, \mathbf{v}\} = LO\{\mathbf{n}\}^\perp$ je zřejmě také otočení o úhel ϕ . Jelikož $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v})$ je „násobkem“ „kladně orientované“ ortonormální báze tohoto prostoru, můžeme psát

$$\mathbf{r}'_2 = \cos \phi \mathbf{r}_2 + \sin \phi \mathbf{v}.$$

(Čárka vždy značí obraz v uvažovaném zobrazení.) Dále zřejmě $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1$. Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 \\ &= \mathbf{r}_1 + \cos \phi \mathbf{r}_2 + \sin \phi \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi (\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin \phi \mathbf{v} \\ &= (1 - \cos \phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi (\mathbf{n} \times \mathbf{r}).\end{aligned}$$

□

Definice 1.12. Připomeňme si z lineární algebry (LA, cvičení 3.5.5), že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso (označované $\mathbb{H}$) a mají tvar $q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, přičemž $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ a $\mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}).$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \rightarrow (s, \mathbf{0})$ a vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ je do nich vnořen jako $\mathbf{v} \rightarrow (0, \mathbf{v})$.

Pro tato vnoření a jejich inverzy nebudeme zavádět žádné označení, z kontextu a z aplikovaných operací bude jasné, kdy zacházíme např. s vektorem a kdy s kvaternionem vektoru odpovídajícím. Například ve Větě 1.17 by na pravé straně bylo přesnější psát vektor vzniklý „odvnořením“ kvaternionu $q(0, \mathbf{r})\bar{q}$, což by ale zbytečně zaplevelovalo značení.

Lemma 1.13 (Geometrický význam kvaternionových operací). Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2)$ platí

$$\begin{aligned}q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1).\end{aligned}$$

Důkaz. Plyne přímo z rozepsání q_1 a q_2 pomocí čtyř složek.

Definice 1.14. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

Lemma 1.15. Jednotkové kvaterniony (označované $\mathbb{H}_1$) tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha),$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

Důkaz. Snadno ověříme, že pro libovolné dva kvaterniony platí $\overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_2} \cdot \overline{q_1}$. Multiplikativní invers jednotkového kvaternionu q je $\bar{q}$, protože $q\bar{q} = 1 = \bar{q}q$ a $\|\bar{q}\| = \|q\| = 1$. Dále jsou-li q_1, q_2 jednotkové kvaterniony, pak

$$\|q_1 q_2\| = \sqrt{(q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2})} = \sqrt{q_1(q_2 \overline{q_2})\overline{q_1}} = \sqrt{q_1 \overline{q_1}} = 1,$$

tedy $q_1 q_2$ je jednotkový kvaternion. Jednotkové kvaterniony tak tvoří neprázdnou podmnožinu multiplikativní grupy všech nenulových kvaternionů uzavřenou na skládání a inverze, čili podgrupu.

Je-li $q = (s, \mathbf{v})$ jednotkový kvaternion a $\mathbf{v} \neq \mathbf{o}$, potom nutně

$$|s| = \sqrt{\|q\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2} < 1.$$

Jediná možná vyhovující volba $\alpha \in (0, \pi)$ je $\alpha = \arccos s$. Z toho plyne

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\|q\|^2 - s^2} = \sin \alpha,$$

tedy $q = (s, \mathbf{v}) = (\cos \alpha, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \sin \alpha)$ a označíme $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. □

Lemma 1.16. Pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Důkaz. Důkaz naleznete v Dodatku na konci skript a nebude se zkoušet.

Věta 1.17. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha)$ je lineární zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

otočení kolem osy $\mathbf{n}$ úhel 2α v kladném směru.

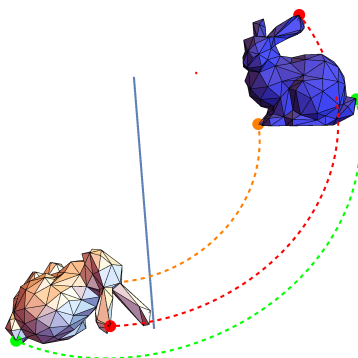
Důkaz. Označme $q = (s, \mathbf{v})$. S využitím Lemmat 1.13 a 1.16

$$\begin{aligned} q\mathbf{r}\bar{q} &= (s, \mathbf{v})(0, \mathbf{r})(s, -\mathbf{v}) \\ &= (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{v} \times \mathbf{r} + s\mathbf{r})(s, -\mathbf{v}) \\ &= (-\underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})s + (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}}_0 + s\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, \underbrace{-(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{v} - s\mathbf{r} \times \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + s(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) + s^2\mathbf{r}}_{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}}) \\ &= (0, 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{r} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r})) \\ &= (0, 2\sin^2 \alpha (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\mathbf{r} + 2\sin \alpha \cos \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r})) \\ &= (1 - \cos 2\alpha)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos(2\alpha)\mathbf{r} + \sin 2\alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Ovšem to je podle Rodriguesovy formule vektor vzniklý otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n}$ o úhel 2α v kladném směru. □

Příklad 1.18. Vypočítejte vektor, který vznikne otočením vektoru $(1, 0, 0)$ kolem vektoru $(3, 4, 0)$ o úhel $\phi = \pi/3$ v kladném směru.

Věta 1.19. Každá přímá shodnost v $\mathbb{R}^3$ má alespoň jednu samodružnou přímku a lze ji složit z otočení kolem této přímky a posunutí ve směru této přímky (má tedy tvar šroubového pohybu).



Důkaz. Každé $f \in \mathbb{E}_+(3)$ je tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je ortogonální a $\det \mathbf{A} = 1$. Matice $\mathbf{A}$ je unitární, její vlastní čísla nad $\mathbb{C}$ proto leží na jednotkové kružnici. Zároveň je reálná a stejně tak i koeficienty jejího charakteristického polynomu, tudíž je množina jejích vlastních čísel symetrická podle reálné osy komplexní roviny a musí proto mít tvar $\sigma(\mathbf{A}) = \{\pm 1, e^{i\phi}, e^{-i\phi}\}$, $\phi \in [0, \pi]$. Znaménko prvního vlastního čísla musí být kladné, protože součin všech vlastních čísel je roven $\det \mathbf{A} = 1$. Příklad $\phi = 0$ vede na trojnásobné vlastní číslo 1, a protože unitární matice jsou diagonalizovatelné, znamená to, že $\mathbf{A} = \mathbf{I}_3$. Tvrzení pak zřejmě platí, neboť můžeme uvažovat otočení o nulový úhel kolem osy $\mathbf{p}$ složené s tímto posunutím.

Pokud $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}_3$, je 1 jejím vlastním číslem s algebraickou a z diagonalizovatelnosti i geometrickou násobností 1, existuje tedy právě jeden vlastní směr s tímto vlastním číslem. Nechť $\mathbf{v}_1$ je jednotkový vlastní vektor s vlastním číslem 1 a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ jeho doplnění do ortonormální báze $\mathbb{R}^3$. Označme $W = LO\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonální doplněk prostoru $LO\{\mathbf{v}_1\}$ a rozložme

$$\mathbf{p} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3.$$

Můžeme jistě psát

$$f(\mathbf{X}) = [\mathbf{A}\mathbf{X} + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3] + a_1\mathbf{v}_1 = f_2(f_1(\mathbf{X})),$$

kde $f_1(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$ a $f_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + a_1\mathbf{v}_1$.

Asociovaný homomorfismus $f_{1,A}$ zachovává kolmost vektorů, zachovává tedy i podprostor W jakožto ortogonální doplněk vlastního směru $\text{LO}(\mathbf{v}_1)$. Zobrazení f_1 tedy zachovává množinu W také a je přímé. Navíc homomorfismus $f_{1,A}$ zúžený na W není roven identitě. Podle Věty 1.10 o klasifikaci shodností v rovině existuje právě jeden bod $\mathbf{S} = s_2\mathbf{v}_2 + s_3\mathbf{v}_3 \in W$, pro který platí $f_1(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$. Přímým výpočtem ověříme, že i všechny body přímky $p : \mathbf{S} + t\mathbf{v}_1$ jsou samodružnými body zobrazení f_1 . Jedná se tedy o otočení okolo osy p a zobrazení f_2 je zjevně posunutím v jejím směru.

Poznamenejme, že velikost úhlu otočení je možné určit z matice $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \text{diag}(1, e^{i\phi}, e^{-i\phi}) \mathbf{Q}^{-1}$ pomocí její stopy, protože $\text{Tr}\mathbf{A} = 1 + 2 \cos \phi$. □

2 Diferenciální geometrie křivek

Příklad 2.1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ jednotkovou kružnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$ bez bodu $(-1, 0)$. Tuto množinu parametrizujme jako $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ pro $t \in (-\pi, \pi)$ a uvažujme reparametrizaci $t = 2 \arctan s$ pro $s \in (-\infty, \infty)$. Nová parametrizace má tvar

$$\mathbf{c}(s) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2} \right)^T, \quad s \in (-\infty, \infty).$$

Tuto parametrizaci racionálními funkcemi lze také přímo geometricky zkonstruovat jako množinu průsečíků kružnice s přímkami z bodu $(-1, 0)$ se směrnici $s \in \mathbb{R}$.

Definice 2.2. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (případně neomezený), spojitě zobrazení $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrická křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže $\mathbf{c}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ (tedy má každá její složka spojitou derivaci všech řádů) a *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ pro každé $t \in I$.

Poznámka 2.3.

1. Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme hladkým zobrazením na I restrikci na I hladkého zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu.
2. Parametrická křivka je popsána n -ticí funkcí $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$ jedné proměnné definovaných na I .
3. Pro hladkou regulární parametrickou křivku definujeme její funkci rychlosti $\|\mathbf{c}'(t)\|$, která je hladká a kladná.
4. Ve větách a definicích budeme pro jednoduchost pracovat s hladkými křivkami (třídy $\mathcal{C}^\infty$), ale většina pojmů a výsledků platí i pro nižší třídu hladkosti.

Definice 2.4. Je-li $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ hladká regulární parametrická křivka a $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ hladké bijektivní zobrazení $\tilde{I}$ na I s vlastní a všude nenulovou derivací (tzv. *difeomorfismus*), je

$$\tilde{\mathbf{c}} := \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako $\mathbf{c}$. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci*.

Definice a lemma 2.5. Býti reparametrizací je relace ekvivalence (kterou označíme $\sim$) na množině všech hladkých regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka*. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence (kterou označíme $\approx$) na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka*.

Důkaz. Z věty o inverzní funkci plyne (viz skripta z MA), že inverzní funkce ϕ^{-1} existuje, je hladká, je bijektivní a má všude vlastní nenulovou derivaci. Tedy i inverzní funkce je hladký difeomorfismus. Dále už stačí jen ověřit podmínky relace ekvivalence:

- Reflexivita: identita je difeomorfismus a tedy $\mathbf{c} = \mathbf{c} \circ id$
- Symetrie: inverze difeomorfismu je difeomorfismus, tedy když $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi \Rightarrow \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \phi^{-1}$
- Transitivita: složení difeomorfismů je difeomorfismus (opět z řetízkového pravidla), tedy $(\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi \text{ a } \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \psi) \Rightarrow \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \mathbf{c} \circ (\phi \circ \psi)$
- Orientace: složení rostoucích funkcí je rostoucí a inverze k rostoucí funkci je rostoucí, tedy pro ϕ, ψ zachovávající orientaci také $\phi \circ \psi$ a ϕ^{-1} zachovávají orientaci.

□

Poznámka 2.6. Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz.

Poznámka 2.7. V diferenciální geometrii studujeme vlastnosti křivek, které se při reparametrizaci nemění nebo mění odpovídajícím způsobem (například mění znaménko při změně orientace). Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací těžké křivky. Například pokud máme parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ označovat jednoduše $\mathbf{c}(s)$. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například $\mathbf{c}'$ místo $\mathbf{c}'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Lemma 2.8. Pro derivace dvou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a $\underbrace{\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))}_{\mathbf{c}(s)}$ těžké hladké regulární křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}) = (\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''') \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 & 3\dot{\phi}\ddot{\phi} \\ 0 & 0 & \dot{\phi}^3 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Přímý výpočet derivace složené funkce řetízkovým pravidlem:

$$\dot{\mathbf{c}}(s_0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s_0} \tilde{\mathbf{c}}(s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s_0} \mathbf{c}(\phi(s)) = \frac{d}{dt} \Big|_{\phi(s_0)} \mathbf{c}(t) \quad \frac{d}{ds} \Big|_{s_0} \phi(s) = \mathbf{c}'(\phi(s_0))\dot{\phi}(s_0).$$

Dále zderivujeme podle s rovnost $\dot{\mathbf{c}} = \dot{\phi}\mathbf{c}'$:

$$\ddot{\mathbf{c}} = \ddot{\phi}\mathbf{c}' + \dot{\phi}^2\mathbf{c}''$$

Podobně pro třetí derivaci:

$$\ddot{\mathbf{c}} = \ddot{\phi}\mathbf{c}' + \ddot{\phi}\dot{\phi}\mathbf{c}'' + 2\dot{\phi}\ddot{\phi}\mathbf{c}'' + (\dot{\phi})^2\dot{\phi}\mathbf{c}''' = \ddot{\phi}\mathbf{c}' + 3\dot{\phi}\ddot{\phi}\mathbf{c}'' + (\dot{\phi})^3\mathbf{c}'''$$

□

2.1 Rovinné křivky

Pokud se neřekne jinak, budeme v této podkapitole termínem křivka označovat hladkou regulární křivku v $\mathbb{R}^2$. V následující definici zavedeme v každém bodě křivky kladně orientovanou ortonormální bázi, jejíž první vektor je ke křivce tečný, a skalární veličinu, která (jak později uvidíme) odpovídá rychlosti stáčení směru křivky.

Definice 2.9. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^2$ definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová, nazýváme *inflexní*.

Příklad 2.10. Studujeme křivku $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$, kde $t \in (-2, 2)$ v jejím bodě $t = 1$.

Věta 2.11. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^2$ zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.

Důkaz. S využitím lemmatu 2.8

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{\phi}\mathbf{c}'}{\|\dot{\phi}\mathbf{c}'\|} = \text{sign}(\dot{\phi}) \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t).$$

Dále platí

$$\mathbf{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t) = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{n}_*(t).$$

Konečně

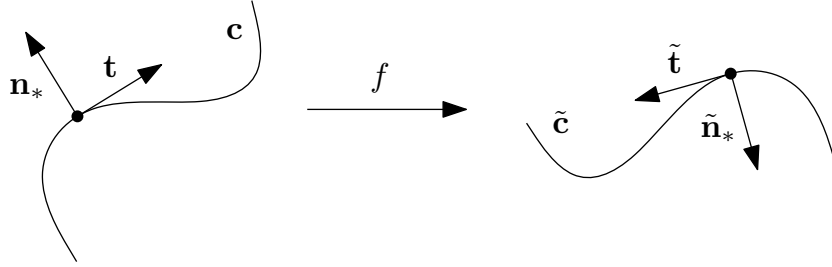
$$\kappa_z(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3} = \frac{\det\left[(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'') \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}\right]}{\|\dot{\phi}\mathbf{c}'\|^3} = \text{sign}(\dot{\phi}) \frac{\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \text{sign}(\dot{\phi})\kappa_z(t).$$

□

Věta 2.12. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z , $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = (\det \mathbf{A})\kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det \mathbf{A})\mathbf{n}_*$.

Důkaz. Uvědomme si, že $\det \mathbf{A} = \pm 1$. Navíc platí, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}''(t).$$



Tedy

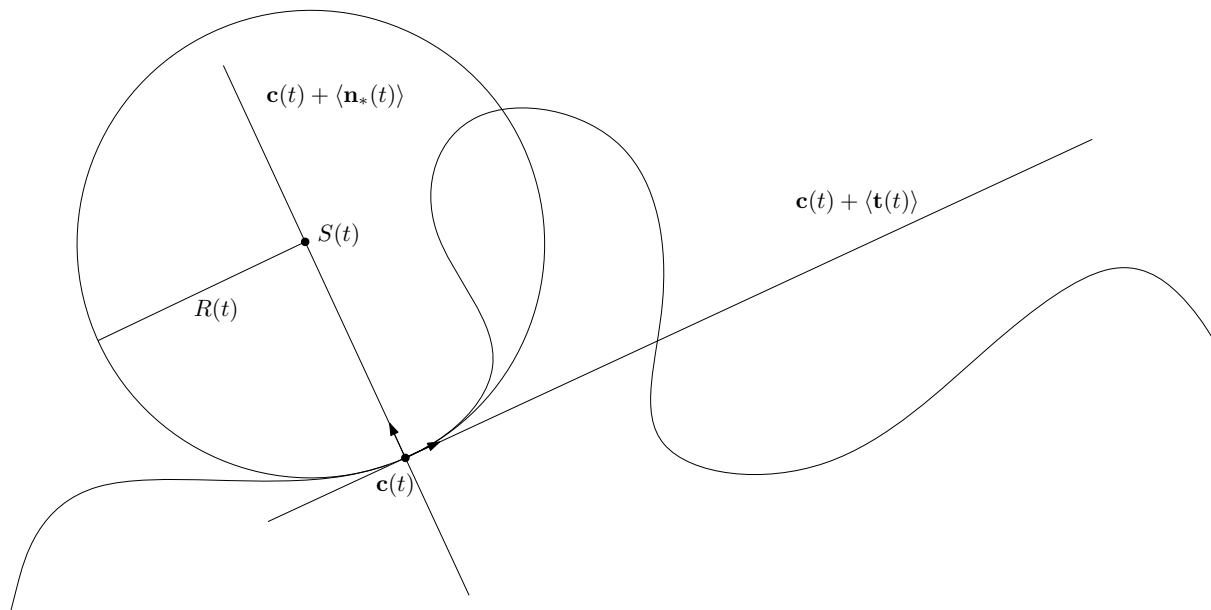
- $$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'')}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{A}\mathbf{c}', \mathbf{A}\mathbf{c}'')}{\|\mathbf{A}\mathbf{c}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = (\det \mathbf{A})\kappa_z,$$
 neboť pro libovolný vektor $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \Rightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{A}\mathbf{v})^T \mathbf{A}\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|$.
- $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{c}'}{\|\mathbf{A}\mathbf{c}'\|} = \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right) = \mathbf{A}\mathbf{t}$
- $\tilde{\mathbf{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{t} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \det(\mathbf{A})\mathbf{n}_*.$

Pro ověření třetí rovnosti na posledním řádku je třeba dosadit oba možné tvary matice $\mathbf{A}$ odpovídající otočení a osové souměrnosti. $\square$

Definice 2.13. Pro každou křivku $\mathbf{c}$ definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a *normálovou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}_*(t)\}$. Dále v každém neinflexním bodě definujeme její *poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{|\kappa_z(t)|}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa_z(t)}\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Důsledek 2.14. Tečná přímka, normálová přímka a oskulační kružnice se nemění při reparametrizaci a jsou ekvivariantní vůči shodnostem.

Důkaz. Podle Věty 2.11 se tyto objekty zjevně nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci a při reparametrizaci měnící orientaci je LO stejný a střed a poloměr křivosti vyjde bez změny znaménka. Podobně podle Věty 2.12 jsou tyto objekty ekvivariantní vůči přímým shodnostem a při bližším pohledu také vůči nepřímým, protože znaménko se vyruší.



Poznámka 2.15. Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech kružnic). Navíc, jestliže označíme $N(t)$ normálovou přímkou v bodě t , pak v každém neinflexním bodě $\mathbf{c}(t_0)$ platí

$$S(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} N(t_0) \cap N(t).$$

Věta 2.16. Pro hladkou regulární parametrickou křivku $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{t}'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\| \kappa_z(t) \mathbf{n}_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ pro $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.

Důkaz. Uvědomme si, že $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}$. Derivováním a úpravami dostaneme

$$\mathbf{t}' = \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right)' = \frac{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} \mathbf{c}'' - \frac{1}{2} \frac{2\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}''}{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}} \mathbf{c}'}{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} = \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3}.$$

Skalárním součinem předchozí rovnice získáme $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{t}' = 0$ a proto je $\mathbf{t}'$ násobkem $\mathbf{n}_*(t)$, tedy $\mathbf{t}' = K \mathbf{n}_*(t)$. Z rovností

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det(\mathbf{t}, K \mathbf{n}_*(t)) = K \underbrace{\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}_*(t))}_{=1} = K$$

a

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right) = \det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right) - \underbrace{\det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right)}_0 =$$

$$\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') \cdot \frac{1}{\|\mathbf{c}'\|^2} = \underbrace{\frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3}}_{\kappa_z} \cdot \underbrace{\|\mathbf{c}'\|}_{=r}$$

dostaneme, že $K = r\kappa_z$.

Funkce θ je spojitou verzí argumentu funkce $\mathbf{t}(t)$ a její existence a diferencovatelnost bude podrobněji studována v komplexní analýze. Potom dostáváme

$$\mathbf{t}'(t) = \theta(t)' \underbrace{(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))}_{\mathbf{n}_*(t)}$$

a z předchozí části máme $\theta'(t) = r(t)\kappa_z(t)$. □

Věta 2.17. Na otevřeném intervalu I budiž zadány dvě hladké reálné funkce $f(t)$, $r(t)$, přičemž $r(t) > 0$ pro $t \in I$. Pak existuje až na přímou shodnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, pro kterou platí

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = r(t), \quad \kappa_z(t) = f(t).$$

Důkaz. Zafixujme $t_0 \in I$ libovolné a definujme funkci $\theta(t)$ aby platilo

- $\theta'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|\kappa_z(t) = r(t)f(t)$, tedy θ nalezneme jako primitivní funkci k $r(t)f(t)$, která jistě existuje, protože $r(t)f(t)$ je hladká,
- $\theta(t_0) = \theta_0$, kde θ_0 je libovolná konstanta.

Nyní položíme

$$\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Zřejmě $\|\mathbf{t}(t)\| = 1$ a můžeme tedy konečně definovat

$$\mathbf{c}'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|\mathbf{t}(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

$\mathbf{c}(t)$ nalezneme jako primitivní funkci k $\mathbf{c}'(t)$, což lze, protože $\mathbf{c}'(t)$ je hladká funkce. Zvolíme $X, Y \in \mathbb{R}$ libovolná a nechť $\mathbf{c}_x(t_0) = X$ a $\mathbf{c}_y(t_0) = Y$.

V průběhu konstrukce funkce $\mathbf{c}(t)$ jsme volili polohu bodu $\mathbf{c}(t_0) = (X, Y)$ a směr tečného vektoru $\mathbf{t}(t_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, čímž jsme určili křivku jednoznačně až na přímou shodnost. □

Z důkazu plyne, že pro danou křivku $\mathbf{c}(t)$ lze definovat funkci $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ pro $t \in I$. Derivací této rovnosti získáme

$$\mathbf{t}'(t) = \theta'(t) \underbrace{(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))}_{\mathbf{n}_*(t)}$$

a z Věty 2.16 pak pro znaménkovou křivost platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$, je znaménková křivost rovna rychlosti změny směru křivky.

2.2 Prostorové křivky

Pokud se neřekne jinak, budeme v této kapitole termínem křivka označovat hladkou regulární křivku v $\mathbb{R}^3$.

Definice 2.18. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(t)$ a *křivost* $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

Bod, ve kterém je křivost nulová, se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *jednotkový binormálový vektor* $\mathbf{b}(t)$, *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(t)$ a *torzi* $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \quad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t), \mathbf{c}'''(t))}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|^2}.$$

Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$, která se nazývá *Frenetův repér*.

Věta 2.19. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^3$ zachovávající orientaci se v daném bodě křivost, torze a Frenetův repér nemění. Při reparametrizaci, která mění orientaci se křivost, torze a normálový vektor rovněž nemění, zatímco tečný a binormálový vektor se mění na vektory opačné.

Důkaz. Využijeme lemmatu 2.8 a označíme

$$M = \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 & 3\dot{\phi}\ddot{\phi} \\ 0 & 0 & \dot{\phi}^3 \end{pmatrix}.$$

Dále spočítáme

$$\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}} = (\dot{\phi}\mathbf{c}') \times (\ddot{\phi}\mathbf{c}' + \dot{\phi}^2\mathbf{c}'') = (\dot{\phi}\mathbf{c}') \times (\ddot{\phi}\mathbf{c}') + (\dot{\phi}\mathbf{c}') \times (\dot{\phi}^2\mathbf{c}'') = 0 + \dot{\phi}^3(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'').$$

Nyní už máme vše potřebné k důkazu věty, a počítáme

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(s) &= \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{\phi}\mathbf{c}'}{|\dot{\phi}| \|\mathbf{c}'\|} = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t), \\ \mathbf{b}(s) &= \frac{\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{\phi}^3(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{|\dot{\phi}|^3 \|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{b}(t), \\ \mathbf{n}(s) &= \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s) = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{b}(t) \times \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t) = \mathbf{n}(t), \\ \kappa(s) &= \frac{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3} = \frac{|\dot{\phi}|^3 \|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{|\dot{\phi}|^3 \|\mathbf{c}'\|^3} = \kappa(t), \\ \tau(s) &= \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|^2} = \frac{\det(M) \det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')}{\dot{\phi}^6 \|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \tau(t).\end{aligned}$$

□

Věta 2.20. Křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^3$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ , $\mathbf{t}$ a v neinflexním bodě navíc τ , $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě křivost $\tilde{\kappa} = \kappa$ a tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{t}$. V neinflexních bodech má navíc torzi $\tilde{\tau} = (\det \mathbf{A})\tau$, normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{A}\mathbf{n}$ a binormálový vektor $\tilde{\mathbf{b}} = (\det \mathbf{A})\mathbf{b}$.

Důkaz. Dokažme nejprve, že pro ortonormální matici $\mathbf{A}$ a libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ platí $\mathbf{A}\mathbf{x} \times \mathbf{A}\mathbf{y} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$. Skutečně, $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{z} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} \times \mathbf{A}\mathbf{y}) &= \det(\mathbf{z}, \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^T \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{A})(\mathbf{A}^T \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \\ &= \det(\mathbf{A})(\mathbf{z} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})) = \mathbf{z} \cdot (\det(\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})).\end{aligned}$$

Nyní už snadno ověříme dokazované vztahy. Platí totiž, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}''(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'''(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}'''(t).$$

Přímým výpočtem dostáváme

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{t}} &= \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \mathbf{A}\mathbf{t}, \\ \tilde{\mathbf{b}} &= \frac{\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''}{\|\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''\|} = \frac{\det(\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = \det(\mathbf{A})\mathbf{b}, \\ \tilde{\mathbf{n}} &= \tilde{\mathbf{b}} \times \tilde{\mathbf{t}} = \det(\mathbf{A})(\mathbf{A}\mathbf{b} \times \mathbf{A}\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{n},\end{aligned}$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{\|\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''\|}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|^3} = \frac{|\det(\mathbf{A})| \|\mathbf{A}(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{c}'\|^3} = \frac{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \kappa$$

a konečně

$$\tilde{\tau} = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}'|\tilde{\mathbf{c}}''|\tilde{\mathbf{c}}''')}{\|\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''\|^2} = \frac{\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \det(\mathbf{A})\tau.$$

□

Definice 2.21. Pro hladkou regulární křivku $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme v každém bodě *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme

- *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$,
- *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t)\}$,
- *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$.

Definice a lemma 2.22. O hladké parametrizované křivce $\mathbf{c}(t)$ řekneme, že je *parametrizovaná obloukem* nebo jednotkovou rychlostí, jestliže pro všechna $t \in I$ platí $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$. Každou hladkou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li $\mathbf{c}(t)$ nějaká parametrizace obloukem, pak všechny ostatní parametrizace této křivky obloukem získáme reparametrizací $t = \phi(s)$, $\phi(s) = \pm s + s_0$, kde s_0 je libovolná konstanta.

Důkaz. Mějme libovolnou hladkou regulární křivku $\mathbf{c}(t)$. Pak platí, že $\|\mathbf{c}'(t)\| > 0$, což je jistě hladká funkce, a tudíž můžeme definovat

$$\psi(t) = \int \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Pak tedy platí vztah $\psi(t)' = \|\mathbf{c}'(t)\|$. Funkce ψ je prostá, tudíž definujeme $\phi = \psi^{-1}$. Definujeme nyní $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$, z čehož podle věty o derivaci inverzní funkce plyne

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\phi} \mathbf{c}' = \frac{1}{\psi'} \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \mathbf{t}.$$

Z toho ovšem plyne, že $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$, tedy jsme našli parametrizaci obloukem.

Předpokládejme nyní, že máme křivku $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem a její obloukovou reparametrizaci $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$. Pak

$$1 = \|\dot{\mathbf{c}}\| = \|\mathbf{c}'\| |\dot{\phi}| = 1 |\dot{\phi}|,$$

tedy nutně $|\dot{\phi}| = 1 \Rightarrow \dot{\phi} = \pm 1 \Rightarrow \phi = \pm s + s_0$.

Naopak, měli bychom křivku $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem, pak takovou reparametrizací $\phi(s) = \pm s + s_0$ opět dostaneme parametrizaci obloukem z výpočtu výše. □

Lemma 2.23. Pro regulární hladkou křivku $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovanou obloukem v každém bodě platí $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$ a $\kappa(t) = \|\mathbf{c}''(t)\| = \|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|$. V každém neinflexním bodě navíc $\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}''(t)\|}$.

Důkaz. Mějme $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem. Zřejmě platí $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$. Ze vztahu $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$ odvodíme

$$\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 1 \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$2\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}''(t) = 0,$$

tedy $\mathbf{c}'(t) \perp \mathbf{c}''(t)$, čehož plyne, že $\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\| = \|\mathbf{c}'\| \cdot \|\mathbf{c}''\| = \|\mathbf{c}''\|$.

Nyní snadno spočítáme, že

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \|\mathbf{c}''\|$$

a užitím Lemmatu 1.16 máme v neinflexních bodech

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} \times \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \frac{1}{\|\mathbf{c}''\|} ((\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \times \mathbf{c}') = \frac{-1}{\|\mathbf{c}''\|} (\mathbf{c}' \times (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')) = \\ &= \frac{-1}{\|\mathbf{c}''\|} ((\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'')\mathbf{c}' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c}'') = \frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|}. \end{aligned}$$

□

Věta 2.24 (Frenetovy vzorce). Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}' | \mathbf{n}' | \mathbf{b}') = (\mathbf{t} | \mathbf{n} | \mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$ jako

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}.$$

Důkaz. Uvažme tři vektory $(\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_3(t))$, které závisí na parametru a pro jeho libovolnou hodnotu $t \in I$ tvoří ON bázi $\mathbb{R}^3$. Libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lze (pro pevné t) vyjádřit jako

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_3.$$

Tedy speciálně pro každé pevné t platí

$$\mathbf{v}'_i = (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_3, \text{ pro } i = 1, 2, 3.$$

Zřejmě lze psát

$$(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)M,$$

kde M je matice 3×3 s položkami $m_{ji} = \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_j$.

Protože platí $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, derivováním podle t dostáváme rovnost $\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{v}'_j \cdot \mathbf{v}_i = 0$, čili $\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_j = -\mathbf{v}'_j \cdot \mathbf{v}_i$ a tedy M musí být antisymetrická

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A & -B \\ A & 0 & -C \\ B & C & 0 \end{pmatrix}.$$

V našem případě, kdy $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ a t odpovídá parametrizaci obloukem platí podle Lemmatu 2.23

$$\mathbf{t}' = \mathbf{c}'' = \|\mathbf{c}''\| \frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|} = \kappa \mathbf{n},$$

a tedy dostáváme $A = \kappa, B = 0$. Snadno nahlédneme, že $C = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b}$, a tedy počítáme

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} &= \left(\frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|} \right)' \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = \left(\frac{\mathbf{c}''}{\kappa} \right)' \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\kappa} = \frac{\kappa \mathbf{c}''' - \kappa' \mathbf{c}''}{\kappa^2} \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\kappa} = \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \cdot [\mathbf{c}''' \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')] = \frac{\det(\mathbf{c}''' | \mathbf{c}' | \mathbf{c}'')}{\kappa^2} = \frac{\det(\mathbf{c}' | \mathbf{c}'' | \mathbf{c}''')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \tau. \end{aligned}$$

Čtvrtá rovnost plyne z kolmosti vektorů $\mathbf{c}''$ a $\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''$.

Tudíž

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále přímým výpočtem za užití výše dokázaných vztahů mezi vektory Frenetova repéru a jejich derivacemi máme

$$\mathbf{d} \times \mathbf{t} = (\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}) \times \mathbf{t} = \kappa \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \kappa \mathbf{n} = \mathbf{t}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{n} = (\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}) \times \mathbf{n} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t} = \mathbf{n}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{b} = (\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = -\tau \mathbf{n} = \mathbf{b}'.$$

□

Poznámka 2.25. Vidíme tedy, že v parametrizaci obloukem (kdy se poloha bodu mění jednotkovou rychlostí) křivost vyjadřuje rychlost okamžité změny tečného vektoru (a tím i tečné přímky) a torze rychlost okamžité změny binormálového vektoru (a tím i oskulační roviny). Rovněž můžeme okamžitou změnu celého Frenetova repéru chápat jako otočení kolem Darbouxova vektoru, jejíž rychlost je daná jeho délkou, tedy $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, které se někdy říká celková křivost.

Věta 2.26. Nechť $f(t) > 0, g(t)$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I . Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že

$$\kappa(t) = f(t), \quad \tau(t) = g(t).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají *přirozené rovnice křivky*.

Věta 2.27. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí, že leží v nějaké rovině právě tehdy, když $\tau(t) = 0$ pro každé $t \in I$.

Důkaz.

- ($\implies$) Leží-li $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ v nějaké rovině, existují $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ taková, že $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ a pro všechna $t \in I$ je $pc_x(t) + qc_y(t) + rc_z(t) = s$, tedy $\mathbf{c} \cdot (p, q, r) = s$. Postupným derivováním podle t dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{c}' \cdot (p, q, r) &= 0, \\ \mathbf{c}'' \cdot (p, q, r) &= 0, \\ \mathbf{c}''' \cdot (p, q, r) &= 0.\end{aligned}$$

Vektory $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}''$, $\mathbf{c}'''$ všechny leží v prostoru $LO\{(p, q, r)\}^\perp$ dimenze dva, takže jsou lineárně závislé. Z toho plyne rovnost $\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''') = 0$ a tedy i $\tau = 0$.

- ($\impliedby$) BÚNO uvažujme $\mathbf{c}$ parametrizovanou obloukem. Je-li $\tau(t) = 0$ pro všechna $t \in I$, potom $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n} = \mathbf{0}$, tedy $\mathbf{b}$ je konstantní. Zvolme $t_0 \in I$ libovolné a definujme

$$\mathbf{h}(t) = (\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t), \quad t \in I.$$

Platí $\mathbf{h}(t_0) = 0$ a $\mathbf{h}' = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0$, takže $\mathbf{h} = 0$, neboli $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}(t_0) \cdot \mathbf{b}$. Křivka tedy leží v rovině $\mathbf{c}(t_0) + LO\{\mathbf{b}\}^\perp$. $\square$

Věta 2.28. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ vnořenou do $\mathbb{R}^3$ zobrazením $(x, y) \rightarrow (x, y, 0)$ platí $\kappa = |\kappa_z|$ a v neinflexních bodech $\mathbf{n} = \text{sign}(\kappa_z)\mathbf{n}_*$.

Důkaz. Necht' $\mathbf{c} = (c_x, c_y) \equiv (c_x, c_y, 0)$. Snadno spočteme

$$\begin{aligned}\kappa_z &= \frac{\det \begin{pmatrix} c'_x & c''_x \\ c'_y & c''_y \end{pmatrix}}{(\sqrt{c'^2_x + c'^2_y})^3}, \\ \kappa &= \frac{\|(c'_x, c'_y, 0) \times (c''_x, c''_y, 0)\|}{(\sqrt{c'^2_x + c'^2_y + 0^2})^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0, 0, \det \begin{pmatrix} c'_x & c'_y \\ c''_x & c''_y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\|}{(\sqrt{c'^2_x + c'^2_y})^3} = |\kappa_z|.\end{aligned}$$

Dále v neinflexních bodech označme $\mathbf{t} = (t_x, t_y, 0)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_* &= (-t_y, t_x, 0), \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = (0, 0, \text{sign}(\kappa_z)), \\ \mathbf{n} &= \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \text{sign}(\kappa_z)(-t_y, t_x, 0) = \text{sign}(\kappa_z)\mathbf{n}_*.\end{aligned}$$

$\square$

2.3 Křivkový integrál

Definice 2.29. Mějme regulární hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a reálnou funkci f definovanou na $\langle \mathbf{c} \rangle$. Pak definujeme *Křivkový integrál 1. druhu*

$$\int_{\mathbf{c}} f ds := \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 2.30. Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na (re)parametrizaci.

Důkaz. Ať $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ je regulární hladká parametrická křivka v $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$, $s \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ je její reparametrizace a f je reálná funkce definovaná na $\langle \mathbf{c} \rangle$.

Rozlišíme dva případy a počítáme:

1. $\dot{\phi} > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(s)) \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\dot{\phi}(s) \mathbf{c}'(\phi(s))\| ds \\ &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\mathbf{c}'(\phi(s))\| \dot{\phi}(s) ds = \left| \frac{t = \phi(s)}{dt = \dot{\phi} ds} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt. \end{aligned}$$

2. $\dot{\phi} < 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(s)) \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\dot{\phi}(s) \mathbf{c}'(\phi(s))\| ds \\ &= - \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\mathbf{c}'(\phi(s))\| \dot{\phi}(s) ds = \left| \frac{t = \phi(s)}{dt = \dot{\phi} ds} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt, \end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti se mínus vykrátí s prohozením mezí.

□

Definice 2.31. Délku křivky definujeme jako integrál prvního druhu z konstantní jednotkové funkce

$$\ell(\mathbf{c}) := \int_{\mathbf{c}} 1 ds.$$

Definice 2.32. Parametrizovaná křivka $\mathbf{c} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\beta)$. Tuto křivku navíc nazveme *jednoduchou*, je-li $\mathbf{c}$ prosté na $[\alpha, \beta]$. Jednoduchá uzavřená rovinná křivka se rovněž nazývá *Jordanova*.

Věta 2.33 (Umlaufsatz). Je-li $\mathbf{c}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ jednoduchá regulární hladká uzavřená křivka, pro kterou navíc $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$, pak

$$\int_{\mathbf{c}} \kappa_z ds = \pm 2\pi.$$

V případě hodnoty 2π nazýváme křivku kladně orientovanou, v případě -2π ji nazýváme záporně orientovanou.

Důkaz. (Částečný.) Dokážeme pouze, že uvedený integrál 1. druhu je celočíselným násobkem 2π . Podle Věty 2.16 existuje hladká funkce $\theta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(t) &= (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \\ \theta'(t) &= \kappa_z(t) \|\mathbf{c}'(t)\|, \quad t \in [\alpha, \beta].\end{aligned}$$

Z $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$ plyne $\theta(\beta) = \theta(\alpha) + 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Tedy dostáváme

$$\int_{\mathbf{c}} \kappa_z ds = \int_{\alpha}^{\beta} \kappa_z(t) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \theta'(t) dt = [\theta(t)]_{\alpha}^{\beta} = 2k\pi.$$

□

Poznámka 2.34. Znaménková křivost κ_z je definována jako funkce parametru t , ale z Věty 2.11 plyne, že její hodnota se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci a můžeme ji tedy chápat jako funkci definovanou na $\langle \mathbf{c} \rangle$. V důsledku je pro jednoduchou orientovanou křivku $\int_{\mathbf{c}} \kappa_z ds$ dobře definovaným integrálem 1. druhu.

V případně orientovaných uzavřených křivek, které nejsou jednoduché (prosté) není možno znaménkovou křivost chápat jako funkci na $\langle \mathbf{c} \rangle$. Stále platí, že integrál

$$\int_{\alpha}^{\beta} \kappa_z(t) \|\mathbf{c}'(t)\| dt$$

se nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci. Za předpokladu $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$ bude tento integrál roven $2k\pi$ a číslo k nazýváme index křivky.

Definovat kladnou či zápornou orientaci pro Jordanovy křivky je možné i bez použití integrálu a pro širší třídu (ne nutně hladkých) křivek. Takový postup ale vyžaduje netriviální prostředky algebraické topologie. Intuitivně však kladnou orientaci můžeme chápat jako probíhající body křivky "proti směru hodinových ručiček".

Definice 2.35. Mějme regulární hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a zobrazení (vektorové pole) $\mathbf{F} : \langle \mathbf{c} \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pak definujeme *Křivkový integrál 2. druhu*

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 2.36. Křivkový integrál 2. druhu nezávisí na reparametrizaci zachovávající orientaci a mění znaménko při změně orientace.

Důkaz. Ať $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ je regulární hladká parametrická křivka v $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$, $s \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ je její reparametrizace a F vektorové pole definované na $\langle \mathbf{c} \rangle$. Podobně jako v důkazu Věty 2.29 dostáváme použitím věty o substituci

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} F(\mathbf{c}(s)) \cdot \dot{\mathbf{c}}(s) ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} [F(\mathbf{c}(\phi(s))) \cdot \mathbf{c}'(\phi(s))] \dot{\phi}(s) ds = \left| \frac{t = \phi(s)}{dt = \dot{\phi} ds} \right| = \pm \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt,$$

přičemž záporné znaménko nastává pouze při reparametrizaci měnící orientaci ($\dot{\phi} < 0$) a to v důsledku prohození mezí integrálu. □

Poznámka 2.37. Pro prostou orientovanou křivku můžeme definovat tečný vektor $\mathbf{t}$ pro každý bod $\langle \mathbf{c} \rangle$ nezávisle na reparametrizaci zachovávající orientaci. Pak pro zadané pole $\mathbf{F}$ můžeme definovat funkci $f := \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ (skalární součin pole a tečného vektoru) a snadno z definice oběříme, že platí následující vztah mezi integrály 1. a 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\mathbf{c}} f ds.$$

Věta 2.38 (Greenova věta). Nechť $\mathbf{c}$ je jednoduchá, hladká, uzavřená, regulární, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka v $\mathbb{R}^2$. Nechť $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je hladké vektorové pole definované na nějakém okolí uzávěru $\text{Int } \mathbf{c}$. Pak

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\text{Int } \mathbf{c}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Lemma 2.39 (Obsah oblasti). Buď $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$, $t \in [\alpha, \beta]$ kladně orientovaná, hladká, regulární jednoduchá, uzavřená křivka. Pak plošný obsah oblasti $\text{Int } \mathbf{c}$ je roven

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} c_x(t) c'_y(t) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} c_y(t) c'_x(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (c_x c'_y - c'_x c_y) dt.$$

Důkaz. Ať $\mathbf{c}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ je křivka ve znění věty. Dále mějme vektorové pole $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Pak z Věty 2.38 dostáváme, že

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\text{Int } \mathbf{c}} 1 dx dy = A.$$

Také ovšem z definice můžeme psát

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\alpha}^{\beta} (0, c_x(t)) \cdot (c'_x(t), c'_y(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} c_x(t) c'_y(t) dt,$$

čímž dostáváme jednu z dokazovaných rovností. Zbylé rovnosti dostaneme analogicky volbou $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 0)$, respektive $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$. $\square$

Lemma 2.40 (Wirtingerovo). Nechť $f(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkce, pro kterou platí $f(0) = f(\pi) = 0$. Pak

$$\int_0^{\pi} f'^2(t) dt \geq \int_0^{\pi} f^2(t) dt$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $f(t) = D \sin(t)$, kde D je konstanta.

Věta 2.41 (Isoperimetrická nerovnost). Buď $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená regulární hladká křivka délky l a buď A plošný obsah $\text{Int } \mathbf{c}$. Pak

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq A,$$

přitom rovnost nastane, právě když $\mathbf{c}$ je kružnice.

Důkaz. Mějme křivku ve znění věty a ať $\mathbf{c}(s)$ je její parametrizace obloukem. Pak $s \in [0, l]$ a $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$. Dále užijeme reparametrizace $t = \phi(s) = \frac{\pi s}{l}$, z čehož plyne, že $t \in [0, \pi]$ a tudíž pro rychlost platí $\|\mathbf{c}'(t)\| = \|(\phi^{-1})' \cdot \dot{\mathbf{c}}\| = \frac{l}{\pi}$. Navíc celou parametrizovanou křivku zobrazíme přímou shodností tak, aby platilo $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(\pi) = [0, 0]$ a $\mathbf{c}'(0) = (c'_x, 0)$, kde $c'_x > 0$.

Nyní křivku vyjádříme v „polárních souřadnicích“:

$$\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t)) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)),$$

kde r, θ jsou hladké a r je kladná vyjma koncových bodů, ve kterých máme $r(0) = r(\pi) = 0$. Platí

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = \|\mathbf{c}'\|^2 = c_x'^2 + c_y'^2 = (r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta)^2 = r'^2 + r^2\theta'^2,$$

z čehož plyne

$$\int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2) dt = \frac{l^2}{\pi}.$$

Z Lemmatu 2.39 spočítáme plošný obsah oblasti $\text{Int } \mathbf{c}$ jako

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (c_x c_y' - c_y c_x') dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (r \cos \theta (r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta) - r \sin \theta (r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \theta' dt. \end{aligned}$$

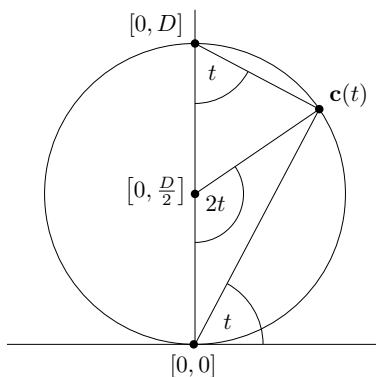
Můžeme tedy počítat:

$$\frac{l^2}{4\pi} - A = \frac{1}{4} \int_0^\pi (r'^2 + r^2\theta'^2 - 2r^2\theta') dt = \frac{1}{4} \int_0^\pi r^2(\theta' - 1)^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^\pi (r'^2 - r^2) dt.$$

Pravá strana je ovšem nezáporná, neboť v prvním integrálu je mocnina a v druhém aplikujeme Lemma 2.40. Celkem tedy

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq A.$$

Zároveň z obou integrálů vidíme, kdy nastane rovnost; v prvním právě tehdy, když $\theta = t$, a v druhém když $r = D \sin(t)$.



V tom případě po přechodu zpátky ke „kartézským souřadnicím“ a drobných úpravách dostáváme

$$\mathbf{c}(t) = \left(0, \frac{D}{2}\right) + \frac{D}{2}(\sin(2t), -\cos(2t)), \quad t \in [0, \pi],$$

takže jde o kružnici.

□

3 Afinní prostory a zobrazení

Definice 3.1. Mějme vektorový prostor V dimenze n nad tělesem T . Neprázdnou množinu A spolu se zobrazením $\oplus : A \times V \rightarrow A$ nazveme *afinním prostorem se zaměřením V jestliže*

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{X} \in A : (\mathbf{X} \oplus \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} = \mathbf{X} \oplus (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
2. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in A, \exists ! \mathbf{v} \in V : \mathbf{X} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{Y}$, tento vektor značíme $\mathbf{v} = \mathbf{Y} \ominus \mathbf{X}$.

Prvky A nazýváme body afinního prostoru. Dimenzi afinního prostoru definujeme jako dimenzi jeho zaměření. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme místo $\oplus$ psát obyčejné $+$ a místo $\ominus$ psát $-$.

Příklad 3.2. V příkladech se budeme zabývat jen následujícími afinními prostory:

- Množina $A = \mathbb{R}^3$ je afinním prostorem nad vektorovým prostorem $V = \mathbb{R}^3$. Obecně pro libovolný vektorový prostor získáme takzvaný *aritmetický afinní prostor* tak, že položíme $A = V$ a $\oplus = +$.
- Množina

$$A = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z - 6 = 0\}$$

je afinním prostorem nad

$$V = LO\{(-2, 1, 0)^T, (-3, 0, 1)^T\}.$$

Obecně je každý lineární útvar (řešení soustavy lineárních rovnic) afinním prostorem nad svým zaměřením (řešením příslušné homogenní soustavy). Jedná se o afinní podprostor aritmetického afinní prostoru.

Věta 3.3. Mějme afinní prostor A se zaměřením V , pak pro libovolné prvky $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in A$; $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

1. $\mathbf{A} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{B} \ominus \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B})$
3. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \ominus \mathbf{C}) = \mathbf{A} \ominus \mathbf{C}$
4. $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{u}) - (\mathbf{B} \oplus \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
5. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{B})$

Důkaz. Pro afinní prostory z Příkladu 3.2 jsou tvrzení zjevná, neboť $\oplus = +$. V obecném případě se vlastnosti musí technicky dokázat z definice, kterýžto důkaz lze nalézt v Dodatku.

Definice 3.4. *Afinní soustavou souřadnic (nebo také repérem) v afinním prostoru A dimenze n rozumíme $(n+1)$ -tici $S = (\mathbf{P}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, kde $\mathbf{P} \in A$ je bod nazývaný počátek a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze V . Pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ definujeme jeho souřadnice v soustavě S vztahem*

$$[\mathbf{X}]_S = [\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B.$$

Jedná se tedy o jednoznačně určenou n -tici skalárů $(t_1, \dots, t_n)^T$ tak, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + t_1 \mathbf{u}_1 + t_2 \mathbf{u}_2 + \dots + t_n \mathbf{u}_n.$$

Pro jednoduchost se i pro vektory dovoluje zápis $[\mathbf{v}]_S := [\mathbf{v}]_B$.

Věta 3.5. Mějme v afinním prostoru A dvě soustavy souřadnic $S = (\mathbf{P}, \underbrace{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n}_B)$ a $S' = (\mathbf{P}', \underbrace{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n}_{B'})$. Pak pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ platí

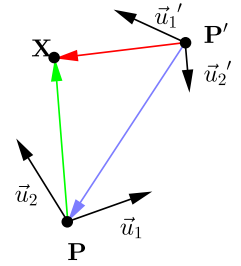
$$[\mathbf{X}]_{S'} = [Id]_{B'}^B [\mathbf{X}]_S + [\mathbf{P}]_{S'}.$$

Zároveň pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ triviálně platí $[\mathbf{v}]_{S'} = [Id]_{B'}^B [\mathbf{v}]_S$.

Důkaz. Afinní souřadnice vektorů jsou definovány jako jejich souřadnice vzhledem k bázi ve V , tedy $[\mathbf{v}]_S := [\mathbf{v}]_B$, $[\mathbf{v}]_{S'} := [\mathbf{v}]_{B'}$. Ze znalosti přechodu mezi bázemi ve vektorových prostorech pak dostáváme $[\mathbf{v}]_{S'} = [Id]_{B'}^B [\mathbf{v}]_S$.

První část tvrzení spočteme přechodem do vektorového prostoru s využitím definice, převodem mezi bázemi zde a pak návratem k druhé soustavě souřadnic.

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}]_{S'} &= [\mathbf{X} - \mathbf{P}']_{B'} = [(\mathbf{X} - \mathbf{P}) + (\mathbf{P} - \mathbf{P}')]_{B'} = \\ &= [(\mathbf{X} - \mathbf{P})]_{B'} + \underbrace{[(\mathbf{P} - \mathbf{P}')]_{B'}}_{[\mathbf{P}]_{S'}} = \\ &= [Id]_{B'}^B \underbrace{[\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B}_{[\mathbf{X}]_S} + [\mathbf{P}]_{S'} \end{aligned}$$



V druhé rovnosti jsme využili třetí bod Věty 3.3 a ve třetí linearitu souřadnic ve vektorových prostorech. $\square$

Definice a lemma 3.6. Pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A a koeficienty $c_1, \dots, c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ definujeme *afinní kombinaci* $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i$ jako bod

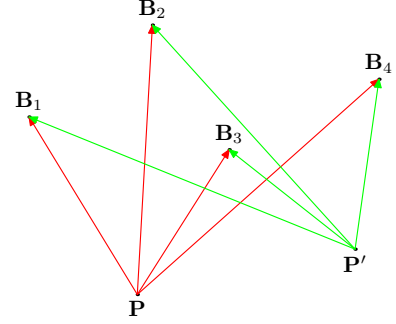
$$\mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}), \quad (1)$$

kde $\mathbf{P}$ je libovolný bod a výraz (1) na jeho volbě nezáleží.

Důkaz. Mějme dva libovolné body $\mathbf{P}$ a $\mathbf{P}'$. Ukážeme, že se výraz (1) pro $\mathbf{P}'$ rovná tomu pro $\mathbf{P}$.

Přičteme výraz rovný dle druhého bodu Věty 3.3 nulovému vektoru a upravíme.

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{P}' + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') \right] + \underbrace{(\mathbf{P} - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P})}_{\mathbf{o}} = \\ & = \mathbf{P}' + \left[\sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + (\mathbf{P} - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \right] = \end{aligned}$$



Podle prvního axiomu jsme mohli vektory v hranaté závorce nejprve sečíst, až pak je přičíst k bodu $\mathbf{P}'$. Dále z komutativity sčítání ve vektorovém prostoru a znovu z druhého axiomu afinního prostoru máme:

$$= \underbrace{[\mathbf{P}' + (\mathbf{P} - \mathbf{P}')]_{\mathbf{P}}} + \left[\sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \right] =$$

První člen je roven $\mathbf{P}$ z definice. Vektor $(\mathbf{P}' - \mathbf{P})$ vynásobíme koeficienty c_i , jejichž součet je 1, a posčítáme. Poté sumy sloučíme, vytknutím c_i a použitím třetího bodu z Věty 3.3 získáme výsledek.

$$\begin{aligned} & = \mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) = \\ & = \mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i [(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P})] = \left[\mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}) \right] \end{aligned}$$

□

Věta 3.7. V aritmetických prostorech a podprostorech (Příklad 3.2) můžeme afinní kombinaci chápat jako lineární kombinaci příslušných aritmetických vektorů.

Dále v jakémkoliv afinním prostoru, jestliže S afinní soustava souřadnic, pak pro libovolnou afinní kombinaci platí

$$\left[\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i \right]_S = \sum_{i=1}^k c_i [\mathbf{B}_i]_S.$$

Afinní kombinace tedy můžeme počítat v souřadnicích.

Důkaz. V aritmetickém afinním prostoru se v rovnici (1) zruší bod (aritmetický vektor) $\mathbf{P}$ a výsledkem je přímo příslušná lineární kombinace aritmetických vektorů $\mathbf{B}_i$.

Dále nechť $S = (\mathbf{P}, \underbrace{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n}_B)$ je soustava souřadnic s počátkem souřadnic $\mathbf{P}$. Z minulé definice pro $\mathbf{X}$ platí (zvolili jsme $\mathbf{P}$ jako bod z definice 3.6)

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}).$$

Vyjádříme $\mathbf{X}$ v soustavě S .

$$[\mathbf{X}]_S = [\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B = \left[\sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}) \right]_B = \sum_{i=1}^k c_i [(\mathbf{B}_i - \mathbf{P})]_B = \sum_{i=1}^k c_i [\mathbf{B}_i]_S.$$

□

Definice a lemma 3.8. O libovolných bodech $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A řekneme, že jsou *v obecné poloze* právě tehdy, když vektory

$$\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1)\} \quad (2)$$

jsou lineárně nezávislé. Vlastnost *býti v obecné poloze* nezávisí na pořadí bodů.

Důkaz. Permutací bodů $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k$ se jen permutují vektory (2) a tedy se nemění jejich lineární závislost či nezávislost. Prohozením bodů B_1 a B_2 se přejde k nové posloupnosti vektorů

$$\begin{aligned} &\{(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_2), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_2)\} \\ &= \{-(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1) - (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1) - (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)\}. \end{aligned}$$

Nezmění se tedy ani jejich počet, ani jejich lineární obal a tedy ani závislost či nezávislost. Každou jinou permutaci bodů dostaneme složením permutací studovaných.

Definice a lemma 3.9. V afinním prostoru A dimenze n mějme $(n+1)$ bodů $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1}$ v obecné poloze. Pak lze každý bod $\mathbf{X} \in A$ vyjádřit právě jedním způsobem jako afinní kombinaci těchto bodů

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{B}_i, \quad \text{kde } \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1.$$

Posloupnost bodů $Z = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1})$ nazýváme *barycentrická soustava souřadnic* a $(n+1)$ -tici skalárů $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ nazýváme *barycentrické souřadnice* bodu $\mathbf{X}$.

Důkaz. To že $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{B}_i$ podle definice znamená, že pro libovolné $\mathbf{P} \in A$ platí

$$(\mathbf{X} - \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}).$$

Speciálně můžeme volit $\mathbf{P} = \mathbf{B}_1$ a dostaneme

$$(\mathbf{X} - \mathbf{B}_1) = c_1 \underbrace{(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1)}_{\mathbf{0}} + \sum_{i=2}^{n+1} c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1),$$

tedy se jedná o vyjádření vektoru $(\mathbf{X} - \mathbf{B}_1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_1)\}$, které tvoří bázi (jsou LN díky obecné poloze a jejich správný počet). Toto vyjádření je tedy jednoznačné. Poznamenejme, že koeficienty $c_2, \dots, c_{n+1}$ můžeme chápat jako libovolné a

$$c_1 = 1 - (c_2 + \dots + c_{n+1}).$$

□

Příklad 3.10. V prostoru $A = \mathbb{R}^2$ vrcholy $\mathbf{B}_1$ jakéhokoliv trojúhelníku $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic a souřadnice těžiště jsou $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Důsledek 3.11. Jestliže $Z = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1})$ je barycentrická soustava souřadnic a $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ odpovídající barycentrické souřadnice bodu X , pak

$$S = (\mathbf{B}_1, (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_1))$$

je afinní soustava souřadnic a $[\mathbf{X}]_S = (c_2, \dots, c_{n+1})^T$.

Obecněji, jestliže máme libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ a skaláry $c_1, \dots, c_k$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$, pak

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_1 + \sum_{i=2}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1),$$

tedy všechny afinní kombinace daných bodů odpovídají tomu, že se k prvnímu bodu přičtou všechny lineární kombinace rozdílových vektorů. Povšimněme si, že druhá summa začíná od $i = 2$, tedy koeficienty lineární kombinace jsou libovolné bez omezení a $c_1 = 1 - (c_2 + \dots + c_k)$.

Definice 3.12. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V . Afinní prostor B nad tělesem T se zaměřením W nazveme *afinní podprostor* prostoru A , pokud $B \subseteq A$, $W \leq V$ a sčítání bodu a vektoru v B je zúžením sčítání bodu a vektoru v A .

Věta 3.13. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V , $\mathbf{X} \in A$ libovolný bod a $W \leq V$ libovolný vektorový podprostor. Pak množina

$$\mathbf{X} + W$$

je afinní podprostor A a každý afinní podprostor lze vyjádřit tímto způsobem, který nazýváme *parametrické vyjádření*.

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že je to afinní podprostor A . Je jasné, že se jedná o podmnožinu A a zaměření W je podprostor V . Nahlédneme, že množina $B = \mathbf{X} + W$ je afinním prostorem, ověřením dvou axiomů. Vlastnost sčítání z prvního axiomu se zdědí z celého prostoru. Ve druhém chceme dokázat

$$\forall \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in B, \exists! \mathbf{w} \in W : \mathbf{Y} + \mathbf{w} = \mathbf{Z}.$$

Existuje nejvýše jeden takový vektor $\mathbf{w}$, protože v celém V , odkud jsou i $\mathbf{Y}$ a $\mathbf{Z}$, je právě jeden. Ukážeme, že tento vektor je i ve W . Z definice množiny B máme existenci $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$ takových, že $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{w}_1$ a $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{w}_2$. Chceme $(\mathbf{X} + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w} = \mathbf{X} + \mathbf{w}_2$, což splníme, když zvolíme $\mathbf{w} := \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$. Pak $\mathbf{w} \in W$, protože W je vektorový podprostor. Tedy popisovaná množina je afinní podprostor.

Nyní zbývá ukázat, že každý afinní podprostor B lze vyjádřit tímto způsobem. Stačí vzít libovolný bod $\mathbf{X} \in B$, pak $B = \mathbf{X} + W$, protože platí axiom, že do každého bodu z B se dostaneme přičtením vektoru ze zaměření. $\square$

Definice 3.14. Necht Z je neprázdná množina bodů afinního prostoru A . Afinním obalem množiny Z rozumíme množinu $AO(Z)$ všech afinních kombinací bodů z Z .

Věta 3.15. Pro každou konečnou neprázdnou množinu bodů je $AO(Z)$ afinním podprostorem. Každý afinní podprostor dimenze k lze vyjádřit jako afinní obal $(k+1)$ bodů. Toto vyjádření nazýváme *bodové vyjádření*.

Důkaz. Označme $Z = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_l)$. Pak body $\sum_{i=1}^l c_i \mathbf{B}_i$, kde $\sum_{i=1}^l c_i = 1$, tvoří množinu B všech těchto afinních kombinací, tedy $AO(Z)$. Každou takovou afinní kombinaci můžeme zapsat

$$\underbrace{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\sum_{i=2}^l c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1)}_{\in W},$$

kde lineární kombinace reprezentovaná sumou může být libovolná, c_i už nemusí mít součet 1, a $W = LO\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_l - \mathbf{B}_1)\}$. Tedy $AO(Z)$ lze vyjádřit jako $\mathbf{X} + W$ a dle Věty 3.13 je to afinní podprostor.

Naopak ukážeme, že každý afinní prostor dimenze k se dá vyjádřit jako afinní obal $(k+1)$ bodů. Provedeme stejnou úvahu opačně. Máme afinní prostor $B = \mathbf{X} + W$, označíme bázi W jako $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$. Pak $B = AO\{\underbrace{\mathbf{X}, \mathbf{X} + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{X} + \mathbf{w}_k}_{k+1 \text{ bodů}}\}$. $\square$

Věta 3.16. Mějme soustavu lineárních rovnic s maticí M typu $m \times n$ nad tělesem T a pravou stranou c . Pak její řešení $\{x : Mx = c\}$ tvoří afinní podprostor aritmetického afinního prostoru T^n . Navíc každý afinní podprostor T^n lze vyjádřit tímto způsobem. Toto vyjádření nazýváme *rovníkové vyjádření*.

Důkaz. Z lineární algebry víme, že množina řešení soustavy $Mx = c$ má tvar $x_1 + \ker M$ pro nějaké partikulární řešení x_1 . Dle Věty 3.13 je tedy tato množina afinním podprostorem. Naopak pro každý podprostor tvaru $\mathbf{X} + W$ můžeme nalézt matici M tak, aby $\ker M = W$ a podprostor je potom řešení soustavy $Mx = c$, kde $c = M\mathbf{X}$. $\square$

Příklad 3.17. Uvažujme podprostor afinního prostoru $\mathbb{R}^4$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + LO \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Chceme, aby naše zaměření W bylo jádrem matice M , budeme tedy řešit homogenní soustavu, kde do řádků vložíme bázi prostoru, který máme.

$$W = LO \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Máme dva pivoty, dvě volné proměnné, tedy řešení bude mít dimenzi 2. (Obecně to 2 být nemusí.)

$$\text{Řešení: } LO \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Vektory z báze řešení dáme do řádků matice M .

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ker M = W$$

Ještě určíme pravou stranu c tak, aby $\mathbf{X}$ byl řešením – jen dosadíme.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Získali jsme soustavu $Mx = c$, jejímž řešením je zadaný afinní podprostor, a jde to takto udělat vždy.

Definice 3.18. (Pod)prostor dimenze 0 je *bod*, (pod)prostor dimenze 1 se nazývá *přímka*, (pod)prostor dimenze 2 se nazývá *rovina*, podprostor dimenze $(n - 1)$ v prostoru dimenze n se nazývá *nadrovina*.

Definice 3.19. Necht' A je afinní prostor a $B = \mathbf{X} + U$, $C = \mathbf{Y} + W$ jeho podprostory. Říkáme, že B a C jsou

- *rovnoběžné*, pokud $U \leq W$ nebo $W \leq U$
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a množiny bodů mají neprázdný průnik $B \cap C$.
- *mimoběžné* pokud nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné.

Definice a lemma 3.20. Mějme tři body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}$ na afinní přímce nad tělesem T , přičemž $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ a $\mathbf{X} \neq \mathbf{B}$. Pak definujeme dělicí poměr

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}} := \lambda,$$

jako jediný skalár, pro který platí $\lambda(\mathbf{B} - \mathbf{X}) = (\mathbf{X} - \mathbf{A})$. Potom platí, že $\mathbf{X}$ je afinní kombinací bodů $\mathbf{A}, \mathbf{B}$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\lambda + 1} \mathbf{A} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \mathbf{B}$$

a tedy naopak, jsou-li (c_1, c_2) barycentrické souřadnice $\mathbf{X}$ v soustavě $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, pak

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}} = \frac{c_2}{c_1}. \quad (3)$$

Důkaz. Označme $(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{v}$ a necht' $(\mathbf{X} - \mathbf{A}) = \mu\mathbf{v}$. Potom $(\mathbf{B} - \mathbf{X}) = (1 - \mu)\mathbf{v}$ a tedy $\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}$. Ekvivalentně $\mu = \frac{\lambda}{\lambda+1}$ a máme

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + \frac{\lambda}{\lambda+1}(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \frac{1}{\lambda+1}\mathbf{A} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{B}.$$

Zjevně pak i $\frac{c_2}{c_1} = \lambda$.

Definice 3.21. Mějme afinní prostory A, B se zaměřenými V, W nad stejným tělesem T . Řekneme, že zobrazení $f : A \rightarrow B$ je *afinní*, jestliže zachovává afinní kombinace, tedy jestliže pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k \in A$ a koeficienty $c_1, \dots, c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ platí

$$f\left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i\right) = \sum_{i=1}^k c_i f(\mathbf{B}_i).$$

Afinní zobrazení $f : A \rightarrow A$ z afinního prostoru do sebe nazveme *afinita*, jestliže je bijektivní.

Důsledek 3.22. Afinní zobrazení zachovávají dělicí poměry. Přesněji, jestliže $f(\mathbf{A}) \neq f(\mathbf{B})$, pak

$$\frac{f(\mathbf{A})f(\mathbf{X})}{f(\mathbf{X})f(\mathbf{B})} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{X}}{\mathbf{X}\mathbf{B}}.$$

Důkaz. Protože afinity zachovávají barycentrické souřadnice na přímkách, zachovávají také dělicí poměr, který je s nimi svázán vztahem (3).

Věta 3.23. Zobrazení mezi aritmetickými afinními prostory $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ je afinní právě tehdy když má tvar

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice $n \times m$ a $\mathbf{p}$ je vektor $n \times 1$. V případě $m = n$ je toto zobrazení afinitou právě tehdy, když je matice $\mathbf{A}$ regulární. Lineární zobrazení dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme *asociovaný homomorfismus*.

Důkaz. Máli $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ má tvar

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p},$$

pak pro každou afinní kombinaci z $\mathbb{T}^m$ platí

$$f\left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i\right) = \mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i\right) + \mathbf{p} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{A} \mathbf{B}_i + \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{p} = \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{A} \mathbf{B}_i + \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k c_i f(\mathbf{B}_i),$$

a tedy f je afinní.

Jestliže naopak f je afinní, pak každý bod je afinní kombinací bodů $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$ v $\mathbb{T}^m$. Platí tedy

$$f\left((c_1, c_2, \dots, c_m)^T\right) = f\left(\sum_{i=1}^m c_i \mathbf{E}_i + \left(1 - \sum_{i=1}^m c_i\right) \mathbf{O}\right) = \mathbf{A}(c_1, c_2, \dots, c_m)^T + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a $\mathbf{A} = (f(\mathbf{E}_1) - f(\mathbf{O}) | f(\mathbf{E}_2) - f(\mathbf{O}) | \dots | f(\mathbf{E}_m) - f(\mathbf{O}))$.

Afinní zobrazení je bijekcí právě tehdy když je odpovídající lineární zobrazení bijekcí. To nastane právě tehdy, když je matice $\mathbf{A}$ čtvercová a regulární.

Důsledek 3.24. Afinity z $\mathbb{R}^n$ do sebe vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{A}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{q}$$

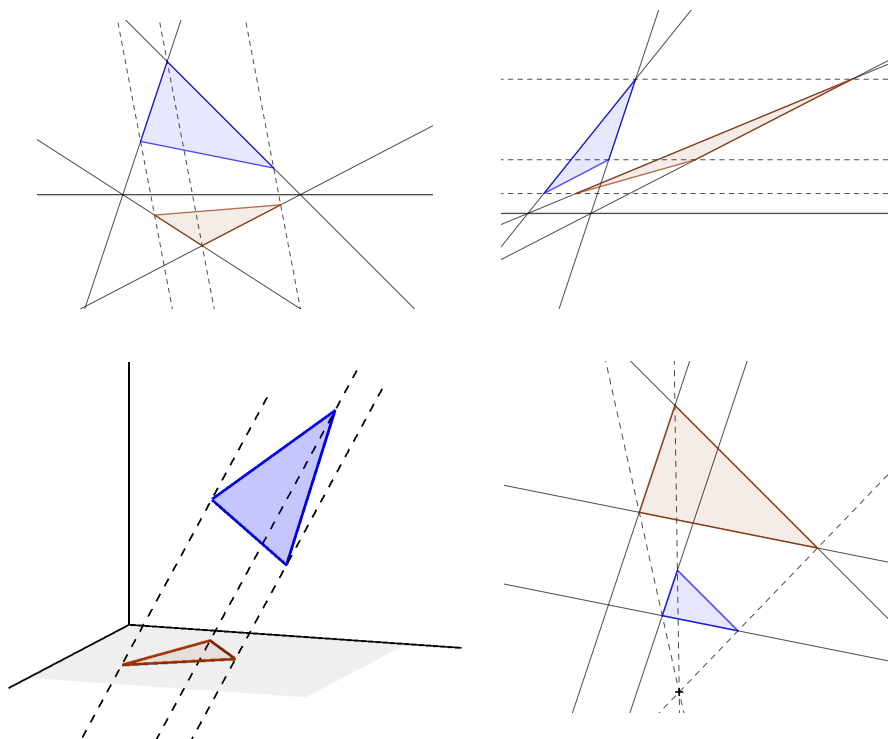
pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Všechny shodnosti popsané v Důsledku 1.5 jsou i afinitami, $\mathbb{E}(n)$ je tedy podgrupou $\mathbb{A}(n)$. Rovněž afinní grupu můžeme vnořit do maticové grupy způsobem popsaným ve Větě 1.7.

Důsledek 3.25. Afinní zobrazení $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ je jednoznačně dána obrazy $m + 1$ bodů v obecné poloze. Speciálně zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno obrazem 3 bodů, které neleží na jedné afinní přímce.

Poznámka 3.26. I afinity $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je možno klasifikovat podobně jako shodnosti, tříd bude ovšem větší počet, protože máme více stupňů volnosti (stačí aby matice byla regulární, nemusí být ortonormální). Kromě shodností jsou významnými příklady afinit stejnoolehlosti (matice je násobkem jednotkové), podobnosti (matice je násobkem ortonormální), osové afinity (existuje celá přímka samodružných bodů). Důležitým příkladem neprostého afinního zobrazení jsou projekce.



Definice 3.27. Pro trojúhelník ABC v $\mathbb{R}^2$ definujeme jeho orientovaný obsah jako

$$S_{ABC} := \frac{1}{2} \det(B - A | C - A).$$

Věta 3.28. Je-li f afinita v $\mathbb{R}^2$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, pak

$$S_{f(A)f(B)f(C)} = (\det \mathbf{A}) S_{ABC}.$$

Afinity v rovině tedy zachovávají poměry obsahů.

Důkaz. Je-li f afinita s maticí tvaru $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, pak je A maticí asociovaného homomorfismu. A je regulární. f zobrazí vektory $B - A$ a $C - A$ na $\mathbf{A}(B - A)$ a $\mathbf{A}(C - A)$. Pro orientovaný obsah zobrazeného trojúhelníku tedy platí

$$\begin{aligned} S_{f(A)f(B)f(C)} &= \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}(B - A) | \mathbf{A}(C - A)) \\ &= \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}(B - A | C - A)) \\ &= \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}) \det(B - A | C - A) \\ &= \det(\mathbf{A}) \frac{1}{2} \det(B - A | C - A) \\ &= \det(\mathbf{A}) S_{ABC}. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána.

Věta 3.29. Nechť $Z = (A, B, C)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic v $\mathbb{R}^2$ a P, Q, R jsou libovolné body $\mathbb{R}^2$. Pak platí

1. Body P, Q, R leží na přímce právě tehdy když $\det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z) = 0$.
2. Obecněji platí $S_{PQR} = \det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z) S_{ABC}$.

Důkaz. Obsah trojúhelníku PQR je roven $S_{PQR} = \frac{1}{2} \det(Q - P | R - P)$ a toto číslo je nulové, právě tehdy když body P, Q, R leží na přímce a trojúhelník je degenerovaný.

Označme barycentrické souřadnice

$$[P]_Z = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, [Q]_Z = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, [R]_Z = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Vyjádříme si determinant ze znění věty a upravíme pomocí řádkových a sloupcových úprav.

$$\det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z) = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} p_1 + p_2 + p_3 & q_1 + q_2 + q_3 & r_3 + r_2 + r_3 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ p_3 & q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

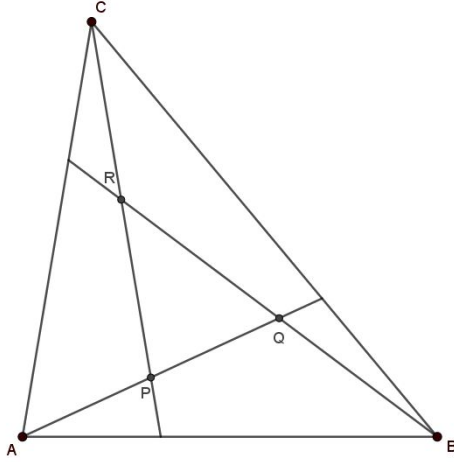
Zároveň

$$\begin{aligned}
P &= A + p_2(B - A) + p_3(C - A), \\
Q &= A + q_2(B - A) + q_3(C - A), \\
R &= A + r_2(B - A) + r_3(C - A),
\end{aligned}$$

a tedy

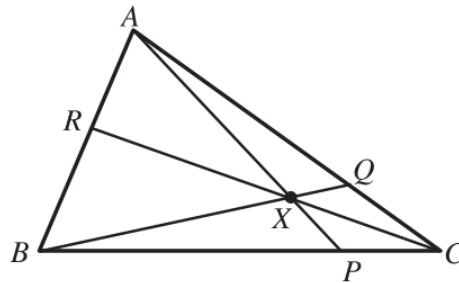
$$\begin{aligned}
S_{PQR} &= \frac{1}{2} \det(Q - P | R - P) = \\
&= \frac{1}{2} \det[(q_2 - p_2)(B - A) + (q_3 - p_3)(C - A) | (r_2 - p_2)(B - A) + (r_3 - p_3)(C - A)] = \\
&= \frac{1}{2} \det \left[(B - A | C - A) \begin{pmatrix} q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{2} \det(B - A | C - A) \det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z), \\
&= S_{ABC} \det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z).
\end{aligned}$$

Příklad 3.30. V libovolném trojúhelníku ABC veďme z každého vrcholu spojnic do (vhodné) třetiny protilehlé strany. Průsečíky těchto spojníc označme P , Q , R . Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR je jedna sedmina obsahu ABC .

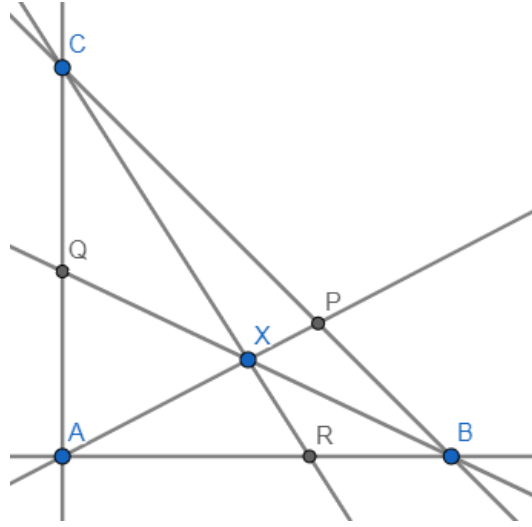


Věta 3.31 (Cevaova věta). Mějme trojúhelník ABC a bod X , který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Předpokládejme, že existují průsečíky $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Pak platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$



Důkaz. Protože víme, že afinní zobrazení zachovává dělicí poměry, můžeme říci, že hodnota dělicích poměrů ve znění věty se nezmění, pokud trojúhelník zobrazíme afinním zobrazením na $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$ a $C = [0, 1]$. Bude nám stačit dokázat tvrzení pro tento trojúhelník.



Označíme si souřadnice $X = [x, y]$. Nyní můžeme dopočítat souřadnice bodů P , Q a R .

P je průsečíkem přímk AX a BC . Platí tedy $P = [\alpha x, \alpha y]$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\alpha x + \alpha y = 1$, tedy $\alpha = \frac{1}{x+y}$ a

$$P = \left[\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y} \right].$$

R je průsečíkem CX a $y = 0$. Přímk CX dokážeme vyjádřit jako $[0, 1] + t(x, y - 1)$. Dosazením $t = \frac{1}{1-y}$ získáváme

$$R = \left[\frac{x}{1-y}, 0 \right].$$

Stejným způsobem dostaneme

$$Q = \left[0, \frac{y}{1-x} \right].$$

V tuto chvíli jsme schopni dopočítat dělicí poměry.

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\frac{x}{1-y}}{1 - \frac{x}{1-y}} = \frac{\frac{x}{1-y}}{\frac{1-y-x}{1-y}} = \frac{x}{1-y-x}.$$

Protože se dělicí poměr zachovává i když ho počítáme jen pro jednu ze souřadnic, můžeme si vybrat, kterou do výpočtu dosadíme. Tentokrát budeme počítat pouze s první souřadnicí.

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\frac{x}{x+y} - 1}{0 - \frac{x}{x+y}} = \frac{x - x - y}{-x} = \frac{y}{x}$$

V posledním případě budeme počítat podle druhé souřadnice, protože první souřadnice je nulová.

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\frac{y}{1-x} - 1}{0 - \frac{y}{1-x}} = \frac{y - 1 + x}{-y}$$

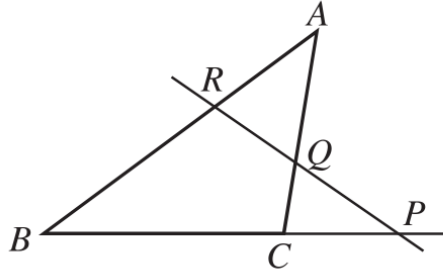
Po dosazení získáváme

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{x}{1-y-x} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{y+x-1}{-y} = 1.$$

Tím je důkaz dokončen.

Věta 3.32 (Menelaova věta). Mějme trojúhelník ABC a přímku p , která neprochází žádným z vrcholů a není rovnoběžná se žádnou se stran. Označme si $P = p \cap BC$, $Q = p \cap CA$ a $R = p \cap AB$. Pak platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$



Důkaz. Označme si dělicí poměry ve znění věty $\frac{AR}{RB} = \lambda_r$, $\frac{BP}{PC} = \lambda_p$ a $\frac{CQ}{QA} = \lambda_q$. Chceme vyjádřit body R , P a Q vzhledem k soustavě souřadnic $Z = (A, B, C)$. Z definice dělicího poměru plyne

$$R = \frac{1}{\lambda_r + 1}A + \frac{\lambda_r}{\lambda_r + 1}B$$

$$P = \frac{1}{\lambda_p + 1}B + \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 1}C$$

$$Q = \frac{1}{\lambda_q + 1}C + \frac{\lambda_q}{\lambda_q + 1}A$$

Z Věty 3.29 víme, že body P , Q , R leží na přímce právě tehdy když $\det([R]_Z|[P]_Z|[Q]_Z) = 0$. Vyjádříme si tedy tento determinant.

$$\begin{aligned} 0 = \det([R]_Z|[P]_Z|[Q]_Z) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_r+1} & \frac{\lambda_r}{\lambda_r+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_p+1} & \frac{\lambda_p}{\lambda_p+1} \\ \frac{\lambda_q}{\lambda_q+1} & 0 & \frac{1}{\lambda_q+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_r+1} \cdot \frac{1}{\lambda_p+1} \cdot \frac{1}{\lambda_q+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_r & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_p \\ \lambda_q & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(\lambda_r+1)(\lambda_p+1)(\lambda_q+1)} \cdot (1 + \lambda_r\lambda_p\lambda_q) \end{aligned}$$

Víme, že

$$\frac{1}{(\lambda_r+1)(\lambda_p+1)(\lambda_q+1)} \neq 0,$$

proto musí platit

$$1 + \lambda_r\lambda_p\lambda_q = 0$$

$$-1 = \lambda_r\lambda_p\lambda_q = \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA}.$$

4 Projektivní geometrie

Definice 4.1. Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $n+1$ nad tělesem T . Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V nazveme *projektivním prostorem dimenze n* nad tělesem T a označujeme ho $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nebo zkráceně jen $\mathbb{P}^n$:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1}) = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Prvky této množiny nazýváme *projektivními body* a odpovídající vektory $\mathbf{v}$ jejich *vektorovými zástupci*. Zjevně, jestliže $\mathbf{v}$ je vektorovým zástupcem X , pak pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ je i $\lambda \mathbf{v}$ vektorovým zástupcem X .

Definice 4.2. Mějme vektorový prostor V dimenze $n+1$ nad tělesem T a odpovídající projektivní prostor $\mathbb{P}^n$. Libovolnou bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ nazveme *soustavou projektivních souřadnic* prostoru $\mathbb{P}^n$. Souřadnicemi bodu $X \in \mathbb{P}^n$ pak rozumíme uspořádanou $n+1$ -tici skalárů $(c_1, \dots, c_{n+1})$ takovou, že

$$X = LO \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{v}_i \right\}.$$

Tyto souřadnice jsou dány až na násobek, protože pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(c_1, \dots, c_{n+1})$ a $(\lambda c_1, \dots, \lambda c_{n+1})$ určují stejný projektivní bod X . Proto se těmito souřadnicím někdy říká *homogenní* a zjevně vždy alespoň jedno c_i musí být nenulové. Konečně pro libovolné $0 \neq \mu \in T$ zjevně báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ a $(\mu \mathbf{v}_1, \dots, \mu \mathbf{v}_{n+1})$ určují stejný systém projektivních souřadnic.

Definice 4.3. Podmnožinu projektivního prostoru $M \subset \mathbb{P}^n$ nazveme *projektivním podprostorem dimenze k* , jestliže existuje vektorový podprostor $W \leq V^{n+1}$ dimenze $k+1$ tak, že

$$M = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in W, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Projektivní (pod)prostor dimenze 0 nazýváme bod, (pod)prostor dimenze 1 přímka, (pod)prostor dimenze 2 rovina a podprostor maximální dimenze $n-1$ nadrovina.

Definice 4.4. Jestliže $\mathbb{P}(V^{k+1})$ je podprostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ a $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k+1})$ nějaká báze V^{k+1} , pak lze každý bod $X \in \mathbb{P}(V^{k+1})$ vyjádřit jako

$$X = LO \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} t_i \mathbf{w}_i \right\}.$$

Tomuto vyjádření říkáme *parametrické vyjádření podprostoru*. Pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(t_1, \dots, t_{k+1})$ a $(\lambda t_1, \dots, \lambda t_{k+1})$ určují stejný projektivní bod X .

Definice 4.5. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T . Každá nadrovina $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ může být popsána pomocí nenulové lineární formy $\ell \in V_*^{n+1}$, která je prvkem duálního prostoru :

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \ell(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Toto vyjádření nazýváme *rovníkové vyjádření nadroviny*. Navíc, pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ popisuje $\lambda \ell$ tutéž nadrovinu. Souřadnice lineární formy označujeme jako řádky s hvězdičkou.

Příklad 4.6 (Výpočty v projektivní rovině.). V projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka a každé dvě různé přímky se protnou v jednom bodě. Mějme zadány body $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, -1)$, $C(0, 1, 1)$, $D(5, 2, 1)$. Určete bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.

Definice a lemma 4.7. Mějme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem T čtyři navzájem různé body A, B, C, D , které leží na jedné projektivní přímce. Nechtě $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a nechtě platí

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Pak definujeme *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) := \frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} \equiv \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T,$$

kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže $(A, B, C, D) = -1$, řekneme, že uspořádaná čtveřice bodů tvoří *harmonickou čtveřici*.

Důkaz. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou nenulové (každý je zástupcem projektivního bodu, tedy generuje jednodimenzionální podprostor), žádný není násobkem jiného (projektivní body jsou různé) a leží v dvoudimenzionálním prostoru (body leží na projektivní přímce). Libovolné dva z nich tedy tvoří bázi onoho dvoudimenzionálního prostoru.

Navíc uvedený zlomek definující dvojpoměr nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže namísto vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ zvolíme jako jiné zástupce jejich násobky

$$\tilde{\mathbf{a}} = \lambda_a \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \lambda_b \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \lambda_c \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \lambda_d \mathbf{d},$$

pak platí

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{c}} &= \underbrace{\frac{\lambda_c}{\lambda_a} \alpha_1}_{\tilde{\alpha}_1} \tilde{\mathbf{a}} + \underbrace{\frac{\lambda_c}{\lambda_b} \beta_1}_{\tilde{\beta}_1} \tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{d}} &= \underbrace{\frac{\lambda_d}{\lambda_a} \alpha_2}_{\tilde{\alpha}_2} \tilde{\mathbf{a}} + \underbrace{\frac{\lambda_d}{\lambda_b} \beta_2}_{\tilde{\beta}_2} \tilde{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_1}{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2} = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}.$$

Poznámka 4.8. Pro permutace pořadí bodů platí rovnosti

$$(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1}$$

$$(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - (A, B, C, D)$$

Obecně tedy pro 24 permutací získáváme až 6 hodnot dvojpoměru $k, 1 - k, k^{-1}, 1 - k^{-1}, (1 - k)^{-1}, 1 - (1 - k)^{-1}$. Pro harmonickou čtveřici jen tři: $-1, 2, \frac{1}{2}$.

Definice 4.9. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(V^{m+1})$ nad tělesem T . O zobrazení

$$F : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^m$$

řekneme, že je projektivní transformací, jestliže existuje lineární isomorfismus $\bar{F} : V^{m+1} \rightarrow V^{m+1}$ tak, že pro každé nenulové $\mathbf{v} \in V^{m+1}$ platí

$$F(LO\{\mathbf{v}\}) = LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\}.$$

Projektivní transformace jsou zjevně bijektivní a tvoří grupu (tak zvaná projektivní grupa).

Věta 4.10. Projektivní transformace zachovávají dvojpoměr. Jestliže je tedy F projektivní transformace, pak

$$(A, B, C, D) = (F(A), F(B), F(C), F(D)).$$

Důkaz. Nechť $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou vektoroví reprezentanti bodů A, B, C, D a dále nechť

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{c}) &= \bar{F}(\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}) = \alpha_1 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_1 \bar{F}(\mathbf{b}) \\ \bar{F}(\mathbf{d}) &= \bar{F}(\alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}) = \alpha_2 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_2 \bar{F}(\mathbf{b}), \end{aligned}$$

kde $\bar{F}$ je lineární zobrazení příslušné F . Vektory $\bar{F}(\mathbf{a}), \bar{F}(\mathbf{b}), \bar{F}(\mathbf{c})$ a $\bar{F}(\mathbf{d})$ reprezentují body $F(A), F(B), F(C)$ a $F(D)$. Vidíme, že F zachovává koeficienty lineární kombinace, a proto se dvojpoměr nezmění. $\square$

Věta 4.11. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n + 2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n + 1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že

$$\begin{aligned} X_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ X_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ X_n &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ X_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 1) \\ X_{n+2} &= (1, 1, \dots, 1, 1). \end{aligned}$$

Důkaz. Body $X_1, \dots, X_{n+1}$ lze vyjádřit jako $X_1 = LO\{\mathbf{v}_1\}, X_2 = LO\{\mathbf{v}_2\}, \dots, X_{n+1} = LO\{\mathbf{v}_{n+1}\}$, kde $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1} \in V^{n+1}$ jsou lineárně nezávislé vektory. Označme $B_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ bázi prostoru V^{n+1} . Souřadnice bodu X_i vzhledem k soustavě projektivních souřadnic C prostoru $\mathbb{P}^n$ budeme značit $[X_i]_C$. Pak máme

$$\begin{aligned} [X_1]_{B_1} &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_1} &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 0, 1). \end{aligned}$$

Uvažujme $[X_{n+2}]_{B_1} = (c_1, \dots, c_{n+1})$. Všechna čísla c_i jsou nenulová, jinak by totiž X_{n+2} ležel v nějaké nadrovině společně s n body X_i , a to je spor s předpoklady věty. Položme $B_2 = (c_1\mathbf{v}_1, c_2\mathbf{v}_2, \dots, c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1})$ projektivní soustavu souřadnic. Pak ale můžeme zapsat

$$\begin{aligned} [X_1]_{B_2} &= (c_1^{-1}, 0, \dots, 0, 0) = (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_2} &= (0, c_2^{-1}, \dots, 0, 0) = (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_2} &= (0, 0, \dots, c_n^{-1}, 0) = (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_2} &= (0, 0, \dots, 0, c_{n+1}^{-1}) = (0, 0, \dots, 0, 1) \\ [X_{n+2}]_{B_2} &= (1, 1, \dots, 1, 1), \end{aligned}$$

jelikož souřadnice bodu projektivního prostoru vynásobené nenulovou konstantou určují stejný bod. $\square$

Důsledek 4.12. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině, a také $n+2$ bodů $Y_1, \dots, Y_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje právě jedno projektivní zobrazení $F : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, pro které platí

$$F(X_i) = Y_i, \quad i = 1, \dots, n+2$$

Důkaz. Nechtě $X_i = LO\{\mathbf{x}_i\}$ a $Y_i = LO\{\mathbf{y}_i\}$. V duchu důkazu Věty (4.11) nalezneme jednoznačně (až na případný společný stejný násobek) skaláry c_i tak, aby lineární zobrazení dané jednoznačně předpisem $\bar{F}(\mathbf{x}_i) = c_i\mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, n+1$ splnilo i $\bar{F}(\mathbf{x}_{n+2}) = \mathbf{y}_{n+2}$.

Věta 4.13 (Pappova věta). V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme dvě přímky p , q , které se protínají v bodě S . Na přímce p mějme body P_1, P_2, P_3 různé navzájem a různé od S . Podobně na přímce q mějme body Q_1, Q_2, Q_3 různé navzájem a různé od S . Pak platí, že body

$$X := \overrightarrow{P_1Q_2} \cap \overrightarrow{P_2Q_1}, \quad Y := \overrightarrow{P_1Q_3} \cap \overrightarrow{P_3Q_1}, \quad Z := \overrightarrow{P_2Q_3} \cap \overrightarrow{P_3Q_2}$$

leží na přímce.



Definice 4.14. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a kvadratickou formu q na V^{n+1} . Neprázdnou množinu

$$Q = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, q(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\} \subset \mathbb{P}(V^{n+1})$$

nazveme projektivní kvadrikou. Tuto kvadriku nazýváme *regulární*, jestliže je forma q regulární, tedy má hodnotu $n + 1$. Kvadriky v projektivní rovině nazýváme též kuželosečky.

Definice 4.15. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm kvadriku Q danou kvadratickou formou q a nechť b je příslušná symetrická bilineární forma, tedy $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Řekneme, že dva body $X = LO(\mathbf{v})$, $Y = LO(\mathbf{w})$ jsou *polárně sdružené*, jestliže $b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

Definice a lemma 4.16 (O polaritě). Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm regulární kvadriku Q . Pak

1. Body sdružené s libovolným bodem $X \in \mathbb{P}(V^{n+1})$ tvoří nadrovinu, kterou nazveme *polára* k X a označíme p_X .
2. Naopak každá nadrovina je polárou k právě jednomu bodu, který se nazývá jejím *pólem*.
3. Pro libovolné dva body X, Y platí

$$X \in p_Y \Leftrightarrow Y \in p_X.$$

4. Bod je X sdružen sám se sebou (neboli leží na své poláře p_X) právě tehdy, když leží na Q .

$$X \in p_X \Leftrightarrow X \in Q.$$

V tomto případě p_X nazýváme tečnou nadrovinou ke Q v bodě X .

Důkaz. Zvolme pevně bázi prostoru V^{n+1} a označme B matici odpovídající symetrické bilineární formy vzhledem k této bázi.

1. Pro libovolné $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ hledejme polárně sdružené body. Bod $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ je polárně sdružen s X právě tehdy když

$$\underbrace{X^T B}_{p_X} Y = 0.$$

Avšak $X^T B \neq 0$ je nenulový řádek (B je regulární) a tedy získáváme jednu lineární podmínku na Y danou jako nulování lineární formy $p_X = X^T B$. Tyto body tedy tvoří nadrovinu.

2. Mějme naopak nějakou nadrovinu popsanou jako jádro formy $p = (p_1, \dots, p_{n+1})^*$. Pak díky regularitě B existuje právě jedno X takové, že $p = X^T B$.

3. Triviálně plyne ze symetrie B , protože

$$X^T B Y = 0 \Leftrightarrow Y^T B X = 0.$$

4. Bod X je z definice sdružen sám se sebou právě tehdy když $X^T B X = 0$, což přesně znamená, že $X \in Q$.

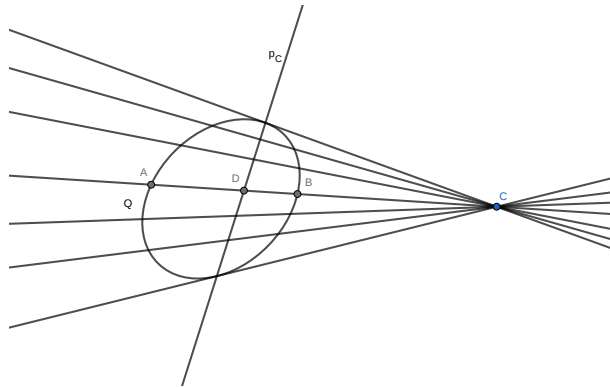
Lemma 4.17 (Vysvětlení definice tečny). Nechť Q je regulární projektivní kuželosečka v projektivní rovině $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ a $X \in Q$ její bod. Pak tečna p_X má s Q v bodě X dvojnásobný průsečík a žádný jiný průsečík s kuželosečkou nemá.

Důkaz. Nechť b je příslušná bilineární forma a $\mathbf{x}$ vektorový zástupce bodu X a $Y = LO\{\mathbf{y}\}$ libovolný jiný bod na tečně p_X . Tečna je tedy parametrizována jako $s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$. Tuto parametrizaci dosadíme do kvadriky, položíme nule a upravíme

$$b(s\mathbf{x} + t\mathbf{y}, s\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = s^2 \underbrace{b(\mathbf{x}, \mathbf{x})}_{=0} + 2st \underbrace{b(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{=0} + t^2 b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = t^2 b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0.$$

Kdyby $b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, pak je celá přímka podmnožinou kuželosečky, což je ve sporu s její regularitou. Vidíme tedy, že $t = 0$, které odpovídá bodu X je jediným a dvojnásobným průsečíkem kuželosečky a tečny p_X .

Věta 4.18. V projektivní rovině $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme regulární kuželosečku Q . Nechť přímka p protíná Q ve dvou různých bodech A, B . Nechť $C \in p$ různé od A, B a nechť $D \in p$ je polárně sdružen s C . Pak $(A, B, C, D) = -1$, tedy tvoří harmonickou čtveřici a v důsledku to také platí permutace (A, B, D, C) , (B, A, C, D) , (B, A, D, C) .



Důkaz. Nechť b je příslušná bilineární forma a $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, vektorové zástupce odpovídajících bodů. Pak platí $b(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = b(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$, protože body A, B leží na kuželosečce a rovněž $b(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0$, protože C, D jsou polárně sdružené. Vyjádřeme si lineární kombinace

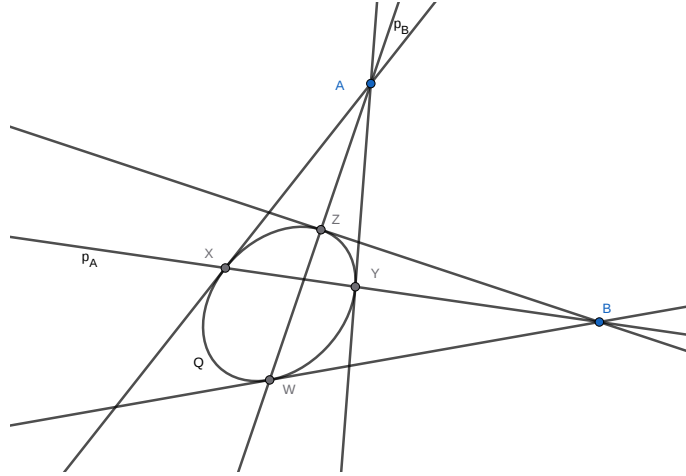
$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

a můžeme psát

$$\begin{aligned} 0 &= b(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = b(\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}, \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}) = \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \underbrace{b(\mathbf{a}, \mathbf{a})}_{=0} + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) \underbrace{b(\mathbf{a}, \mathbf{b})}_{\neq 0} + \beta_1 \beta_2 \underbrace{b(\mathbf{b}, \mathbf{b})}_{=0}. \end{aligned}$$

Nenulovost $b(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ přitom plyne z Lemmatu 4.17. Musí se tedy $\alpha_1 \beta_2 = -\beta_1 \alpha_2$ a proto $(A, B, C, B) = \frac{\beta_1 \alpha_2}{\alpha_1 \beta_2} = -1$ a body tvoří harmonickou čtveřici. Výsledek pro permutace plyne z Poznámky 4.8.

Věta 4.19. V projektivní rovině $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme regulární kuželosečku Q . Nechť přímka p_A protíná Q ve dvou různých bodech X, Y a nechť ji jiná římka p_B protíná Q ve dvou různých bodech W, Z . Nechť A je pólem přímky p_A a nechť B je pólem přímky p_B . Pak přímky AX, AY, BW, BZ jsou tečny ke Q a bod $p_A \cap p_B$ je pólem přímky AB . Navíc platí $A \in p_B$ právě tehdy když $B \in p_A$.



Důkaz. Všechna tvrzení plynou z 4.16, bod 3. Bod X leží na poláře p_A a proto jeho polára p_X (která je tečnou v X) prochází bodem A . Stejný argument platí pro ostatní tři tečny. Polára k $p_A \cap p_B$ (který leží na obou přímkách p_A, p_B) prochází oběma body A, B . Podle tohoto výsledku je také $A \in p_B \Leftrightarrow B \in p_A$.

Věta 4.20. Každá regulární kuželosečka v reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je projektivní transformací kuželosečky dané rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Každá regulární kvadrika v reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je projektivní transformací právě jedné z kvadrik

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0 && \text{(nepřímková kvadrika)} \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0 && \text{(přímková kvadrika).} \end{aligned}$$

Důkaz. Mějme nějakou regulární kvadriku Q v $\mathbb{P}^2$ danou kvadratickou formou q a odpovídající symetrická bilineární forma b má matici B . Jelikož nenulový násobek určuje stejnou formu, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice B má signaturu $(0, 3, 0)$, nebo $(0, 2, 1)$. Nulita musí být 0, jinak B nemůže být regulární matice. Příklad $(0, 3, 0)$ však není možný, protože to určuje pozitivně definitní formu, takže kvadrika Q by byla prázdná. B má tedy signaturu $(0, 2, 1)$. Existuje proto matice P taková, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^T B P$$

Takovou matici P získáme metodou symetrických úprav. Označme K kvadriku

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}.$$

Bod $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^2$ náleží K právě když

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ x_3) P^T B P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Z toho ale plyne, že $PX \in Q$. Dostáváme ekvivalenci $X \in K \Leftrightarrow PX \in Q$. Matice P je regulární a určuje tedy projektivní transformaci. Kuželosečku Q tak dostaneme zobrazením bodů na K pomocí matice P .

Důkaz pro kvadriky v $\mathbb{P}^3$ je zcela obdobný s tím, že dvě přípustné signatury jsou $(0, 3, 1)$ a $(0, 2, 2)$. $\square$

5 Projektivní rozšíření afinního prostoru

Definice 5.1. Pro libovolné těleso zobrazení $\Phi : T^n \rightarrow \mathbb{P}(T^{n+1})$ dané předpisem

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = LO\{(x_1, \dots, x_n, 1)\}$$

nazývá se *kanonické vnoření* aritmetického afinního prostoru do aritmetického projektivního prostoru stejné dimenze. $\mathbb{P}(T^{n+1})$ se pak nazývá kanonickým projektivním rozšířením nebo též zúplněním afinního prostoru T^n .

Definice a lemma 5.2. Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n , pak $\mathbb{P}^n = \Phi(T^n) \cup \mathbb{P}^{n-1}$, kde $\mathbb{P}^{n-1}$ je nadrovina s homogenní rovnicí $x_{n+1} = 0$, tedy se souřadnicemi $(0, \dots, 0, 1)^*$. Tato nadrovina se nazývá nevlastní nadrovina, označuje se p_∞ a její body se nazývají nevlastní body.

Jestliže $A \subset T^n$ je afinní podprostor dimenze k pak je jeho obraz $\Phi(A)$ obsažen právě v jednom projektivním podprostoru $\mathbb{A} \subset \mathbb{P}^n$ dimenze k . O $\mathbb{A}$ hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění podprostoru A a o A hovoříme jako o afinní verzi $\mathbb{A}$. Nevlastní body $\mathbb{A}$ považujeme i za nevlastní body A .

Důkaz. Nejprve se ujistíme, že kanonické vnoření Φ je skutečně prosté. Opravdu,

$$LO\{(x_1, \dots, x_n, 1)\} = LO\{(y_1, \dots, y_n, 1)\}$$

pouze v případě, že $(x_1, \dots, x_n, 1) = (y_1, \dots, y_n, 1)$. V $\text{Im}\Phi$ jsou právě projektivní body, které mají poslední složku nenulovou, protože v tom případě máme

$$\Phi^{-1}(LO\{(z_1, \dots, z_n, z_{n+1})\}) = \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}} \right).$$

Projektivní body, které mají poslední složku nulovou tvoří nevlastní nadrovinu a tedy dostáváme $\mathbb{P}^n = \Phi(T^n) \cup \mathbb{P}^{n-1}$.

Nyní uvažujme libovolný afinní podprostor $A \subset T^n$ dimenze k , který podle Věty 3.13 můžeme psát ve tvaru $A = X + W$, kde $X = (x_1, \dots, x_n)$ je bod a W je vektorový podprostor T^n dimenze k . V obrazu $\Phi(A)$ jsou právě projektivní body tvaru $LO\{(x_1 + w_1, \dots, x_n + w_n, 1)\}$, kde $(w_1, \dots, w_n) \in W$. Tyto směry leží právě v jednom $k + 1$ dimenzionálním prostoru $V^{k+1} = LO\{(x_1, \dots, x_n, 1), W\}$, který zároveň generují. Projektivní prostor $\mathbb{A} = \mathbb{P}(V^{k+1})$ dimenze k je projektivním rozšířením A . Jeho nevlastní body tvoří projektivní podprostor $\mathbb{P}(W)$ dimenze $k - 1$.

Věta 5.3. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ má každá afinní přímka p v $\mathbb{R}^2$ se směrovým vektorem $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ právě jeden nevlastní bod $(v_x, v_y, 0)$. Tento bod budeme rovněž nazývat *směr* p .

Důkaz. Důkaz plyne z 5.1, kde se využívá parametrické vyjádření afinního podprostoru A (v tomto případě přímky, tedy $A = p$). Ukážeme si však, že stejný výsledek nám vyjde i z rovnicového vyjádření.

Přímka p má normálový vektor $(-v_y, v_x)$ a tedy afinní rovnicové vyjádření $-v_yx + v_xy + c = 0$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Vyjádření jejího projektivního rozšíření získáme dosazením $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ a přenásobením celé rovnice x_3 . Dostáváme $-v_yx_1 + v_xx_2 + cx_3$ a toto rozšíření má tedy duální souřadnice $(-v_y, v_x, c)^*$. Nevlastní přímka má duální souřadnice $p_\infty = (0, 0, 1)^*$, a nevlastní bod najdeme jako $p \cap p_\infty$ vypočteme jako $(v_x, v_y, 0)$. $\square$

Poznámka 5.4. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ se všechny rovnoběžky protínají v jednom nevlastním bodě - ve svém směru. Přitom všechny nevlastní body leží na (projektivní) přímce $(0, 0, 1)^*$. Reálnou projektivní rovinu $\mathbb{P}^2$ je tedy možno chápat jako $\mathbb{R}^2$, ke kterému se přidá jeden bod v každém směru. Přitom ale po tomto přidání vznikne dokonale symetrická (projektivní) geometrie. Mnoho různých afinních problémů je možno převést na stejný projektivní problém - např. afinní verze Pappovy věty.

Příklad 5.5 (Počítání v afinní a projektivní rovině). Uvažujme afinní rovinu $\mathbb{R}^2$ s kanonickými afinními souřadnicemi $[x, y]$ a její kanonické projektivní rozšíření $\mathbb{P}^2$ s kanonickými homogenními souřadnicemi (x_1, x_2, x_3) .

1. Nalezněte projektivní bod, který odpovídá afinnímu bodu $A = [3, -1]$, přesněji tedy nalezněte $\Phi(A)$.

2. Nalezněte afinní bod, který odpovídá projektivnímu bodu $B = (-6, 9, 3)$, přesněji tedy nalezněte $\Phi^{-1}(B)$.
3. Nalezněte projektivní rozšíření afinní přímky $2x + 3y + 4 = 0$ a určete všechny její nevlastní body.
4. Nalezněte afinní verzi přímky s duálními souřadnicemi $(2, -1, 5)^*$.
5. Rozhodněte, zda-li afinní body $A = [1, 2]$, $B[4, -4]$ a $C[3, -2]$ leží na přímce. Určete obecnou rovnici této přímky.
6. Nalezněte bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, kde A, B jsou jako v předchozím bodě a $D = [3, 5]$, $E = [1, 7]$.

Věta 5.6. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme různé body A, B, C, D ležící na jedné přímce. Pak pro dvojpoměry a dělicí poměry platí

1. Jestliže jsou všechny tyto body vlastní, pak

$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}.$$

2. Jestliže D je nevlastní, pak

$$(A, B, C, D) = -\frac{AC}{CB}.$$

3. Speciálně, pokud je (A, B, C, D) harmonická čtveřice a bod D je nevlastní, pak C je středem AB .

Důkaz. 1. Uvažujme následující vlastní body a jejich projektivní verze bereme zároveň jako jejich vektorové zástupce:

$$\begin{aligned} A &= [a_x, a_y] \sim (a_x, a_y, 1) =: \mathbf{a} \\ B &= [b_x, b_y] \sim (b_x, b_y, 1) =: \mathbf{b} \\ C &= [c_x, c_y] \sim (c_x, c_y, 1) =: \mathbf{c} \\ D &= [d_x, d_y] \sim (d_x, d_y, 1) =: \mathbf{d} \end{aligned}$$

Všechny tyto body leží na jedné přímce, zvolíme tedy barycentrickou soustavu této přímky jako (A, B) a vyjádříme $C = c_1 A + c_2 B$, $D = d_1 A + d_2 B$ pomocí barycentrických souřadnic (c_1, c_2) a (d_1, d_2) . Z 3.27 plyne

$$\frac{AC}{CB} = \frac{c_2}{c_1} \text{ a } \frac{AD}{DB} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Všimneme si také, že

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= d_1 \mathbf{a} + d_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

To platí protože

$$\mathbf{c} = c_1 \mathbf{a} + c_2 \mathbf{b} = (c_1 a_x + c_2 b_x, c_1 a_y + c_2 b_y, c_1 + c_2) = (c_1 a_x + c_2 b_x, c_1 a_y + c_2 b_y, 1)$$

Stejně to platí i pro $\mathbf{d}$. Můžeme tedy spočítat dvojpoměr jako

$$(A, B, C, D) = \frac{d_1 c_2}{d_2 c_1} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA} = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}.$$

2. Bod D je nevlastním bodem přímky $\overleftrightarrow{AB}$ a tedy se podle Věty 5.3 spočítá jako $D = (b_x - a_x, b_y - a_y, 0)$. Pak je zřejmé, že $\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$, což dává dvojpoměr

$$(A, B, C, D) = \frac{d_1 c_2}{d_2 c_1} = \frac{(-1) \cdot c_2}{1 \cdot c_1} = -\frac{c_2}{c_1} = -\frac{AC}{CB}.$$

3. Je-li (A, B, C, D) harmonická čtveřice a D nevlastní bod, pak

$$(A, B, C, D) = -1 = -\frac{AC}{CB}.$$

To plyne z bodu 2 části tvrzení. Pak ale $\frac{AC}{CB} = 1$, neboli C je středem úsečky AB . $\square$

Věta 5.7. Uvažujme kanonicky projektivně rozšířený afinní prostor T^n . Projektivní transformace uvažovaná na vlastních bodech mají tvar lineárních lomených zobrazení. Afinity tvoří podgrupu projektivních transformací a jsou to právě ta zobrazení, které vlastní body zobrazují na vlastní body a nevlastní body na nevlastní body.

Důkaz. Větu dokážeme v rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$. Analogie pro vyšší dimenze a jiná tělesa pak bude zřejmá. Projektivní transformaci popíšeme regulární maticí F a zobrazme nějaký vlastní bod $(x, y, 1)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Z toho je zřejmý tvar lineárně lomených zobrazení. Všechny afinity; získáme položením $a_{31} = a_{32} = 0$ a $a_{33} = 1$. Pak totiž

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

To odpovídá známému tvaru afinních zobrazení

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

včetně známého skládání.

Podmínka $a_{31} = a_{32} = 0$ je nutná, jinak nalezneme bod $[x, y]$ takový, že jeho obraz bude mít poslední složku 0 a tedy nepůjde o afinní (vlastní) bod. Pokud $a_{33} \neq 1$ (nemůže platit $a_{33} = 0$ protože pak by byla F singulární), tak můžeme celou matici F vydělit tímto číslem a dostaneme stejné projektivní zobrazení.

Z toho taky vidíme, že (4) jsou právě ta projektivní zobrazení, která zobrazují vlastní body na vlastní a nevlastní na nevlastní. Pokud zobrazujeme nevlastní bod, tj. s nulou ve třetí složce, pak

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ 0 \end{pmatrix}$$

je nevlastní bod. Afinity tedy zobrazují vlastní body na vlastní a nevlastní body na nevlastní. $\square$

Příklad 5.8. Zkoumejte lineární lomená zobrazení, například

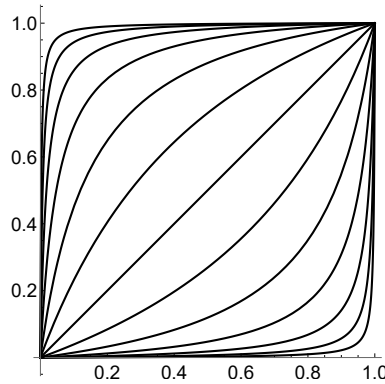
$$f(x) = \frac{2x + 3}{4x + 5},$$

z hlediska analýzy a z hlediska projektivních zobrazení na přímce.

Poznámka. Funkce reálné proměnné

$$f_a(x) = \frac{ax}{(a-1)x + 1}, \quad a \in \mathbb{R}_+ = (0, \infty),$$

jsou rostoucí difeomorfismy intervalu $[0, 1]$ na sebe. Pro libovolné hodnoty $x_0, y_0 \in (0, 1)$ existuje právě jedno $a \in \mathbb{R}_+$ takové, že $f_a(x_0) = y_0$. Tyto funkce tvoří vzhledem ke skládání grupu, která je izomorfní s grupou $(\mathbb{R}_+, *)$. Jedná se o zúžení na interval $[0, 1]$ vhodných projektivních zobrazení s maticí $\begin{pmatrix} a & 0 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}$.



Funkce f_a pro několik hodnot parametru a .

Definice 5.9 (Afinní pojmy pro kvadriky). Necht' $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n , pak

1. O množině $\tilde{Q} \subset T^n$ řekneme, že je to regulární afinní kvadrika, jestliže to je množina vlastních bodů regulární kvadriky Q v $\mathbb{P}^n$. O Q hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění $\tilde{Q}$ a o $\tilde{Q}$ hovoříme jako o afinní verzi Q . Nevlastní body Q považujeme i za nevlastní body $\tilde{Q}$.
2. Tečné nadroviny ke $\tilde{Q}$ definujeme jako afinní verze tečných nadrovin ke Q ve vlastních bodech.
3. Jestliže je pól nevlastní nadroviny p_∞ vlastním bodem, pak jej nazýváme středem kvadriky $\tilde{Q}$.
4. Jestliže má kvadrika v nevlastním bodě tečnou nadrovinu, která není nevlastní, nazýváme tuto nadrovinu asymptotickou k $\tilde{Q}$.
5. O dvou vlastních přímkách řekneme, že mají sdružené směry vůči kuželosečce $\tilde{Q}$, jestliže jsou jejich nevlastní body polárně sdružené vůči Q .

Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme stejným písmenem označovat afinní objekt (nadrovinu, kvadriku, prostor) a jeho projektivní zúplnění.

Definice 5.10 (Afinní klasifikace kuželoseček). V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme regulární kuželosečku Q . Řekneme o ní, že to je *elipsa*, jestliže nemá žádný nevlastní bod, *parabola*, jestliže má právě jeden nevlastní bod a *hyperbola*, jestliže má dva nevlastní body, jiné možnosti nejsou. Těmto názvům říkáme *afinní typ* kuželosečky.

Příklad 5.11. Všechny pojmy si postupně vyzkoušejme na afinní kuželosečce

$$x^2 + 2xy - 2y + 2 = 0.$$

Věta 5.12. Elipsa a hyperbola mají střed, parabola střed nemá. Hyperbola má dvě různé asymptoty, parabola ani elipsa asymptoty nemají. Pro elipsu jsou vždy dva různé směry po dvou sdružené. Pro hyperbolu jsou směry asymptot sdružené vždy samy se sebou a ostatní směry jsou po dvou sdružené. Pro parabolu existuje jeden směr (její nevlastní bod), který je sdružen sám se sebou i se všemi ostatními směry.

Důkaz. Necht Q je dána symetrickou maticí $B = (b_{ij})$. Parametrické vyjádření nevlastní přímky je $(s, t, 0)$, jestliže ho dosadíme do rovnice kuželosečky, dostaneme homogenní kvadratickou rovnici v s, t

$$b_{11}s^2 + 2b_{12}st + b_{22}t^2 = 0,$$

která má 0, 1 nebo 2 řešení (až na násobek) a tedy kuželosečka má odpovídající počet nevlastních bodů. O tom který z těchto případů nastane přitom rozhoduje signum diskriminantu

$$4b_{12}^2 - 4b_{11}b_{22} = -4 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Nyní studujme, kdy je pól nevlastní přímky nevlastní. Ekvivalentně to znamená, že nevlastní přímka $(0, 0, 1)^*$ je polárou nějakého nevlastního bodu $(s, t, 0)^T$. To nastane právě tehdy, když

$$(s, t, 0) \cdot B = (0, 0, \lambda),$$

neboli právě tehdy, když pro nějaké (s, t)

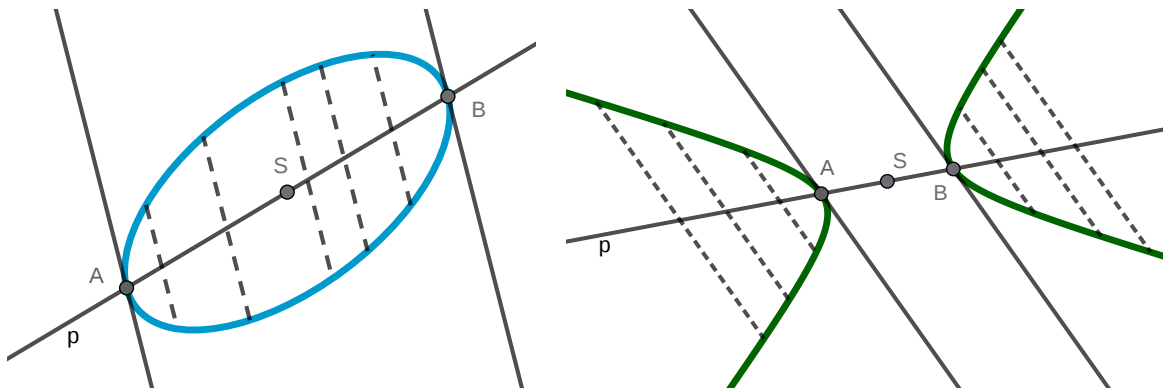
$$(s, t) \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}}_{\tilde{B}} = (0, 0),$$

tedy právě tehdy, když je matice $\tilde{B}$ singulární a kuželosečka je parabolou. Ve všech ostatních případech je polára nevlastního bodu vlastní přímkou. Vidíme tedy, že pól nevlastní přímky je vlastní v případě elipsy a hyperboly, které tedy mají střed. V případě paraboly je tento pól nevlastní a tedy parabola střed nemá.

Okamžitě také dostáváme tvrzení o asymptotách, které jsou definovány jako vlastní tečny v nevlastním bodě. Elipsa žádné nevlastní body nemá. Parabola má jeden nevlastní bod, ale jeho polára (tečna) je nevlastní. Hyperbola má dva nevlastní body a jejich poláry jsou vlastní, tedy jsou to tečny a asymptoty.

Kromě případu, že nevlastní bod X je dvojnásobným bodem paraboly tedy sdružený směr nalezneme jednoznačně jako $Y = p_X \cap p_\infty$. Tento bod je roven X právě tehdy $X \in Q$. Tím je dokázáno tvrzení o sdružených směrech pro elipsu a hyperbolu. V případě paraboly je jediný bod X paraboly sdružen sám se sebou a všemi ostatními nevlastními body, protože $p_X = p_\infty$. Poláry všech ostatních bodů jsou vlastní přímky, které mají jeden nevlastní bod X .

Věta 5.13. Nechť přímka p prochází středem S kuželosečky Q (elipsy nebo hyperboly) a protíná kuželosečku ve dvou různých bodech A, B . Pak S je středem úsečky AB . Tečny ke Q v bodech A, B jsou rovnoběžné a mají směr sdružený se směrem p . Jestliže má přímka se směrem sdruženým k p s kuželosečkou Q dva průsečíky X, Y , pak přímka p pólí úsečku XY .



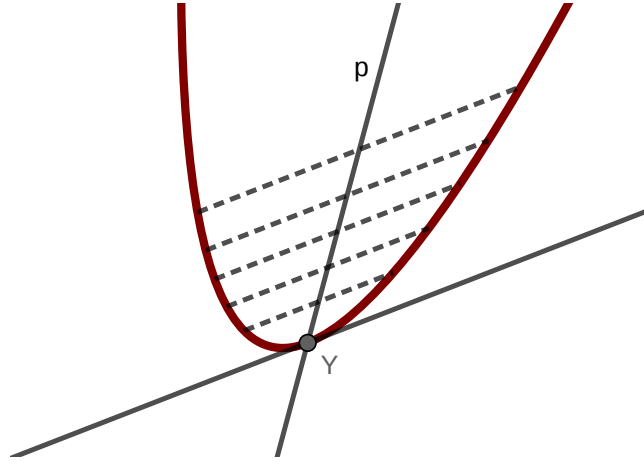
Důkaz. Přímka p protíná nevlastní přímku p_∞ v nějakém bodě D . Body (A, B, S, D) leží na jedné přímce a A, B , jsou na kuželosečce a S, D jsou polárně sdružené. Proto podle

Lemma 4.18 body (A, B, S, D) tvoří harmonickou čtveřici, přičemž D je bod nevlastní. Podle Věty 5.6 je tedy S středem úsečky AB .

Protože p prochází středem je její pól P nevlastním bodem. P a D jsou sdružené směry. Protože body A, B leží na přímce p , jejich poláry (které jsou tečnami) prochází bodem P a mají tedy směr sdružený se směrem přímky p .

Jestliže nějaká přímka prochází bodem P a protíná kuželosečku v bodech X, Y , pak jistě protíná i přímku p v nějakém bodě Z . Protože P a Z jsou polárně sdružené je (X, Y, Z, P) harmonická čtveřice a v důsledku je Z středem XY . $\square$

Věta 5.14. Nechť vlastní přímka p prochází jediným nevlastním bodem X paraboly a protíná ji v dalším (vlastním) bodě Y . Nechť přímka rovnoběžná s tečnou v bodě Y protíná parabolu ve dvou bodech A, B . Pak přímka p pólí úsečku AB .



Důkaz. Podobně jako v důkazu věty 5.13 prochází tečna pólem P přímky p a ze stejných důvodů přímka p pólí tětivy rovnoběžné s touto tečnou.

Věta 5.15 (Příklad afinně zachovaného pojmu). V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme elipsu Q se středem S . Jestliže F je afinita, pak $F(Q)$ je opět elipsa a $F(S)$ je jejím středem.

Důkaz. Elipsa v rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ nemá žádný nevlastní bod. Podle Věty 5.7 F zobrazuje vlastní body na vlastní a nevlastní na nevlastní, takže $F(p_\infty) = p_\infty$ a $F(Q) \cap p_\infty = \emptyset$. Obraz elipsy proto nemá žádný nevlastní bod a je to opět elipsa. Označme b bilineární formu původní elipsy. Pak bilineární forma jejího obrazu je dána jako $\bar{b}(X, Y) = b(F^{-1}(X), F^{-1}(Y))$.

Je-li S středem Q , pak pro každý $X \in p_\infty$ platí $b(X, S) = 0$ a dostáváme tedy, že i pro každý $Y \in p_\infty$

$$\bar{b}(F(S), Y) = b(S, F^{-1}(Y)) = 0,$$

protože $F^{-1}(Y) \in p_\infty$. $F(S)$ je proto skutečně středem $F(Q)$. $\square$

Definice 5.16 (Eukleidovské pojmy pro kuželosečky). V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ s kanonickým skalárním součinem mějme regulární kuželosečku Q . Směr (nevlastní bod) nazýváme hlavní, jestliže existuje směr sdružený, který je na něj kolmý. Osu kuželosečky

definujeme jako poláru hlavního směru, pokud tato polára není nevlastní přímkou. Vrcholy kuželosečky definujeme jako vlastní průsečíky os s kuželosečkou. Úsečka spojující střed a vrchol se nazývá poloosa.

Věta 5.17. Pro kružnici je každý bod jejím vrcholem. Elipsa, která není zároveň kružnicí má čtyři vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Hyperbola má dva vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Parabola má jeden vrchol a jednu osu, která prochází vrcholem a nevlastním bodem paraboly. Tečna ke kuželosečce v jejím vrcholu má vždy hlavní směr.

Poznámka 5.18 (Meta-věta o projektivních, afinních a eukleidovských pojmech). Projektivní zobrazení zachovávají (správně zobrazují) projektivní pojmy, afinní zobrazení zachovávají afinní pojmy a shodnosti zachovávají eukleidovské (na skalárním součinu závisící) pojmy.

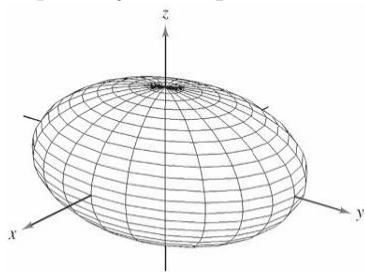
Věta 5.19. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ platí, že

1. každá elipsa je afinní transformací elipsy $x^2 + y^2 - 1 = 0$,
2. každá parabola je afinní transformací paraboly $x^2 - y = 0$,
3. každá hyperbola je afinní transformací hyperboly $xy - 1 = 0$.

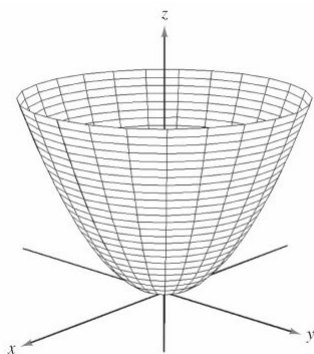
V důsledku jsou tedy každé dvě kuželosečky stejného afinního typu mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

Definice a lemma 5.20 (Projektivní a afinní klasifikace kvadrik v prostoru). V projektivně rozšířeném prostoru $\mathbb{R}^3$ definujeme tyto afinní typy regulárních kvadrik. Každé dvě kvadriky stejného afinního typu jsou mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

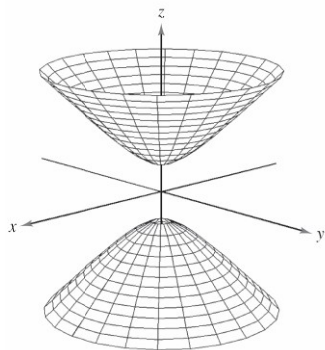
1. *elipsoid* jako nepřímkovou kvadriku, která nemá žádný nevlastní bod,



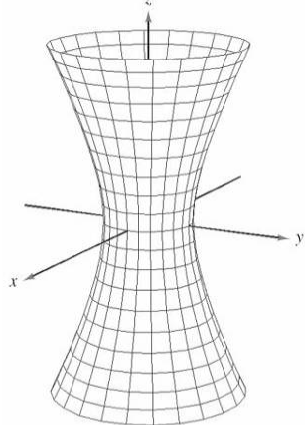
2. *eliptický paraboloid*, jako nepřímkovou kvadriku, která má právě jeden nevlastní bod,



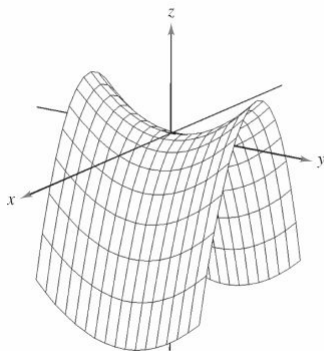
3. *dvojdílný hyperboloid* jako nepřímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku,



4. *jednodílný hyperboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku,



5. *hyperbolický paraboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří dvě přímky.



Příklad 5.21 (Úloha o tarotech). Nalezni 5 různých rozdělení (kol) 16 hráčů do 4 skupin (stolů) tak, aby každý hráč potkal každého hráče v právě jedné skupině (u jednoho stolu). Hint: uvažuj rozšířenou afinní rovinu nad čtyřprvkovým tělesem $\mathbb{F}_4$. Vlastní body jsou hráči, nevlastní body jsou kola, každá vlastní přímka prochází jedním nevlastním bodem (tedy patří do jednoho kola) a obsahuje 4 vlastní body (tedy je to stůl se 4 hráči).

6 Möbiovy transformace - !! předběžná verze !!

V této kapitole budeme studovat jiné rozšíření reálné roviny, které umožňuje efektivní sjednocený popis kružnic a přímek a jejich konformních transformací. Rovinu ztotožníme s komplexními čísly $\mathbb{C}$ a tuto komplexní přímku projektivně zúplníme. Tím se přidá jen jeden nevlastní bod (na rozdíl od nekonečně mnoha nevlastních bodů v klasické projektivní rovině).

Definice 6.1. Möbiovou rovinou nazýváme komplexní projektivní přímku $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$, do které je kanonicky vnořené $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$. Jedná se tedy o sjednocení množiny vlastních bodů $\{[z] \sim (z, 1)^T, z = x + yi \in \mathbb{C}\}$ a jediného nevlastního bodu $(1, 0)^T$, který budeme též označovat z_∞ .

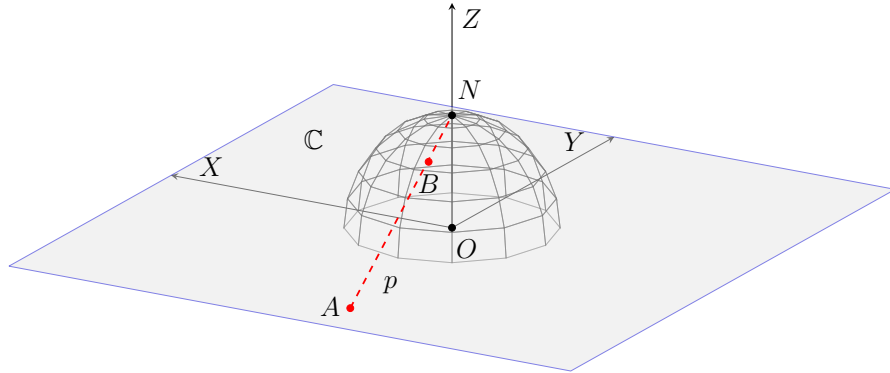
Tímto přidáním jednoho bodu zúplníme rovinu do dvojrozměrné sféry, budeme tedy využívat následující model

$$\mathbb{CP}^1 \simeq \mathbb{C} \cup \{z_\infty\} \simeq \mathbb{R}^2 \cup \{z_\infty\} \simeq S^2,$$

kde poslední ztotožnění získáme *stereografickou projekcí*, $\pi : \mathbb{CP}^1 \rightarrow S^2$, která je na vlastních bodech ($\mathbb{R}^2$) definována vztahem

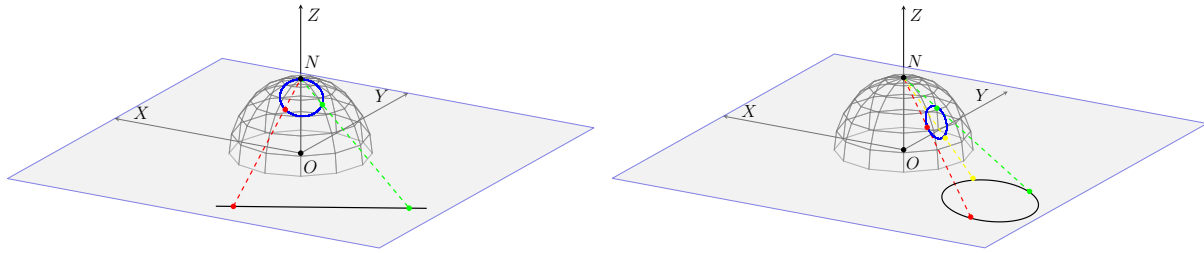
$$\pi(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

a $\pi(z_\infty) = (0, 0, 1)$, což je severní pól N sféry S^2 . Geometricky se jedná o projekci se středem N z roviny na jednotkovou sféru, tedy projekce bodu A na bod B na následujícím obrázku



Dále, rozšíříme-li standardní konvergenci posloupností v $\mathbb{C}$ předpisem $(z_i \rightarrow z_\infty) \Leftrightarrow (|z_i| \rightarrow +\infty)$, je stereografická projekce π homeomorfismus tedy spojitá bijekce, jejíž inverz je také spojitý.

Stereografická projekce má ovšem další dvě znamenité vlastnosti. První z nich je fakt, že je konformní, tedy že úhel mezi dvěma křivkami bude stejný jako mezi jejich obrazy. Poslední vlastností je, že stereografická projekce zobrazuje přímky a kružnice v $\mathbb{R}^2$ na kružnice v S^2 , jak je patrné z následujících obrázků.



Tato poslední vlastnost motivuje následující definici sjednocující přímky a kružnice

Definice 6.2. Kruhovou křivkou v $\mathbb{CP}^1$ rozumíme kružnici v rovině vlastních bodů nebo přímku v rovině vlastních bodů spolu s přidáním nevlastním bodem. Máme tedy dva typy kruhových křivek, pro libovolnou kružnici $k \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ definujeme:

$$P_k = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} : z \in k \right\}$$

a pro libovolnou přímku $p \subset \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ definujeme:

$$P_p = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} : z \in p \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Je pozoruhodné, že všechny kruhové křivky můžeme popsat jedinou rovnicí v homogenních souřadnicích.

Věta 6.3. Každou kruhovou křivku v $\mathbb{CP}^1$ můžeme vyjádřit jako množinu

$$\{(z_1, z_2)^T \in \mathbb{CP}^1 : az_1\bar{z}_1 + wz_1\bar{z}_2 + \bar{w}z_2\bar{z}_1 + cz_2\bar{z}_2 = 0, a, c \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{C}, |w|^2 > ac\}. \quad (5)$$

Důkaz. Nejprve nahlédneme, že každou kružnici a přímku v $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ lze reprezentovat jako

$$\{z \in \mathbb{C} : az\bar{z} - \bar{w}z - w\bar{z} + c = 0, \ a, c \in \mathbb{R}, \ w \in \mathbb{C}, |w|^2 > ac\}, \quad (6)$$

přičemž $a \neq 0$, potom (6) popisuje kružnici, a pokud $a = 0$, pak (6) je rovnicí přímky. Skutečně, rovnici každé kružnice můžeme zapsat ve tvaru $|z - z_0| = r$, kde z_0 je střed a $r > 0$ je poloměr. Poté můžeme psát:

$$\begin{aligned} |z - z_0| = r &\Leftrightarrow |z - z_0|^2 = r^2 \Leftrightarrow (z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = r^2 \\ &\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{z}_0z - z_0\bar{z} + (|z_0|^2 - r^2) = 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnice odpovídá vztahu (6) pro $a = 1, w = -z_0, c = |z_0|^2 - r^2$, kde $|w|^2 - ac = |z_0|^2 - (|z_0|^2 - r^2) = r^2 > 0$. Dále každou přímku v komplexní rovině můžeme popsat rovnicí $|z - z_1| = |z - z_2|$ pro nějaké $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Poté platí:

$$\begin{aligned} |z - z_1| = |z - z_2| &\Leftrightarrow |z - z_1|^2 = |z - z_2|^2 \Leftrightarrow (z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = (z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2) \\ &\Leftrightarrow \overline{(z_2 - z_1)z} + (z_2 - z_1)\bar{z} + (|z_1|^2 - |z_2|^2) = 0. \end{aligned}$$

Tedy vztah (6) je splněn pro $a = 0, w = z_2 - z_1, c = |z_1|^2 - |z_2|^2$ a $|w|^2 - ac = |z_2 - z_1|^2 > 0$.

Jestliže nyní přejdeme k homogenním souřadnicím $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ a provedeme dosazení $z \mapsto \frac{z_1}{z_2}$ do (6) výsledek vynásobíme $z_2\bar{z}_2$ dostáváme (5), přičemž nevlastní bod odpovídající $z_2 = 0$ byl správně doplněn pouze v případě $a = 0$, tedy k přímkám.

Definice 6.4. Möbiovy transformace definujeme jako projektivní transformace $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$. Z Věty 5.7 víme, že projektivní transformace $\mathbb{CP}^1$ mají na vlastních bodech tvar lineárně lomených zobrazení

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Afinním zobrazením odpovídá podmínka $c = 0$ ekvivalentní s $z_\infty \rightarrow z_\infty$. Pro $c \neq 0$ dostáváme $z_\infty \rightarrow \frac{a}{c}, -\frac{d}{c} \rightarrow z_\infty$.

Nyní si zadefinujeme několik konkrétních Möbiovy transformací, o kterých dále ukážeme, že celou grupu těchto transformací generují.

Definice 6.5. Zobrazení $\mathcal{K} : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$

$$\mathcal{K} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

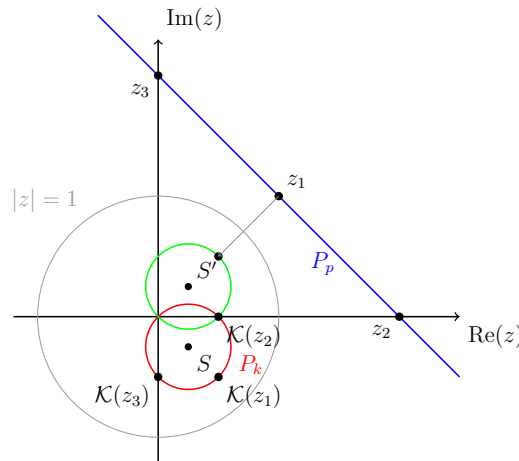
se nazývá převrácená kruhová inverze.

Bod z_∞ se v $\mathcal{K}$ zobrazí na bod $(0, 1)^T$ a naopak obrazem $(0, 1)^T$ je bod z_∞ . Ve skutečnosti platí, že $\mathcal{K}$ je involuce, tedy $\mathcal{K} \circ \mathcal{K} = id$. Každý vlastní bod $z \neq 0$ je zobrazen následovně $z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}$. Při rozpisu $z = x + yi$ dotáváme

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Vidíme tedy, že se jedná o složení kruhové inverze podle jednotkové kružnice se středem v počátku se zrcadlením podle reálné osy x , tedy s komplexním sdružováním.

Příklad 6.6. Zobrazme si přímku $x + y - 2 = 0$ (modrá barva) v kruhové inverzi (zelená kružnice) a zobrazením $\mathcal{K}$ (červená barva)



Na přímce leží tři body $z_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix}$, $z_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $z_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \end{pmatrix}$. a jejich obrazy leží na výsledné kružnici $\mathcal{K}(z_1) = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{K}(z_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{K}(z_3) = \begin{pmatrix} \frac{-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Definice 6.7. Zobrazení $\mathcal{P}_\omega : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$,

$$\mathcal{P}_\omega \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

se nazývá posunutí o vektor $\omega \in \mathbb{C}$.

Vlastní body se posunou $z \rightarrow z + \omega$ a nevlastní bod z_∞ se zobrazí sám na sebe.

Definice 6.8. Zobrazení $\mathcal{R}_\phi : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$

$$\mathcal{R}_\phi \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

se nazývá otočení o úhel $\phi \in \mathbb{R}$.

Nevlastní bod z_∞ se zobrazí sám na sebe. Vlastní body se otočí $z \rightarrow e^{i\phi}z$, vyjádřeno po složkách

$$(x, y) \rightarrow (x \cos \phi - y \sin \phi, x \sin \phi + y \cos \phi).$$

Definice 6.9. Zobrazení $\mathcal{H}_\lambda : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$

$$\mathcal{H}_\lambda \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

se nazývá stejnoolehlost, kde $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je koeficient stejnoolehlosti.

Nevlastní bod z_∞ se zobrazí sám na sebe. Vlastní body se zobrazí ve stejnoolehlosti $z \rightarrow \lambda z$, vyjádřeno po složkách

$$(x, y) \rightarrow (\lambda, x\lambda).$$

Věta 6.10. Každou Möbiovu transformaci lze vyjádřit jako složení několika posunutí, otočení, stejnoolehlosti a převrácené kruhové inverze.

Důkaz. Uvažujme matici Möbiovy transformace:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Pokud $c = 0$, potom zřejmě z regularity matice M je zřejmě $d \neq 0$, a tedy můžeme psát

$$\frac{1}{d}M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{P}_{\frac{b}{d}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{a}{d} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{H}_{\frac{a}{d}}}$$

Násobek $\frac{1}{d}$ nezmění projektivní zobrazení, matice $\mathcal{P}_{\frac{b}{d}}$ odpovídá matici posunutí s parametrem $\frac{b}{d}$ a matice $\mathcal{H}_{\frac{a}{d}}$ matici stejnoolehlosti s parametrem $\frac{a}{d}$.

V případě, že $c \neq 0$ můžeme psát

$$\frac{1}{c^2}M = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{P}_{\frac{a}{c}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{c^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_S \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{P}_{\frac{d}{c}}}$$

Matice $\mathcal{P}_{\frac{a}{c}}$, resp. $\mathcal{P}_{\frac{d}{c}}$, odpovídá matici posunutí s parametrem $\frac{a}{c}$, resp. $\frac{d}{c}$, matice $\mathcal{K}$ je maticí převrácené kruhové inverze a matice S odpovídá matici složení otočení a stejnoolehlosti. $\square$

Věta 6.11. Obrazem kruhové křivky v Möbiově transformaci je opět kruhová křivka.

Důkaz. Dle Věty 6.10 každou Möbiovu transformaci lze vyjádřit jako složení otočení, posunutí, stejnoolehlosti a převrácené kruhové inverze. Posunutí, otočení i stejnoolehlost zřejmě zachovávají kruhové křivky, tvrzení tedy stačí dokázat pro převrácenou kruhovou inverzi.

Z Definice 6.5 plyne, že převrácená kruhová inverze vlastního bodu (z_1, z_2) přiřadí bod (z_2, z_1) . Do předpisu (5) tedy za z_1 stačí dosadit z_2 a naopak, čímž dostáváme:

$$az_2\bar{z}_2 + wz_2\bar{z}_1 + \bar{w}z_1\bar{z}_2 + cz_1\bar{z}_1 = 0, |w|^2 > ac.$$

Záměnou koeficientů a a c a dosazením $\bar{w}$ za w dostaneme původní rovnici (5), odkud již plyne, že obrazem kruhové křivky je opět kruhová křivka. $\square$

Důležitou vlastností Möbiovy transformace je, že zachovávají úhly mezi křivkami. Tuto vlastnost by bylo možno obecně odvodit z toho, že jsou vyjádřitelné jako holomorfní funkce komplexní proměnné. My však tuto vlastnost dokážeme přímo pro námi definované transformace.

Věta 6.12. Každá Möbiova transformace zachovává úhel mezi regulárními křivkami.

Důkaz. Pro otočení, posunutí a stejnoolehlosti je tvrzení zřejmé a vzhledem k Větě 6.10 postačí tuto vlastnost dokázat pouze pro převrácenou kruhovou inverzi.

Úhlem mezi dvěma křivkami $\mathbf{c}(t)$, $\mathbf{d}(t)$ procházejícími bodem $\mathbf{p} = \mathbf{c}(t_0) = \mathbf{d}(s_0) \neq (0, 0)$ rozumíme úhel mezi jejich tečnými vektory

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\mathbf{c}'(t_0)}{\|\mathbf{c}'(t_0)\|} \cdot \frac{\mathbf{d}'(s_0)}{\|\mathbf{d}'(s_0)\|} \right).$$

Nechť $c_1(t)$ a $c_2(s)$ jsou takové dvě křivky a označme $\tilde{c}_1(t) = \mathcal{K}(c_1(t))$ a $\tilde{c}_2(s) = \mathcal{K}(c_2(s))$. Dokáži, že potom vektory $\tilde{c}'_1(t_0)$, $\tilde{c}'_2(s_0)$ svírají stejný úhel jako vektory $c'_1(t_0)$, $c'_2(s_0)$.

Převrácená kruhová inverze má tvar:

$$\mathcal{K}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = (\mathcal{K}_1(x, y), \mathcal{K}_2(x, y)).$$

Dále označme M Jacobiho matici, neboli matici parciálních derivací zobrazení $\mathcal{K}$:

$$M(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{K}_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial x} & \frac{\partial \mathcal{K}_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ 2xy & y^2 - x^2 \end{pmatrix}.$$

Dále jednoduše ověříme, že:

$$M(x, y)^T M(x, y) = \underbrace{\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}}_{h(x, y)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ze vzorce pro derivaci složeného zobrazení plyne:

$$\tilde{c}'_i(t) = (\mathcal{K} \circ c_i)'(t) = M(c_i(t)) \cdot c'_i(t), \quad i = 1, 2.$$

Odtud plyne, že:

$$\tilde{c}'_1(t_0) \cdot \tilde{c}'_2(s_0) = c_1'^T(t_0) M^T M c_2'(s_0) = h(x_0, y_0) c_1'(t_0) c_2'(s_0)$$

a analogicky

$$\|\tilde{c}'_1(t_0)\|^2 = h(x, y) \|c'_1(t_0)\|^2.$$

Zjevně $h(x, y) \neq 0$. Ve výrazu pro úhel mezi zobrazenými křivkami se tedy faktory $h(x, y)$ vykrátí, čímž dostaneme rovnost s úhlem původních křivek.

Poznámka 6.13.

- Bod $(0, 0)$ jsme vyloučili, protože ho kruhová inverze ρ zobrazuje na ∞ , kde úhel křivek nemáme definován. Šlo by si ale pomoci stereografickou projekcí na Riemannovu sféru, definovat úhel jako úhel křivek na ní a ukázat, že ve všech vlastních bodech stereografická projekce úhly zachovává.
- Zobrazení zachovávající úhel včetně jeho orientace se nazývá *konformní*, zobrazení zachovávající velikost úhlu a obracející jeho orientaci *antikonformní*. Lze ukázat, že kruhová inverze je antikonformní, tudíž inverze konformní, protože vznikne z kruhové inverze složením s komplexním sdružením, což je nepřímá shodnost. Posunutí, otočení a stejnolehlost s kladným koeficientem jsou přímá podobná zobrazení, tudíž každá Möbiova transformace je konformní.
- Důkaz obou vět lze provést i metodami elementární planimetrie, stačí vhodně geometricky přeformulovat definici kruhové inverze. V této reformulaci je kruhová inverze zobecněním osové souměrnosti, což je pohled rozvíjený dále v modelech neeukleidovské geometrie.

Speciálním případem Důsledku 4.12 je

Věta 6.14. Jsou-li dány tři různé vzory $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{CP}^1$ a tři různé obrazy $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{CP}^1$, pak existuje právě jedna Möbiova transformace F taková, že $F(z_i) = w_i$, pro $i = 1, 2, 3$.

Möbiova transformace zobrazující $z_1 \mapsto 0$, $z_2 \mapsto 1$, $z_3 \mapsto z_\infty$ má tvar

$$F(z) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

Pokud čtyři různé body $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{CP}^1$ leží na kruhové křivce, musí na ní ležet i jejich obrazy v zobrazení F , což znamená, že

$$F(z_4) = \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_3}$$

leží na přímce určené body $0, 1, z_\infty$, tedy na reálné ose. Výraz pro $F(z_4)$ je podle Věty 5.6 roven dvojpoměru (z_3, z_1, z_2, z_4) odpovídajících bodů v $\mathbb{CP}^1$. S využitím chování dvojpoměru při permutaci bodů pak plyne

Věta 6.15. Čtyři různé body leží na kruhové křivce právě tehdy, když je jejich dvojpoměr reálné číslo.

Definice 6.16. *Poincarého polorovinový model* neeukleidovské geometrie má množinu bodů

$$H = \{z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0\},$$

přímkami jsou všechny kruhové křivky kolmé na reálnou osu a přímé shodnosti jsou všechny Möbiovy transformace, které zachovávají množinu H .

Poincarého kruhový model neeukleidovské geometrie má množinu bodů

$$D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\},$$

přímkami jsou všechny kruhové křivky kolmé na jednotkovou kružnici a přímé shodnosti jsou všechny Möbiovy transformace, které zachovávají množinu D .

Dá se přímočaře ukázat, že přímé shodnosti v polorovinovém modelu jsou Möbiovy transformace tvaru $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$. Jsou to právě ty transformace, které jsou složením dvojice prvků množiny všech kruhových inverzí podle kružnic kolmých na reálnou osu a osových souměrností podle přímek kolmých na reálnou osu. Analogickou konstrukci je možné provést i v Poincarého kruhovém modelu, nebo je možné převést každou přímou shodnost F polorovinového modelu na přímou shodnost $M^{-1} \circ F \circ M$ kruhového modelu, kde M je libovolná Möbiova transformace zobrazující jednotkovou kružnici na reálnou přímku a bod 0 na bod s kladnou imaginární částí. Tak jako tak vyjdou transformace tvaru

$$z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} \equiv K \frac{z - m}{1 - \bar{m}z}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

kde $K = \frac{a}{\bar{a}} = e^{i2\phi}$ a pro $m = -\frac{b}{\bar{a}}$ platí $|m| < 1$. Z druhého vyjádření je vidět, že bod $m \in D$ zobrazí transformace na počátek 0.

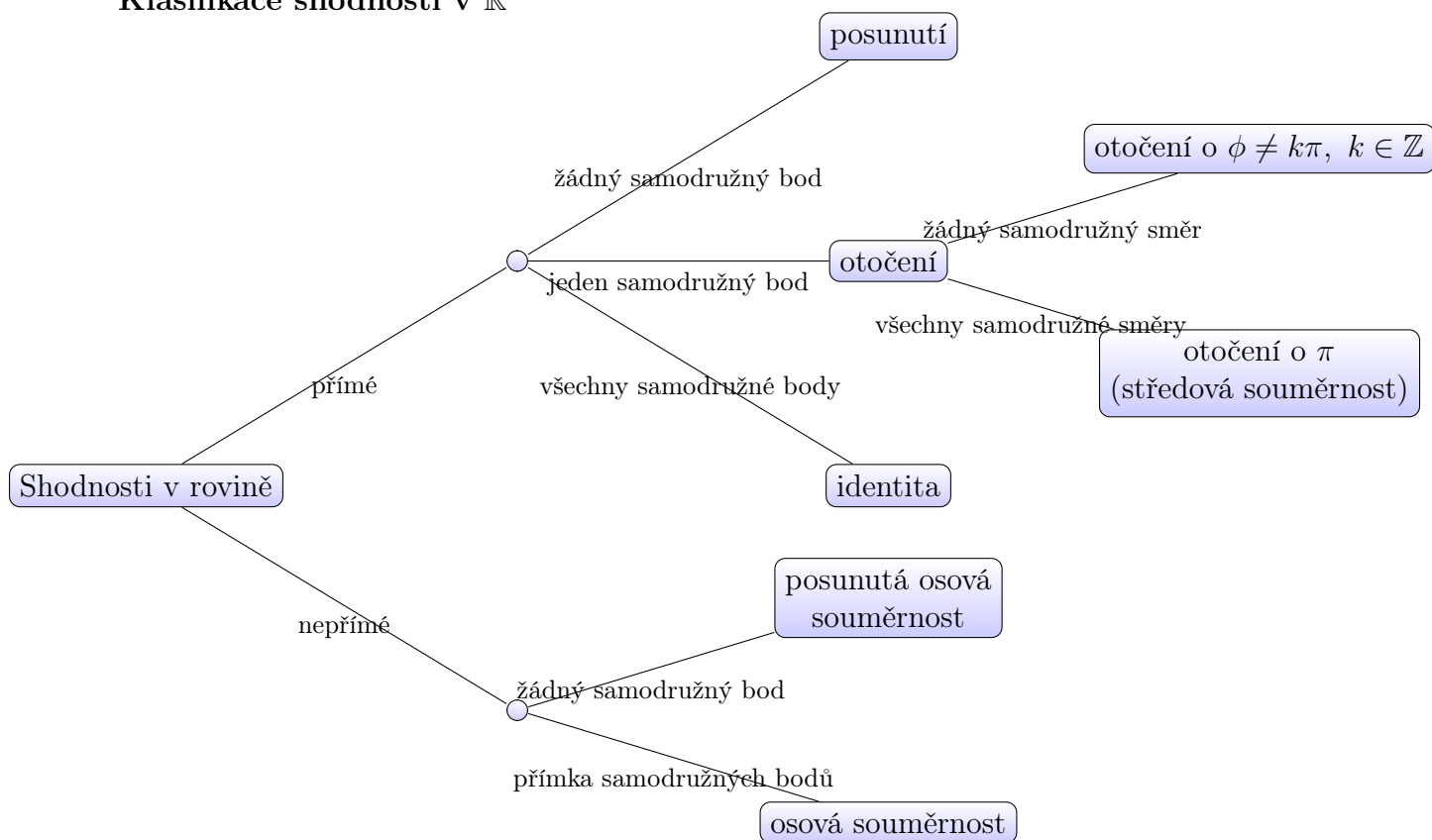
Věta 6.17. Součet vnitřních úhlů každého trojúhelníku v Poincarého kruhovém modelu je menší než π .

Důkaz. Strany trojúhelníku ABC jsou tvořeny oblouky kruhových křivek kolmých na hranici. Pokud vrchol A zobrazíme přímou shodností na počátek, zachovají se jak kruhové křivky, tak jejich kolmost na hranici, a také úhel mezi nimi. Kruhové křivky kolmé na hranici a procházející počátkem jsou ale částmi úseček. Obrazem spojnice bodů B a C je část kruhové křivky kolmé na hranici, a ta musí být vypouklá směrem k počátku (obrazu bodu A). Součet vnitřních úhlů zobrazeného trojúhelníku je menší než π a z konformity Möbiovy transformace musí platit totéž i pro trojúhelník ABC .

7 Dodatek

Materiál z této sekce se nebude zkoušet, obsahuje několik doplňků, důkazů a zobecnění.

Klasifikace shodností v $\mathbb{R}^2$



Lemma 1.16 Pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Důkaz. Rozlišíme dva případy:

- $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně závislé. Jelikož vektorový součin antikomutuje, můžeme BÚNO předpokládat, že $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom je $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{o}$, takže levá strana (LS) dokazované rovnosti je rovna $\mathbf{o}$. Ovšem pravá strana (PS) je rovna $(\mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{v})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\lambda \mathbf{v} = \mathbf{o}$, takže rovnost platí.
- $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ jsou lineárně nezávislé. Potom je $B = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w})$ báze $\mathbb{R}^3$. Obě strany dokazované rovnosti jsou výrazy lineární v $\mathbf{u}$, tedy stačí ukázat platnost v případě, kdy je $\mathbf{u}$ roven jednomu z prvků B .

– $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

$$\mathbf{LS} = \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Dále z kolmosti $\mathbf{u}$ na $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ plyne

$$\mathbf{PS} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{o} = \mathbf{LS}.$$

– $\mathbf{u} = \mathbf{v}$: Rovnost přejde do tvaru

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Stačí ukázat, že skalární součin libovolného prvku B s $\mathbf{LS}$ je stejný, jako s $\mathbf{PS}$. Snadno je vidět, že

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{LS} &= \mathbf{o} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{PS}, \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{LS} &= \mathbf{o} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{PS}.\end{aligned}$$

Konečně označíme-li úhel mezi $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ jako α , platí

$$\begin{aligned}\mathbf{w} \cdot \mathbf{LS} &= \det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ &= -\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = -\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \sin^2 \alpha, \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{PS} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \cos^2 \alpha - \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= -\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \sin^2 \alpha = \mathbf{w} \cdot \mathbf{LS}.\end{aligned}$$

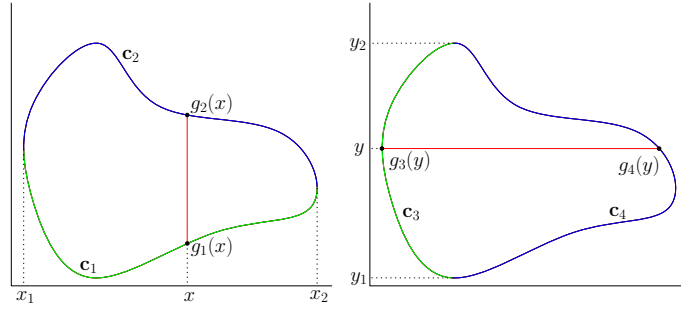
– $\mathbf{u} = \mathbf{w}$: $\mathbf{LS}$ i $\mathbf{PS}$ jsou „antisymetrické vzhledem k $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$ “, tedy prohodíme-li v nich $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$, obě se pouze pronásobí -1. Tím pádem je tento případ analogický předchozímu.

Greenova věta 2.38: Nechť $\mathbf{c}$ je jednoduchá, hladká, uzavřená, regulární, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka v $\mathbf{R}^2$. Nechť $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je hladké vektorové pole definované na nějakém okolí uzávěru $\text{Int } \mathbf{c}$. Pak

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\text{Int } \mathbf{c}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Důkaz. (Náznak.) Větu dokážeme pro speciální případ křivky $\mathbf{c} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^2$ ze znění věty. Předpokládejme, že $\mathbf{c}$ lze „rozdělit“ na dvě hladké křivky $\mathbf{c}_1(x) = (x, g_1(x))$, $\mathbf{c}_2 = (x, g_2(x))$, $x \in [x_1, x_2]$, kde $g_1, g_2 : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbf{R}$ jsou zobrazení splňující:

- $g_1(x_1) = g_2(x_1)$, $g_1(x_2) = g_2(x_2)$ (tedy $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\beta) = \mathbf{c}_1(x_1) = \mathbf{c}_2(x_1)$ a $\mathbf{c}(\gamma) = \mathbf{c}_1(x_2) = \mathbf{c}_2(x_2)$ pro nějaké $\gamma \in (\alpha, \beta)$),
- $g_1(x) < g_2(x)$, $x \in (x_1, x_2)$ (tedy $\mathbf{c}_1$ je „dolní část“ $\mathbf{c}$ a $\mathbf{c}_2$ „horní“, ovšem $\mathbf{c}_2$ je opačně orientovaná než skutečná příslušná část $\mathbf{c}$).



Symetricky budeme chtít, aby křivka mohla být rozdělena na „levou část“ $\mathbf{c}_3(y) = (g_3(y), y)$ a „pravou část“ $\mathbf{c}_4 = (g_4(y), y)$, $y \in [y_1, y_2]$ s analogickými vlastnostmi.

Pro hladké vektorové pole $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ můžeme psát:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} &= \int_{\mathbf{c}} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \\ &= \left(\int_{x_1}^{x_2} F_1(x, g_1(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} F_1(x, g_2(x)) dx \right) + \\ &\quad + \left(- \int_{y_1}^{y_2} F_2(g_3(y), y) dy + \int_{y_1}^{y_2} F_2(g_4(y), y) dy \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x))) dx + \int_{y_1}^{y_2} (-F_2(g_3(y), y) + F_2(g_4(y), y)) dy. \end{aligned}$$

Počítejme nyní (s využitím Fubiniho věty):

$$\begin{aligned} \int_{\text{Int } \mathbf{c}} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x))) dx. \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že

$$\int_{\text{Int } \mathbf{c}} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \int_{y_1}^{y_2} (-F_2(g_3(y), y) + F_2(g_4(y), y)) dy$$

Sečtení těchto dvou rovností dává Greenovu větu pro $\mathbf{c}$. □

Wirtingerovo lemma 2.40: Nechť $f(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkce, pro kterou platí $f(0) = f(\pi) = 0$. Pak

$$\int_0^\pi f'^2(t) dt \geq \int_0^\pi f^2(t) dt$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $f(t) = D \sin(t)$, kde D je konstanta.

Důkaz. Označme $g(t) = \frac{f(t)}{\sin t}$, $t \in (0, \pi)$, a (s využitím L'Hospitalova pravidla) spojitě dodefinujeme

$$\begin{aligned} g(0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = f'_+(0), \\ g(\pi) &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} g(t) = -f'_-(\pi). \end{aligned}$$

Platí tedy $f(t) = g(t) \sin t$, $t \in [0, \pi]$ a můžeme počítat:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f'(t)^2 dt &= \int_0^\pi (g'(t) \sin(t) + g(t) \cos(t))^2 dt \\ &= \int_0^\pi g'^2(t) \sin^2(t) dt + \int_0^\pi \underbrace{2g(t)g'(t)}_{(g^2(t))'} \sin(t) \cos(t) dt + \int_0^\pi g^2(t) \cos^2(t) dt \end{aligned}$$

a použitím per-partes na střední člen dostáváme

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi (g'(t) \sin(t))^2 dt + \underbrace{[g^2(t) \sin(t) \cos(t)]_0^\pi}_0 - \int_0^\pi g^2(t) (\cos^2(t) - \sin^2(t)) dt \\ &\quad + \int_0^\pi g^2(t) \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^\pi (g'(t) \sin(t))^2 dt + \int_0^\pi \underbrace{(g(t) \sin t)^2}_{f(t)} dt \geq \int_0^\pi f^2(t) dt. \end{aligned}$$

Rovnost zřejmě nastává právě pro g' nulovou, tedy $f(t) = D \sin(t)$ pro nějaké pevné $D \in \mathbb{R}$. $\square$

Věta 3.3: Mějme afinní prostor A se zaměřením V , pak pro libovolné prvky $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in A$; $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

1. $\mathbf{A} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{B} \ominus \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B})$
3. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \ominus \mathbf{C}) = \mathbf{A} \ominus \mathbf{C}$
4. $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{u}) - (\mathbf{B} \oplus \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
5. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{B})$

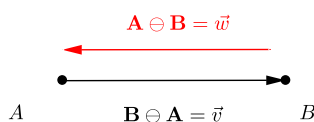
Důkaz.

1. Z druhého axiomu afinního prostoru víme $\exists! \mathbf{v} \in V : \mathbf{A} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{A}$, a dále můžeme za pomoci prvního axiomu psát

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{o} = (\mathbf{A} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{o} = \mathbf{A} \oplus (\mathbf{v} + \mathbf{o}) = \mathbf{A} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{A},$$

čímž získáváme požadované tvrzení.

2. Označme $\mathbf{v} = \mathbf{B} \ominus \mathbf{A}$ a $\mathbf{w} = \mathbf{A} \ominus \mathbf{B}$.



Jsou to ty jednoznačně určené vektory, že

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \oplus \mathbf{w} = \mathbf{A}.$$

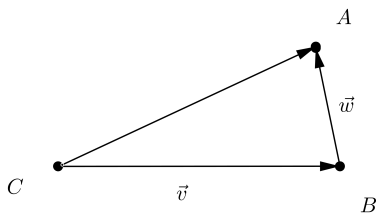
K první rovnosti přičteme $\oplus \mathbf{w}$ a dále upravíme.

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \oplus (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{A}$$

Jelikož existuje právě jeden takový vektor pro každé $\mathbf{A}$ a $\mathbf{o}$ poslední rovnost splňuje, platí $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$, tedy $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.

3. Necht' $\mathbf{v} = \mathbf{B} \ominus \mathbf{C}$ a $\mathbf{w} = \mathbf{A} \ominus \mathbf{B}$.



Ukážeme, že následující výraz je roven $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{C} \oplus (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{C} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{w} = \mathbf{A}$$

Podobně bychom dokázali i zbylé formule.

□

Zobecnění definice 5.1: Mějme n -dimenzionální afinní prostor A se zaměřením V^n nad tělesem T a $(n+1)$ -dimenzionální afinní prostor B se zaměřením V^{n+1} nad stejným tělesem a prosté afinní zobrazení $\varphi : A \rightarrow B$ a bod $\mathbf{P} \in B \setminus \text{Im}(\varphi)$. Pak je zobrazení $\Phi : A \rightarrow \mathbb{P}(V^{n+1})$ zadané předpisem

$$\Phi(\mathbf{X}) := LO\{\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{P}\},$$

prosté a nazývá se *vnoření* A do projektivního prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$.