

Geometrie 1

Tento soubor obsahuje znění číslovaných položek (především definic a vět) jak byly předneseny v ZS 2024/25. Spolu se zápisky z přednášek je tento seznam i hlavním studijním materiálem ke zkoušce. Co tento seznam **neobsahuje** jsou nejrůznější motivace, vysvětlení, zajímavosti, animace, ad-hoc příklady atd. Naopak zde budou koncem semestru přidány detailní požadavky na zkoušku.

Předmět Geometrie 1 přirozeně navazuje na Matematickou analýzu a zejména Lineární algebru. Skripta LA z 1. ročníku z minulého roku jsem umístil na svoje stránky (abych tak zafixoval stav, ve kterém byla předložena Vašemu ročníku) a odkazuji se na ně v tomto textu.

Zkouška bude písemná a bude obsahovat početní i teoretickou část. V početní části budou všechny typové příklady, které se objevily na cvičeních, ne však příklady složitější na přemýšlení. V teoretické části se budou zkoušet

- Základní definice, u kterých bude zde nastaven vysoký požadavek na získané body (kdo neumí základní definice, neudělá zkoušku). Jedná se o definice 1.2, 1.6, 1.8, 2.2, 2.4, 2.9, 2.13, 2.18, 2.21, 2.29, 2.31, 2.34, 3.1, 3.4, 3.6, 3.14, 3.19, 3.21, 4.1, 4.3, 4.7, 4.9, 4.16, 4.17, 5.1, 5.9, 5.10
- Znění všech ostatních definic, vět, lemmat a důsledků (ne však poznámek a příkladů).
- Všechny důkazy (v té míře přesnosti a podrobnosti, v jaké byly odpřednášeny) kromě následujících položek, u kterých se důkazy zkoušet **nebudou**: 1.13, 1.16, 2.26, 2.33, 2.36, 2.38, 3.3, 3.25, 4.14, 5.16, 5.14, 5.19, 5.20

1 Shodná zobrazení

Cílem této kapitoly je studovat shodná zobrazení v rovině a v prostoru bez toho, že by se formálně definoval afinní prostor. Zároveň chceme zopakovat středoškolskou analytickou geometrii a co nejpřirozeněji na ni navázat.

Příklad 1.1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky

$$p : 3x + 4y - 7 = 0.$$

Definice 1.2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Lemma 1.3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Důkaz. Nechtě $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou shodnosti a $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$.

- Zřejmě $\|g(f(\mathbf{X})) - g(f(\mathbf{Y}))\| = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $g \circ f$ je shodnost.
- Je-li $f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{Y})$, potom platí $0 = \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, tedy $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$. Čili f je prosté.
- Jestliže $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \text{Im} f$, pak díky prostotě f existují jejich jednoznačně určené vzory $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $f(\mathbf{P}) = \mathbf{X}$, $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Y}$. Potom platí

$$\|f^{-1}(\mathbf{X}) - f^{-1}(\mathbf{Y})\| = \|\mathbf{P} - \mathbf{Q}\| = \|f(\mathbf{P}) - f(\mathbf{Q})\| = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|.$$

Tedy f^{-1} zachovává vzdálenosti.

□

Věta 1.4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a \mathbf{A} je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (ortogonální matice).

Důkaz. Připomeňte si unitární matice, srovnej LA 8.5. Poznamenejme, že platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (to jest \mathbf{A} má ortonormální sloupce) právě tehdy, když $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$ (to jest \mathbf{A} má ortonormální řádky). Jestliže totiž platí $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ nebo $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}_n$, pak $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ a tedy platí i druhá rovnost.

Rovněž si připomeňme, že pro libovolný vektor $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \sqrt{\mathbf{u}^T \mathbf{u}}$$

Předpokládejme nejprve, že $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ pro $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. Pro libovolné dva body v \mathbb{R}^n : $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{Y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ platí

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})\| &= \|\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p} - (\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{p})\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y})\| = \sqrt{(\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))^T (\mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{Y}))} \\ &= \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \sqrt{(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^T (\mathbf{X} - \mathbf{Y})} = \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\| \end{aligned}$$

a tedy f je shodné zobrazení.

Naopak předpokládejme, že f je shodnost a chceme ukázat, že je nutně tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Definujme body $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \dots, n\}$ v \mathbb{R}^n . Vektory $\mathbf{e}_i = \mathbf{E}_i - \mathbf{O}$ tvoří ortonormální (kanonickou) bázi \mathbb{R}^n .

Ukážeme, že také vektory $\mathbf{f}_i = f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})$ tvoří ortonormální bázi \mathbb{R}^n . Zobrazení f je shodné, tedy pro každé i dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O})\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{O}\| = 1$$

a vektory jsou tedy jednotkové. Dále pro každé $i \neq j$ dostáváme

$$\|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{O}) - (f(\mathbf{E}_j) - f(\mathbf{O}))\| = \|f(\mathbf{E}_i) - f(\mathbf{E}_j)\| = \|\mathbf{E}_i - \mathbf{E}_j\| = \sqrt{2}$$

a protože

$$2 = \|\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j\|^2 = (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) \cdot (\mathbf{f}_i - \mathbf{f}_j) = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i + \mathbf{f}_j \cdot \mathbf{f}_j - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 1 + 1 - 2\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$$

dostáváme $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j = 0$ a vektory jsou po dvou kolmé. (pozn. K témuž závěru bychom došli i aplikací polarizační identity z lineární algebry, která říká, že skalární součin lze vyjádřit pomocí normy tímto skalárním součinem indukované, LA Tvrzení 8.32.)

Definujme nyní matici $\mathbf{A} = (\mathbf{f}_1 | \dots | \mathbf{f}_n)$, vektor $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a zobrazení $g(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, které je podle první části důkazu shodné a pro jeho inverz platí $g^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^T \mathbf{X} - \mathbf{A}^T \mathbf{p}$. Navíc zjevně platí $g(\mathbf{O}) = f(\mathbf{O})$ a $g(\mathbf{E}_i) = f(\mathbf{E}_i)$ pro všechna i . Definujme konečně $h = g^{-1} \circ f$, které je shodné a pro které tedy platí $h(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$ a $h(\mathbf{E}_i) = \mathbf{E}_i$. Dokážeme, že takové h už musí být identické zobrazení.

Uvažujme libovolný bod $\mathbf{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n$ a jeho obraz

$$h(\mathbf{Y}) = (h_1(\mathbf{Y}), h_2(\mathbf{Y}), \dots, h_n(\mathbf{Y}))^T.$$

Pak platí

$$\|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{O})\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + h_2^2(\mathbf{Y}) + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{O}\|^2,$$

$$\begin{aligned} \|h(\mathbf{Y}) - h(\mathbf{E}_i)\|^2 &= \|h(\mathbf{Y}) - \mathbf{E}_i\|^2 = h_1^2(\mathbf{Y}) + \dots + (h_i(\mathbf{Y}) - 1)^2 + \dots + h_n^2(\mathbf{Y}) \\ &= y_1^2 + \dots + (y_i - 1)^2 + \dots + y_n^2 = \|\mathbf{Y} - \mathbf{E}_i\|^2. \end{aligned}$$

V druhé rovnosti prvního a třetí druhého řádku jsme využili, že h je shodnost. Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme $2h_i(\mathbf{Y}) - 1 = 2y_i - 1$, tedy pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ máme $h_i(\mathbf{Y}) = y_i$, tedy h je identita a tedy $f(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$.

Poznamenejme, že v definici shodnosti se využívá pouze toho, že (\mathbb{R}^n, ρ) , kde $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|$, je metrický prostor. Tato věta ukazuje hlubokou souvislost s jeho strukturou lineárního prostoru. \square

Důsledek 1.5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $E(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{X} + (\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Definice 1.6. Shodné zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $E_+(n)$. Zobrazení, pro která je \mathbf{A} jednotková matice a \vec{p} nějaký vektor z \mathbb{R}^n nazýváme posunutí. Množina všech posunutí tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž \mathbb{R}^n . Zobrazení, pro která je \mathbf{p} nulový vektor tvoří tzv. ortogonální podgrupu označovanou $O(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin). Podgrupa $O(n)$ tvořená přímými zobrazeními se značí buď $O_+(n)$, nebo častěji $SO(n)$ (speciální ortogonální grupa).

Věta 1.7. Pro každou shodnost $f \in E(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $E(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{G}L(n+1)$.

Důkaz. Plyne triviálně z blokového maticového násobení.

Definice 1.8. Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme jeho samodružnými body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dané maticí \mathbf{A} nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f .

Řekneme, že množina M je samodružná množina zobrazení f , jestliže platí $f(M) = M$, tedy zobrazení ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť).

Lemma 1.9. Přímka $\mathbf{Q} + LO\{\mathbf{v}\}$ je samodružnou množinou shodnosti f právě tehdy, když $LO\{\mathbf{v}\}$ je jeho samodružný směr a $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ je násobkem \mathbf{v} .

Důkaz. Nechť $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Vektor \mathbf{v} je nenulový (jinak by $q = \mathbf{Q} + LO\{\mathbf{v}\}$ nebyla přímkou). Označme $\mathbf{R} = \mathbf{Q} + \mathbf{v}$.

Zobrazení f zobrazuje přímky na přímky. Přímka q je samodružná právě tehdy, když obrazy jejích dvou bodů \mathbf{Q} , \mathbf{R} na ní leží, tedy existují různá čísla $\alpha_{\mathbf{Q}}$, $\alpha_{\mathbf{R}}$ taková, že

$$f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \alpha_{\mathbf{Q}}\mathbf{v}, \quad f(\mathbf{R}) = \mathbf{Q} + \alpha_{\mathbf{R}}\mathbf{v}.$$

Je-li tomu tak, pak je zjevně $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ násobkem \mathbf{v} a dále $\mathbf{A}\mathbf{v} = f(\mathbf{R}) - f(\mathbf{Q}) = (\alpha_{\mathbf{R}} - \alpha_{\mathbf{Q}})\mathbf{v}$ a tedy $LO\{\mathbf{v}\}$ je samodružný směr.

Naopak, jestliže je $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ násobkem \mathbf{v} , tedy $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q} + \alpha_{\mathbf{Q}}\mathbf{v}$ leží na přímce q . Protože je navíc \mathbf{v} vlastní, je $f(\mathbf{R}) = \mathbf{A}(\mathbf{Q} + \mathbf{v}) + \mathbf{p}$ rovněž na přímce q . \square

Věta 1.10. Pro každou shodnost $f \in E(2)$ nastane právě jedna z těchto možností.

- f je přímá shodnost a
 - má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vl. číslem 1, pak jde o identitu.
 - má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vl. číslem -1 . V tomto posledním případě jde o otočení o π neboli o středovou souměrnost.
 - nemá žádné samodružné body a všechny směry jsou samodružné s vl. číslem 1, pak ji nazýváme posunutí .
- f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastním číslem -1 a
 - buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost
 - nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.

Zobrazení	Identita	Neidentické posunutí	Neidentické otočení	Osová souměrnost	Posunutá souměrnost
Samodružné body	všechny	-	střed otočení	osa souměrnosti	-
Samodružné směry	všechny	všechny	všechny (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	směr osy a kolmý na osu	směr osy a kolmý na osu
Samodružné přímky	všechny	všechny ve směru posunutí	všechny jdoucí středem (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	osa a přímky na ni kolmé	jedna přímka
Přímé/nepřímé	přímé	přímé	přímé	nepřímé	nepřímé

Důkaz. Podle věty 1.4 je f tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$$

pro nějakou $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonální a $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Samodružné body f jsou právě řešení soustavy $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ a samodružné směry f odpovídají vlastním vektorům \mathbf{A} . Rozlišíme dva případy:

- f je přímé, tedy $\det(\mathbf{A}) = 1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Dále rozlišujeme dva případy:

- $\alpha = 0$, tedy $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ a všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem 1. Pro $\mathbf{p} = \mathbf{o}$ jde o identitu – pak jsou všechny body samodružné. Pro $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}$ jde o posunutí, a to nemá žádné samodružné body (soustava $(\mathbf{I}_n - \mathbf{A} \mid \mathbf{p})$ nemá řešení).
- $\alpha \neq 0$. Potom platí $\det(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}) = 2(1 - \cos \alpha) \neq 0$, tedy soustava má právě jedno řešení pro libovolné \mathbf{p} a tedy f má právě jeden samodružný bod \mathbf{S} . Lze psát

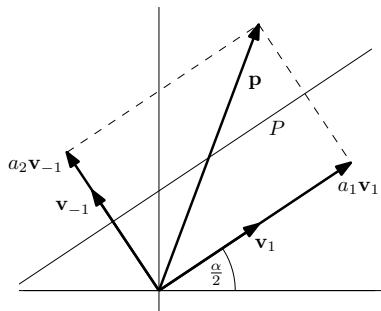
$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{p} = \mathbf{A}(\mathbf{X} - \mathbf{S}) + \mathbf{S},$$

takže jde o otočení kolem \mathbf{S} . Pro $\alpha = \pi$ je $\mathbf{A} = -\mathbf{I}_n$, tedy všechny směry jsou samodružné s vlastním číslem -1 a jde o středovou souměrnost. V opačném případě \mathbf{A} nemá žádné vlastní vektory (nad \mathbb{R}), tedy f nemá samodružné směry.

- f je nepřímé, tedy $\det(\mathbf{A}) = -1$. Potom je

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

pro nějaké $\alpha \in [0, 2\pi)$. Matice \mathbf{A} má vlastní čísla 1 a -1 s příslušnými na sebe kolmými vlastními vektory $\mathbf{v}_1 = (\cos \frac{\alpha}{2}, \sin \frac{\alpha}{2})$, $\mathbf{v}_{-1} = (-\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2})$.



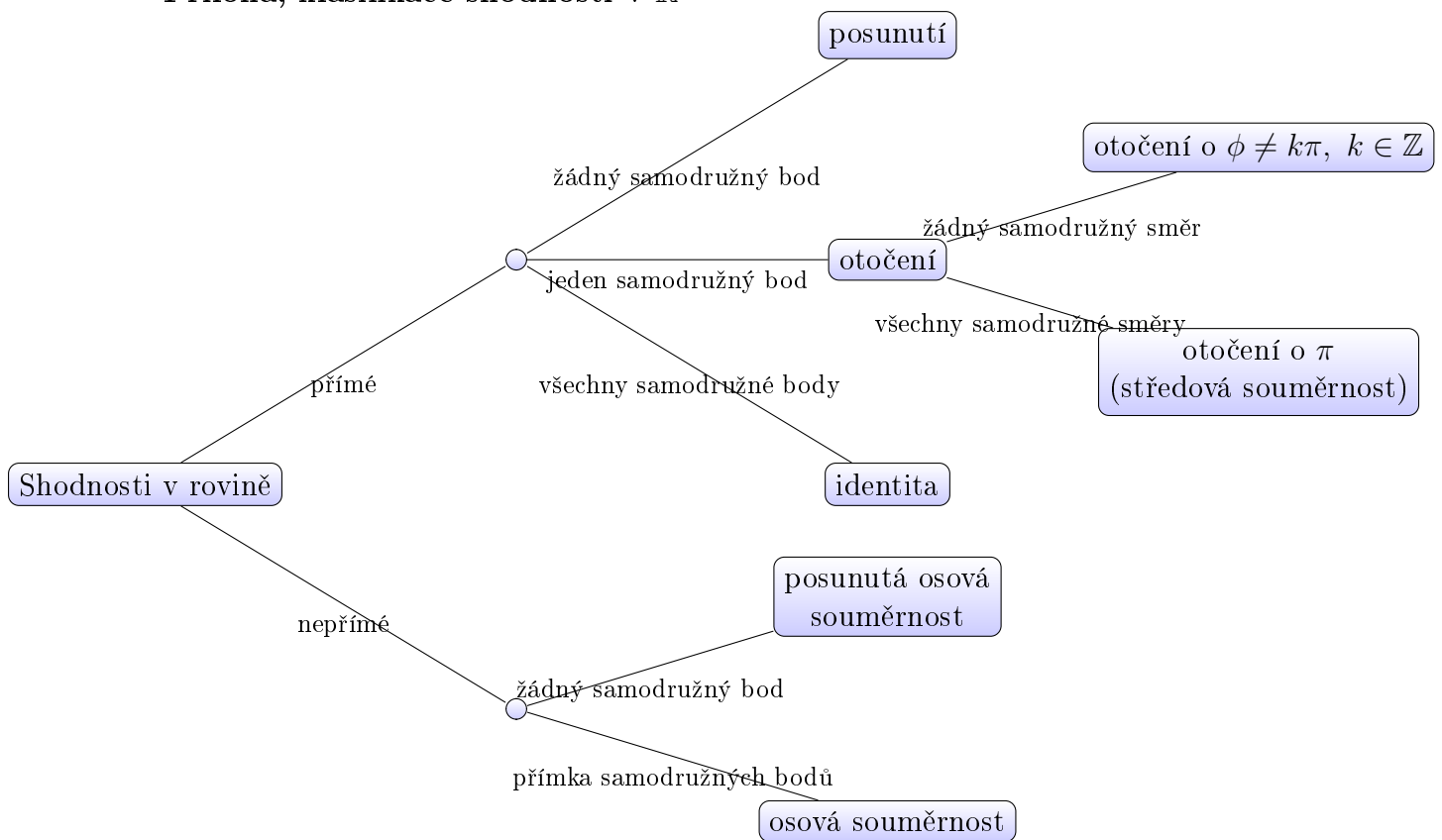
Označme $B = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_{-1})$, což je ON báze vektorového prostoru \mathbb{R}^2 a $\mathbf{p} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_{-1}$ vyjádření vektoru posunutí v této bázi. Můžeme jistě psát

$$f(\mathbf{X}) = [\mathbf{A}\mathbf{X} + a_2\mathbf{v}_{-1}] + a_1\mathbf{v}_1 = f_2(f_1(\mathbf{X})),$$

kde $f_1(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathbf{X}) + a_2\mathbf{v}_{-1}$ a $f_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + a_1\mathbf{v}_1$. Přímým výpočtem ověříme, že každý bod přímky $p(t) = \frac{a_2}{2}\mathbf{v}_{-1} + t\mathbf{v}_1$ je samodružným bodem zobrazení f_1 a jedná se tedy o osovou souměrnost podle této přímky. Zobrazení f_2 je ovšem posunutím ve směru této přímky, které pro $a_1 = 0$ degeneruje v identitu.

□

Příloha, klasifikace shodností v \mathbb{R}^2

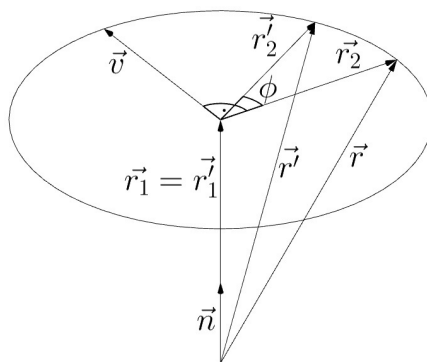


Připomeňte si pojem orientace a vektorové součinu z LA 7.6, LA 8.8 případně souvislost s determinantem LA celá kapitola 7.

Věta 1.11 (Rodriguesova formule). Mějme dva vektory $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, přičemž \mathbf{n} je jednotkový. Pak pro vektor $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$, který dostaneme otočením vektoru \mathbf{r} kolem vektoru $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ o úhel ϕ v kladném směru platí:

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos \phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

Otočením v kladném směru přitom myslíme, že při úhlu $\phi \in (0, \pi)$ tvoří vektory $(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kladně orientovanou bázi \mathbb{R}^3 a při úhlu $\phi \in (-\pi, 0)$ záporně orientovanou.



Důkaz. Rozložme \mathbf{r} na složku $\mathbf{r}_1 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}$ (tj. projekci do směru \mathbf{n}) a složku $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ kolmou na \mathbf{n} . Označme $\mathbf{v} = \mathbf{n} \times \mathbf{r} = \mathbf{n} \times (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) = \mathbf{n} \times \mathbf{r}_2$. Jelikož $\mathbf{n} \perp \mathbf{r}_2$, platí

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{n} \times \mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{n}\| \|\mathbf{r}_2\| = \|\mathbf{r}_2\|.$$

Otočení kolem vektoru \mathbf{n} o úhel ϕ zúžená na $LO\{\mathbf{r}_2, \mathbf{v}\} = LO\{\mathbf{n}\}^\perp$ je zřejmě také otočení o úhel ϕ . Jelikož $(\mathbf{r}_2, \mathbf{v})$ je „násobkem“ „kladně orientované“ ortonormální báze tohoto prostoru, můžeme psát

$$\mathbf{r}'_2 = \cos \phi \mathbf{r}_2 + \sin \phi \mathbf{v}.$$

(Čárka vždy značí obraz v uvažovaném zobrazení.) Dále zřejmě $\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1$. Dohromady dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}'_1 + \mathbf{r}'_2 \\ &= \mathbf{r}_1 + \cos \phi \mathbf{r}_2 + \sin \phi \mathbf{v} \\ &= (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi(\mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) + \sin \phi \mathbf{v} \\ &= (1 - \cos \phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos \phi \mathbf{r} + \sin \phi(\mathbf{n} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

□

Definice 1.12. Připomeňme si z inéární algebry (LA, cvičení 3.5.5), že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso (označované \mathbb{H}) a mají tvar $q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, přičemž $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ a $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}).$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \rightarrow (s, \mathbf{0})$ a vektorový prostor \mathbb{R}^3 je do nich vnořen jako $\mathbf{v} \rightarrow (0, \mathbf{v})$.

Pro tato vnoření a jejich inverzy nebudeme zavádět žádné označení, z kontextu a z aplikovaných operací bude jasné, kdy zacházíme např. s vektorem a kdy s kvaternionem vektoru odpovídajícím. Například ve Větě 1.17 by na pravé straně bylo přesnější psát vektor vzniklý „odvnořením“ kvaternionu $q(0, \mathbf{r})\bar{q}$, což by ale zbytečně zaplevelovalo značení.

Lemma 1.13 (Geometrický význam kvaternionových operací). Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2)$ platí

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \\ q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1). \end{aligned}$$

Důkaz. Plyne přímo z rozepsání q_1 a q_2 pomocí čtyř složek.

Definice 1.14. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

Lemma 1.15. Jednotkové kvaterniony (označované \mathbb{H}_1) tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha),$$

kde \mathbf{n} je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

Důkaz. Snadno ověříme, že pro libovolné dva kvaterniony platí $\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q}_2 \cdot \bar{q}_1$. Multiplikativní invers jednotkového kvaternionu q je \bar{q} , protože $q\bar{q} = 1 = \bar{q}q$ a $\|\bar{q}\| = \|q\| = 1$. Dále jsou-li q_1, q_2 jednotkové kvaterniony, pak

$$\|q_1 q_2\| = \sqrt{(q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2})} = \sqrt{q_1 (q_2 \bar{q}_2) \bar{q}_1} = \sqrt{q_1 \bar{q}_1} = 1,$$

tedy $q_1 q_2$ je jednotkový kvaternion. Jednotkové kvaterniony tak tvoří neprázdnou podmnožinu multiplikativní grupy všech nenulových kvaternionů uzavřenou na skládání a inverze, čili podgrupu.

Je-li $q = (s, \mathbf{v})$ jednotkový kvaternion a $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, potom nutně

$$|s| = \sqrt{\|q\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2} < 1.$$

Jediná možná vyhovující volba $\alpha \in (0, \pi)$ je $\alpha = \arccos s$. Z toho plyne

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\|q\|^2 - s^2} = \sin \alpha,$$

tedy $q = (s, \mathbf{v}) = (\cos \alpha, \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|} \sin \alpha)$ a označíme $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$. □

Lemma 1.16. Pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Věta 1.17. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos \alpha, \mathbf{n} \sin \alpha)$ je lineární zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

otočení kolem osy \mathbf{n} úhel 2α v kladném směru.

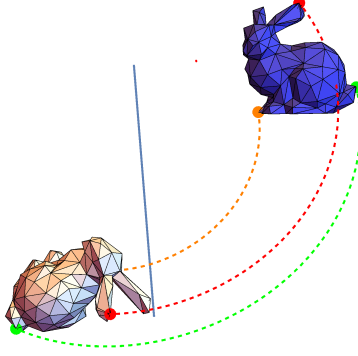
Důkaz. Označme $q = (s, \mathbf{v})$. S využitím Lemmat 1.13 a 1.16

$$\begin{aligned} q\mathbf{r}\bar{q} &= (s, \mathbf{v})(0, \mathbf{r})(s, -\mathbf{v}) \\ &= (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}, \mathbf{v} \times \mathbf{r} + s\mathbf{r})(s, -\mathbf{v}) \\ &= (-\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})s + \underbrace{(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{v}}_0 + s\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, \underbrace{-(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{v} - s\mathbf{r} \times \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + s(\mathbf{v} \times \mathbf{r}) + s^2\mathbf{r}}_{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{r}} \\ &= (0, 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})\mathbf{v} + (s^2 - \|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{r} + 2s(\mathbf{v} \times \mathbf{r})) \\ &= (0, 2\sin^2 \alpha (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)\mathbf{r} + 2\sin \alpha \cos \alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r})) \\ &= (1 - \cos 2\alpha)(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})\mathbf{n} + \cos(2\alpha)\mathbf{r} + \sin 2\alpha (\mathbf{n} \times \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Ovšem to je podle Rodriguesovy formule vektor vzniklý otočením vektoru \mathbf{r} kolem vektoru \mathbf{n} o úhel 2α v kladném směru. □

Příklad 1.18. Vypočítejte vektor, který vznikne otočením vektoru $(1, 0, 0)$ kolem vektoru $(3, 4, 0)$ o úhel $\phi = \pi/3$ v kladném směru.

Věta 1.19. Každá přímá shodnost v \mathbb{R}^3 má alespoň jednu samodružnou přímku a lze ji složit z otočení kolem této přímky a posunutí ve směru této přímky (má tedy tvar šroubového pohybu).



Důkaz. Každé $f \in E_+(3)$ je tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ je ortogonální a $\det \mathbf{A} = 1$. Matice \mathbf{A} je unitární, její vlastní čísla nad \mathbb{C} proto leží na jednotkové kružnici. Zároveň je reálná a stejně tak i koeficienty jejího charakteristického polynomu, tudíž je množina jejích vlastních čísel symetrická podle reálné osy komplexní roviny a musí proto mít tvar $\sigma(\mathbf{A}) = \{\pm 1, e^{i\phi}, e^{-i\phi}\}$, $\phi \in [0, \pi]$. Znaménko prvního vlastního čísla musí být kladné, protože součin všech vlastních čísel je roven $\det \mathbf{A} = 1$. Příklad $\phi = 0$ vede na trojnásobné vlastní číslo 1, a protože unitární matice jsou diagonalizovatelné, znamená to, že $\mathbf{A} = \mathbf{I}_3$. Tvrzení pak zřejmě platí, neboť můžeme uvažovat otočení o nulový úhel kolem osy \mathbf{p} složené s tímto posunutím.

Pokud $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}_3$, je 1 jejím vlastním číslem s algebraickou a z diagonalizovatelnosti i geometrickou násobností 1, existuje tedy právě jeden vlastní směr s tímto vlastním číslem. Nechť \mathbf{v}_1 je jednotkový vlastní vektor s vlastním číslem 1 a $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ jeho doplnění do ortonormální báze \mathbb{R}^3 . Označme $W = LO\{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ortogonální doplněk prostoru $LO\{\mathbf{v}_1\}$ a rozložme

$$\mathbf{p} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3.$$

Můžeme jistě psát

$$f(\mathbf{X}) = [\mathbf{A}\mathbf{X} + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3] + a_1\mathbf{v}_1 = f_2(f_1(\mathbf{X})),$$

kde $f_1(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + a_2\mathbf{v}_2 + a_3\mathbf{v}_3$ a $f_2(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + a_1\mathbf{v}_1$.

Asociovaný homomorfismus $f_{1,A}$ zachovává kolmost vektorů, zachovává tedy i podprostor W jakožto ortogonální doplněk vlastního směru $LO(\mathbf{v}_1)$. Zobrazení f_1 tedy zachovává množinu W také a je přímé. Navíc homomorfismus $f_{1,A}$ zúžený na W není roven identitě. Podle Věty 1.10 o klasifikaci shodností v rovině existuje právě jeden bod $\mathbf{S} = s_2\mathbf{v}_2 + s_3\mathbf{v}_3 \in W$, pro který platí $f_1(\mathbf{S}) = \mathbf{S}$. Přímým výpočtem ověříme, že i všechny

body přímky $p : \mathbf{S} + t\mathbf{v}_1$ jsou samodružnými body zobrazení f_1 . Jedná se tedy o otočení okolo osy p a zobrazení f_2 je zjevně posunutím v jejím směru. □

Poznamenejme, že velikost úhlu otočení je možné určit z matice $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \operatorname{diag}(1, e^{i\phi}, e^{-i\phi}) \mathbf{Q}^{-1}$ pomocí její stopy, protože $\operatorname{Tr}\mathbf{A} = 1 + 2 \cos \phi$.

2 Diferenciální geometrie křivek

Příklad 2.1. Uvažujme v \mathbb{R}^2 jednotkovou kružnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$ bez bodu $(-1, 0)$. Tuto množinu parametrizujme jako $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ pro $t \in (-\pi, \pi)$ a uvažujme reparametrizaci $t = 2 \arctan s$ pro $s \in (-\infty, \infty)$. Nová parametrizace má tvar

$$\mathbf{c}(s) = \left(\frac{1-s^2}{1+s^2}, \frac{2s}{1+s^2} \right)^T, \quad s \in (-\infty, \infty).$$

Tuto parametrizaci racionálními funkcemi lze také přímo geometricky zkonstruovat jako množinu průsečíků kružnice s přímkami z bodu $(-1, 0)$ se směrnici $s \in \mathbb{R}$.

Definice 2.2. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (případně neomezený), spojitě zobrazení $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrická křivka* v \mathbb{R}^n . Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže \mathbf{c} je třídy \mathcal{C}^∞ (tedy má každá její složka spojitou derivaci všech řádů) a *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \dots, 0)^T$ pro každé $t \in I$.

Poznámka 2.3.

1. Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme hladkým zobrazením na I restrikcí na I hladkého zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu.
2. Parametrická křivka je popsána n -ticí funkcí $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \dots, c_n(t))^T$ jedné proměnné definovaných na I .
3. Pro hladkou regulární parametrickou křivku definujeme její funkci rychlosti $\|\mathbf{c}'(t)\|$, která je hladká a kladná.
4. Ve větách a definicích budeme pro jednoduchost pracovat s hladkými křivkami (třídy \mathcal{C}^∞), ale většina pojmů a výsledků platí i pro nižší třídu hladkosti.

Definice 2.4. Je-li $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ hladká regulární parametrická křivka a $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$ hladké bijektivní zobrazení \tilde{I} na I s vlastní a všude nenulovou derivací (tzv. *difeomorfismus*), je

$$\tilde{\mathbf{c}} := \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako \mathbf{c} . Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* \mathbf{c} . Je-li navíc $\phi' > 0$ na \tilde{I} , nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací \mathbf{c} *zachovávající orientaci*.

Definice a lemma 2.5. Býti reparametrizací je relace ekvivalence (kterou označíme \sim) na množině všech hladkých regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka*. Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence (kterou označíme \approx) na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka*.

Důkaz. Z věty o inverzní funkce plyne (viz skripta z MA), že inverzní funkce ϕ^{-1} existuje, je hladká, je bijektivní a má všude vlastní nenulovou derivaci. Tedy i inverzní funkce je hladký difeomorfismus. Dále už stačí jen ověřit podmínky relace ekvivalence:

- Reflexivita: identita je difeomorfismus a tedy $\mathbf{c} = \mathbf{c} \circ id$
- Symetrie: inverze difeomorfismu je difeomorfismus, tedy když $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi \Rightarrow \mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \phi^{-1}$
- Transitivita: složení difeomorfismů je difeomorfismus (opět z řetízkového pravidla), tedy ($\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c} \circ \phi$ a $\tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \tilde{\mathbf{c}} \circ \psi$) $\Rightarrow \tilde{\tilde{\mathbf{c}}} = \mathbf{c} \circ (\phi \circ \psi)$
- Orientace: složení rostoucích funkcí je rostoucí a inverze k rostoucí funkci je rostoucí, tedy pro ϕ, ψ zachovávající orientaci také $\phi \circ \psi$ a ϕ^{-1} zachovávají orientaci.

□

Poznámka 2.6. Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz.

Poznámka 2.7. V diferenciální geometrii studujeme vlastnosti křivek, které se při reparametrizaci nemění nebo mění odpovídajícím způsobem (například mění znaménko při změně orientace). Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací těže křivky. Například pokud máme parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ označovat jednoduše $\mathbf{c}(s)$. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například \mathbf{c}' místo $\mathbf{c}'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Lemma 2.8. Pro derivace dvou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a $\underbrace{\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))}_{\mathbf{c}(s)}$ těže hladké regulární

křivky v každém odpovídajícím bodě platí

$$(\dot{\mathbf{c}}|\dot{\tilde{\mathbf{c}}}|\ddot{\tilde{\mathbf{c}}}) = (\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''') \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 & 3\dot{\phi}\ddot{\phi} \\ 0 & 0 & \dot{\phi}^3 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Přímý výpočet derivace složené funkce řetízkovým pravidlem:

$$\dot{\mathbf{c}}(s_0) = \frac{d}{ds} \Big|_{s_0} \tilde{\mathbf{c}}(s) = \frac{d}{ds} \Big|_{s_0} \mathbf{c}(\phi(s)) = \frac{d}{dt} \Big|_{\phi(s_0)} \mathbf{c}(t) \frac{d}{ds} \Big|_{s_0} \phi(s) = \mathbf{c}'(\phi(s_0))\dot{\phi}(s_0).$$

Dále zderivujeme podle s rovnost $\dot{\mathbf{c}} = \dot{\phi}\mathbf{c}'$:

$$\ddot{\mathbf{c}} = \ddot{\phi}\mathbf{c}' + \dot{\phi}^2\mathbf{c}''$$

Podobně pro třetí derivaci:

$$\ddot{\tilde{\mathbf{c}}} = \ddot{\phi}\mathbf{c}' + \ddot{\phi}\dot{\phi}\mathbf{c}'' + 2\dot{\phi}\ddot{\phi}\mathbf{c}'' + (\dot{\phi})^2\dot{\phi}\mathbf{c}''' = \ddot{\phi}\mathbf{c}' + 3\dot{\phi}\ddot{\phi}\mathbf{c}'' + (\dot{\phi})^3\mathbf{c}'''$$

□

2.1 Rovinné křivky

Pokud se neřekne jinak, budeme v této podkapitole termínem křivka označovat hladkou regulární křivku v \mathbb{R}^2 . V následující definici zavedeme v každém bodě křivky kladně orientovanou ortonormální bázi, jejíž první vektor je ke křivce tečný, a skalární veličinu, která (jak později uvidíme) odpovídá rychlosti stáčení směru křivky.

Definice 2.9. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v \mathbb{R}^2 definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová, nazýváme *inflexní*.

Příklad 2.10. Studujeme křivku $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$, kde $t \in (-2, 2)$ v jejím bodě $t = 1$.

Věta 2.11. Při reparametrizaci křivky v \mathbb{R}^2 zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko.

Důkaz. S využitím lemmatu 2.8

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{\phi}\mathbf{c}'}{\|\dot{\phi}\mathbf{c}'\|} = \text{sign}(\dot{\phi}) \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'(t)\|} = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t).$$

Dále platí

$$\mathbf{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t) = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{n}_*(t).$$

Konečně

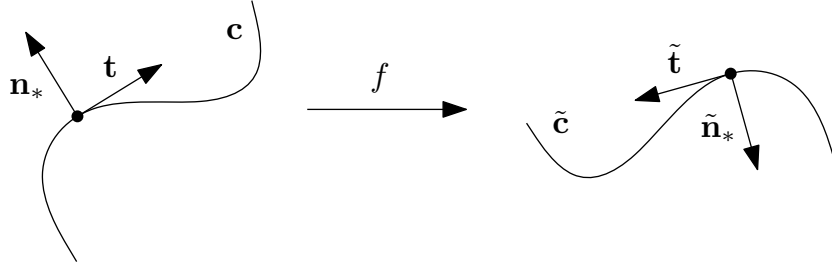
$$\kappa_z(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3} = \frac{\det\left[(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'') \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 \end{pmatrix}\right]}{\|\dot{\phi}\mathbf{c}'\|^3} = \text{sign}(\dot{\phi}) \frac{\det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \text{sign}(\dot{\phi})\kappa_z(t).$$

□

Věta 2.12. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem \mathbb{R}^2 . Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z , \mathbf{t} , \mathbf{n}_* . Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde{\kappa}_z = (\det \mathbf{A})\kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det \mathbf{A})\mathbf{n}_*$.

Důkaz. Uvědomme si, že $\det \mathbf{A} = \pm 1$. Navíc platí, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}''(t).$$



Tedy

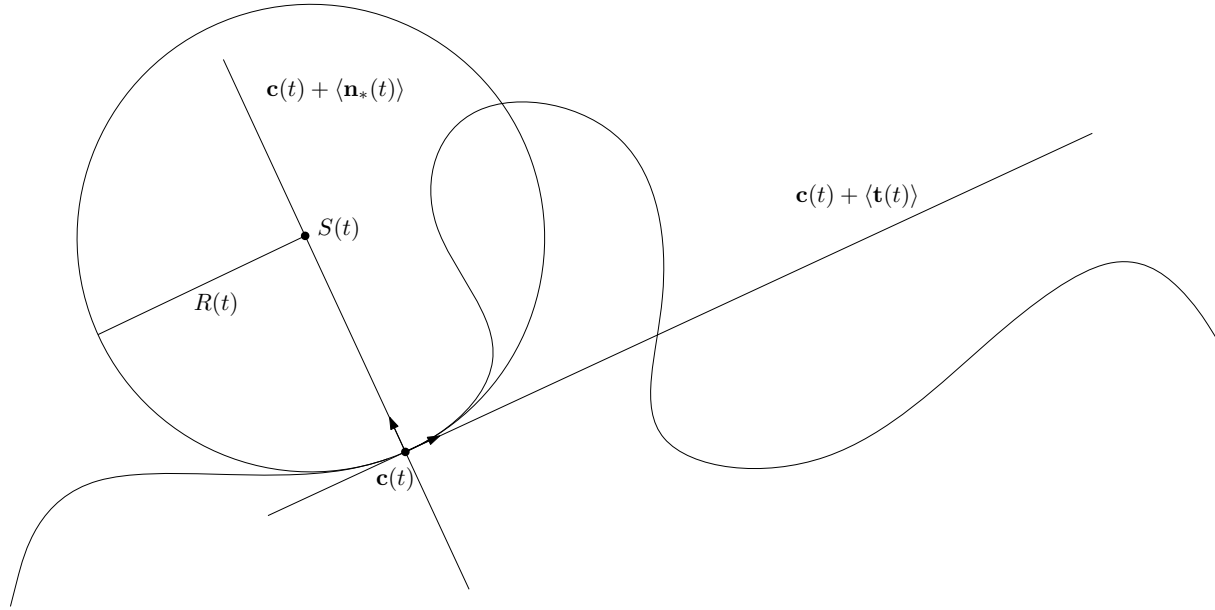
- $$\tilde{\kappa}_z = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}', \tilde{\mathbf{c}}'')}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{A}\mathbf{c}', \mathbf{A}\mathbf{c}'')}{\|\mathbf{A}\mathbf{c}'\|^3} = \frac{\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3} = (\det \mathbf{A})\kappa_z,$$
 neboť pro libovolný vektor $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \Rightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{v}\| = \sqrt{(\mathbf{A}\mathbf{v})^T \mathbf{A}\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}\mathbf{v}} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \|\mathbf{v}\|.$
- $\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{c}'}{\|\mathbf{A}\mathbf{c}'\|} = \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right) = \mathbf{A}\mathbf{t}$
- $\tilde{\mathbf{n}}_* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{t}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{t} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t} = \det(\mathbf{A})\mathbf{n}_*.$

Pro ověření třetí rovnosti na posledním řádku je třeba dosadit oba možné tvary matice \mathbf{A} odpovídající otočení a osové souměrnosti. \square

Definice 2.13. Pro každou křivku \mathbf{c} definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a *normálovou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}_*(t)\}$. Dále v každém neinflexním bodě definujeme její *poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{|\kappa_z(t)|}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa_z(t)}\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Důsledek 2.14. Tečná přímka, normálová přímka a oskulační kružnice se nemění při reparametrizaci a jsou ekvivariantní vůči shodnostem.

Důkaz. Podle Věty 2.11 se tyto objekty zjevně nemění při reparametrizaci zachovávající orientaci a při reparametrizaci měnící orientaci je LO stejný a střed a poloměr křivosti vyjde bez změny znaménka. Podobně podle Věty 2.12 jsou tyto objekty ekvivariantní vůči přímým shodnostem a při bližším pohledu také vůči nepřímým, protože znaménko se vyruší.



Poznámka 2.15. Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech kružnic). Navíc, jestliže označíme $N(t)$ normálovou přímkou v bodě t , pak v každém neinflexním bodě $\mathbf{c}(t_0)$ platí

$$S(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} N(t_0) \cap N(t).$$

Věta 2.16. Pro hladkou regulární parametrickou křivku $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{t}'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\| \kappa_z(t) \mathbf{n}_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ pro $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.

Důkaz. Uvědomme si, že $\|\mathbf{c}'\| = \sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}$. Derivováním a úpravami dostaneme

$$\mathbf{t}' = \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} \right)' = \frac{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} \mathbf{c}'' - \frac{1}{2} \frac{2\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}''}{\sqrt{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'}} \mathbf{c}'}{\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'} = \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3}.$$

Skalárním součinem předchozí rovnice získáme $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{t}' = 0$ a proto je \mathbf{t}' násobkem $\mathbf{n}_*(t)$, tedy $\mathbf{t}' = K \mathbf{n}_*(t)$. Z rovnosti

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det(\mathbf{t}, K \mathbf{n}_*(t)) = K \underbrace{\det(\mathbf{t}, \mathbf{n}_*(t))}_{=1} = K$$

a

$$\det(\mathbf{t}, \mathbf{t}') = \det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}'' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right) = \det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{\|\mathbf{c}'\|^2 \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right) - \underbrace{\det \left(\frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|}, \frac{(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'') \mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|^3} \right)}_0 =$$

$$\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'') \cdot \frac{1}{\|\mathbf{c}'\|^2} = \underbrace{\frac{\det(\mathbf{c}', \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}'\|^3}}_{\kappa_z} \cdot \underbrace{\|\mathbf{c}'\|}_{=r}$$

dostaneme, že $K = r\kappa_z$.

Funkce θ je spojitou verzí argumentu funkce $\mathbf{t}(t)$ a její existence a diferencovatelnost bude podrobněji studována v komplexní analýze. Potom dostáváme

$$\mathbf{t}'(t) = \theta'(t) \underbrace{(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))}_{\mathbf{n}_*(t)}$$

a z předchozí části máme $\theta'(t) = r(t)\kappa_z(t)$. □

Věta 2.17. Na otevřeném intervalu I budiž zadány dvě hladké reálné funkce $f(t)$, $r(t)$, přičemž $r(t) > 0$ pro $t \in I$. Pak existuje až na přímou shodnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, pro kterou platí

$$\|\mathbf{c}'(t)\| = r(t), \quad \kappa_z(t) = f(t).$$

Důkaz. Zafixujme $t_0 \in I$ libovolné a definujme funkci $\theta(t)$ aby platilo

- $\theta'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|\kappa_z(t) = r(t)f(t)$, tedy θ nalezneme jako primitivní funkci k $r(t)f(t)$, která jistě existuje, protože $r(t)f(t)$ je hladká,
- $\theta(t_0) = \theta_0$, kde θ_0 je libovolná konstanta.

Nyní položíme

$$\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

Zřejmě $\|\mathbf{t}(t)\| = 1$ a můžeme tedy konečně definovat

$$\mathbf{c}'(t) = \|\mathbf{c}'(t)\|\mathbf{t}(t) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)).$$

$\mathbf{c}(t)$ nalezneme jako primitivní funkci k $\mathbf{c}'(t)$, což lze, protože $\mathbf{c}'(t)$ je hladká funkce. Zvolíme $X, Y \in \mathbb{R}$ libovolná a nechť $\mathbf{c}_x(t_0) = X$ a $\mathbf{c}_y(t_0) = Y$.

V průběhu konstrukce funkce $\mathbf{c}(t)$ jsme volili polohu bodu $\mathbf{c}(t_0) = (X, Y)$ a směr tečného vektoru $\mathbf{t}(t_0) = (\cos \theta_0, \sin \theta_0)$, čímž jsme určili křivku jednoznačně až na přímou shodnost. □

Z důkazu plyne, že pro danou křivku $\mathbf{c}(t)$ lze definovat funkci $\theta(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos \theta(t), \sin \theta(t))$ pro $t \in I$. Derivací této rovnosti získáme

$$\mathbf{t}'(t) = \theta'(t) \underbrace{(-\sin \theta(t), \cos \theta(t))}_{\mathbf{n}_*(t)}$$

a z Věty 2.16 pak pro znaménkovou křivost platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$, je znaménková křivost rovna rychlosti změny směru křivky.

2.2 Prostorové křivky

Pokud se neřekne jinak, budeme v této kapitole termínem křivka označovat hladkou regulární křivku v \mathbb{R}^3 .

Definice 2.18. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v \mathbb{R}^3 definujeme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(t)$ a *křivost* $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|}, \quad \kappa(t) = \frac{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}{\|\mathbf{c}'(t)\|^3}.$$

Bod, ve kterém je křivost nulová, se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *jednotkový binormálový vektor* $\mathbf{b}(t)$, *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(t)$ a *torzi* $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|}, \quad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \quad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t), \mathbf{c}''(t), \mathbf{c}'''(t))}{\|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|^2}.$$

Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi \mathbb{R}^3 , která se nazývá *Frenetův repér*.

Věta 2.19. Při reparametrizaci křivky v \mathbb{R}^3 zachovávající orientaci se v daném bodě křivost, torze a Frenetův repér nemění. Při reparametrizaci, která mění orientaci se křivost, torze a normálový vektor rovněž nemění, zatímco tečný a binormálový vektor se mění na vektory opačné.

Důkaz. Využijeme lemmatu 2.8 a označíme

$$M = \begin{pmatrix} \dot{\phi} & \ddot{\phi} & \ddot{\phi} \\ 0 & \dot{\phi}^2 & 3\dot{\phi}\ddot{\phi} \\ 0 & 0 & \dot{\phi}^3 \end{pmatrix}.$$

Dále spočítáme

$$\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}} = (\dot{\phi}\mathbf{c}') \times (\ddot{\phi}\mathbf{c}' + \dot{\phi}^2\mathbf{c}'') = (\dot{\phi}\mathbf{c}') \times (\ddot{\phi}\mathbf{c}') + (\dot{\phi}\mathbf{c}') \times (\dot{\phi}^2\mathbf{c}'') = 0 + \dot{\phi}^3(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'').$$

Nyní už máme vše potřebné k důkazu věty, a počítáme

$$\mathbf{t}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{\phi}\mathbf{c}'}{|\dot{\phi}| \|\mathbf{c}'\|} = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t),$$

$$\mathbf{b}(s) = \frac{\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}}{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|} = \frac{\dot{\phi}^3(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{|\dot{\phi}^3| \|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{b}(t),$$

$$\mathbf{n}(s) = \mathbf{b}(s) \times \mathbf{t}(s) = \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{b}(t) \times \text{sign}(\dot{\phi})\mathbf{t}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t) = \mathbf{n}(t),$$

$$\kappa(s) = \frac{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3} = \frac{|\dot{\phi}^3| \|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{|\dot{\phi}^3| \|\mathbf{c}'\|^3} = \kappa(t),$$

$$\tau(s) = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}})}{\|\dot{\mathbf{c}} \times \ddot{\mathbf{c}}\|^2} = \frac{\det(M) \det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')}{\dot{\phi}^6 \|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \tau(t).$$

□

Věta 2.20. Křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem \mathbb{R}^3 . Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ , \mathbf{t} a v neinflexním bodě navíc τ , \mathbf{n} , \mathbf{b} . Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě křivost $\tilde{\kappa} = \kappa$ a tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{t}$. V neinflexních bodech má navíc torzi $\tilde{\tau} = (\det \mathbf{A})\tau$, normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{A}\mathbf{n}$ a binormálový vektor $\tilde{\mathbf{b}} = (\det \mathbf{A})\mathbf{b}$.

Důkaz. Dokažme nejprve, že pro ortonormální matici \mathbf{A} a libovolné vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ platí $\mathbf{A}\mathbf{x} \times \mathbf{A}\mathbf{y} = \det(\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})$. Skutečně, $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{z} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{x} \times \mathbf{A}\mathbf{y}) &= \det(\mathbf{z}, \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{A}^T \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \det(\mathbf{A})(\mathbf{A}^T \mathbf{z}) \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \\ &= \det(\mathbf{A})(\mathbf{z} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})) = \mathbf{z} \cdot (\det(\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{x} \times \mathbf{y})). \end{aligned}$$

Nyní už snadno ověříme dokazované vztahy. Platí totiž, že

$$\tilde{\mathbf{c}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p} \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}'(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}''(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}''(t) \Rightarrow \tilde{\mathbf{c}}'''(t) = \mathbf{A}\mathbf{c}'''(t).$$

Přímým výpočtem dostáváme

$$\tilde{\mathbf{t}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}'}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \mathbf{A}\mathbf{t},$$

$$\tilde{\mathbf{b}} = \frac{\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''}{\|\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''\|} = \frac{\det(\mathbf{A})\mathbf{A}(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = \det(\mathbf{A})\mathbf{b},$$

$$\tilde{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{b}} \times \tilde{\mathbf{t}} = \det(\mathbf{A})(\mathbf{A}\mathbf{b} \times \mathbf{A}\mathbf{t}) = \mathbf{A}(\mathbf{b} \times \mathbf{t}) = \mathbf{A}\mathbf{n},$$

$$\tilde{\kappa} = \frac{\|\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''\|}{\|\tilde{\mathbf{c}}'\|^3} = \frac{|\det(\mathbf{A})| \|\mathbf{A}(\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')\|}{\|\mathbf{A}\mathbf{c}'\|^3} = \frac{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \kappa$$

a konečně

$$\tilde{\tau} = \frac{\det(\tilde{\mathbf{c}}'|\tilde{\mathbf{c}}''|\tilde{\mathbf{c}}''')}{\|\tilde{\mathbf{c}}' \times \tilde{\mathbf{c}}''\|^2} = \frac{\det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \det(\mathbf{A})\tau.$$

□

Definice 2.21. Pro hladkou regulární křivku $\mathbf{c}(t)$ v \mathbb{R}^3 definujeme v každém bodě *tečnou přímkou* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme

- *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$,
- *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t)\}$,
- *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$.

Definice a lemma 2.22. O hladké parametrizované křivce $\mathbf{c}(t)$ řekneme, že je *parametrizovaná obloukem* nebo jednotkovou rychlostí, jestliže pro všechna $t \in I$ platí $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$. Každou hladkou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li $\mathbf{c}(t)$ nějaká parametrizace obloukem, pak všechny ostatní parametrizace této křivky obloukem získáme reparametrizací $t = \phi(s)$, $\phi(s) = \pm s + s_0$, kde s_0 je libovolná konstanta.

Důkaz. Mějme libovolnou hladkou regulární křivku $\mathbf{c}(t)$. Pak platí, že $\|\mathbf{c}'(t)\| > 0$, což je jistě hladká funkce, a tudíž můžeme definovat

$$\psi(t) = \int \|\mathbf{c}'(t)\| dt.$$

Pak tedy platí vztah $\psi(t)' = \|\mathbf{c}'(t)\|$. Funkce ψ je prostá, tudíž definujeme $\phi = \psi^{-1}$. Definujeme nyní $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$, z čehož podle věty o derivaci inverzní funkce plyne

$$\dot{\mathbf{c}} = \dot{\phi} \mathbf{c}' = \frac{1}{\psi'} \mathbf{c}' = \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \mathbf{t}.$$

Z toho ovšem plyne, že $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$, tedy jsme našli parametrizaci obloukem.

Předpokládejme nyní, že máme křivku $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem a její obloukovou reparametrizaci $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$. Pak

$$1 = \|\dot{\mathbf{c}}\| = \|\mathbf{c}'\| |\dot{\phi}| = 1 |\dot{\phi}|,$$

tedy nutně $|\dot{\phi}| = 1 \Rightarrow \dot{\phi} = \pm 1 \Rightarrow \phi = \pm s + s_0$.

Naopak, měli bychom křivku $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem, pak takovou reparametrizací $\phi(s) = \pm s + s_0$ opět dostaneme parametrizaci obloukem z výpočtu výše. □

Lemma 2.23. Pro regulární hladkou křivku $\mathbf{c}(t)$ v \mathbb{R}^3 parametrizovanou obloukem v každém bodě platí $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$ a $\kappa(t) = \|\mathbf{c}''(t)\| = \|\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)\|$. V každém neinflexním bodě navíc $\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{\|\mathbf{c}''(t)\|}$.

Důkaz. Mějme $\mathbf{c}(t)$ parametrizovanou obloukem. Zřejmě platí $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$. Ze vztahu $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$ odvodíme

$$\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}'(t) = 1 \quad \left| \frac{d}{dt} \right.$$

$$2\mathbf{c}'(t) \cdot \mathbf{c}''(t) = 0,$$

tedy $\mathbf{c}'(t) \perp \mathbf{c}''(t)$, čehož plyne, že $\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\| = \|\mathbf{c}'\| \cdot \|\mathbf{c}''\| = \|\mathbf{c}''\|$.

Nyní snadno spočítáme, že

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|}{\|\mathbf{c}'\|^3} = \|\mathbf{c}''\|$$

a užitím Lemmatu 1.16 máme v neinflexních bodech

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} \times \frac{\mathbf{c}'}{\|\mathbf{c}'\|} = \frac{1}{\|\mathbf{c}''\|} ((\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'') \times \mathbf{c}') = \frac{-1}{\|\mathbf{c}''\|} (\mathbf{c}' \times (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')) = \\ &= \frac{-1}{\|\mathbf{c}''\|} ((\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'')\mathbf{c}' - (\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}')\mathbf{c}'') = \frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|}. \end{aligned}$$

□

Věta 2.24 (Frenetovy vzorce). Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v \mathbb{R}^3 parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}, \quad \mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}, \quad \mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}' | \mathbf{n}' | \mathbf{b}') = (\mathbf{t} | \mathbf{n} | \mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$ jako

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \quad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}.$$

Důkaz. Uvažme tři vektory $(\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_3(t))$, které závisí na parametru a pro jeho libovolnou hodnotu $t \in I$ tvoří ON bázi \mathbb{R}^3 . Libovolný vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ lze (pro pevné t) vyjádřit jako

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_3.$$

Tedy speciálně pro každé pevné t platí

$$\mathbf{v}'_i = (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{v}_2 + (\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_3)\mathbf{v}_3, \text{ pro } i = 1, 2, 3.$$

Zřejmě lze psát

$$(\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)M,$$

kde M je matice 3×3 s položkami $m_{ji} = \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_j$.

Protože platí $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$, derivováním podle t dostáváme rovnost $\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_j + \mathbf{v}'_j \cdot \mathbf{v}_i = 0$, čili $\mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}_j = -\mathbf{v}'_j \cdot \mathbf{v}_i$ a tedy M musí být antisymetrická

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -A & -B \\ A & 0 & -C \\ B & C & 0 \end{pmatrix}.$$

V našem případě, kdy $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ a t odpovídá parametrizaci obloukem platí podle Lemmatu 2.23

$$\mathbf{t}' = \mathbf{c}'' = \|\mathbf{c}''\| \frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|} = \kappa \mathbf{n},$$

a tedy dostáváme $A = \kappa, B = 0$. Snadno nahlédneme, že $C = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b}$, a tedy počítáme

$$\begin{aligned} \mathbf{n}' \cdot \mathbf{b} &= \left(\frac{\mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}''\|} \right)' \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = \left(\frac{\mathbf{c}''}{\kappa} \right)' \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\kappa} = \frac{\kappa \mathbf{c}''' - \kappa' \mathbf{c}''}{\kappa^2} \cdot \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\kappa} = \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \cdot [\mathbf{c}''' \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{c}'')] = \frac{\det(\mathbf{c}''' | \mathbf{c}' | \mathbf{c}'')}{\kappa^2} = \frac{\det(\mathbf{c}' | \mathbf{c}'' | \mathbf{c}''')}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|^2} = \tau. \end{aligned}$$

Čtvrtá rovnost plyne z kolmosti vektorů \mathbf{c}'' a $\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''$.

Tudíž

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Dále přímým výpočtem za užití výše dokázaných vztahů mezi vektory Frenetova repéru a jejich derivacemi máme

$$\mathbf{d} \times \mathbf{t} = (\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}) \times \mathbf{t} = \kappa \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \kappa \mathbf{n} = \mathbf{t}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{n} = (\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}) \times \mathbf{n} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t} = \mathbf{n}',$$

$$\mathbf{d} \times \mathbf{b} = (\tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}) \times \mathbf{b} = -\tau \mathbf{n} = \mathbf{b}'.$$

□

Poznámka 2.25. Vidíme tedy, že v parametrizaci obloukem (kdy se poloha bodu mění jednotkovou rychlostí) křivost vyjadřuje rychlost okamžité změny tečného vektoru (a tím i tečné přímky) a torze rychlost okamžité změny binormálového vektoru (a tím i oskulační roviny). Rovněž můžeme okamžitou změnu celého Frenetova repéru chápat jako otočení kolem Darbouxova vektoru, jejíž rychlost je daná jeho délkou, tedy $\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}$, které se někdy říká celková křivost.

Věta 2.26. Necht' $f(t) > 0, g(t)$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I . Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka $\mathbf{c}(t)$ v \mathbb{R}^3 parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že

$$\kappa(t) = f(t), \quad \tau(t) = g(t).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají *přirozené rovnice křivky*.

Věta 2.27. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí, že leží v nějaké rovině právě tehdy, když $\tau(t) = 0$ pro každé $t \in I$.

Důkaz.

- (\implies) Leží-li $\mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$ v nějaké rovině, existují $p, q, r, s \in \mathbb{R}$ taková, že $(p, q, r) \neq (0, 0, 0)$ a pro všechna $t \in I$ je $pc_x(t) + qc_y(t) + rc_z(t) = s$, tedy $\mathbf{c} \cdot (p, q, r) = s$. Postupným derivováním podle t dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{c}' \cdot (p, q, r) &= 0, \\ \mathbf{c}'' \cdot (p, q, r) &= 0, \\ \mathbf{c}''' \cdot (p, q, r) &= 0.\end{aligned}$$

Vektory \mathbf{c}' , \mathbf{c}'' , \mathbf{c}''' všechny leží v prostoru $LO\{(p, q, r)\}^\perp$ dimenze dva, takže jsou lineárně závislé. Z toho plyne rovnost $\det(\mathbf{c}' | \mathbf{c}'' | \mathbf{c}''') = 0$ a tedy i $\tau = 0$.

- (\impliedby) BÚNO uvažujme \mathbf{c} parametrizovanou obloukem. Je-li $\tau(t) = 0$ pro všechna $t \in I$, potom $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n} = \mathbf{0}$, tedy \mathbf{b} je konstantní. Zvolme $t_0 \in I$ libovolné a definujme

$$\mathbf{h}(t) = (\mathbf{c}(t) - \mathbf{c}(t_0)) \cdot \mathbf{b}(t), \quad t \in I.$$

Platí $\mathbf{h}(t_0) = 0$ a $\mathbf{h}' = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{b} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0$, takže $\mathbf{h} = 0$, neboli $\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{c}(t_0) \cdot \mathbf{b}$. Křivka tedy leží v rovině $\mathbf{c}(t_0) + LO\{\mathbf{b}\}^\perp$. \square

Věta 2.28. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ vnořenou do \mathbb{R}^3 zobrazením $(x, y) \rightarrow (x, y, 0)$ platí $\kappa = |\kappa_z|$ a v neinflexních bodech $\mathbf{n} = \text{sign}(\kappa_z) \mathbf{n}_*$.

Důkaz. Necht' $\mathbf{c} = (c_x, c_y) \equiv (c_x, c_y, 0)$. Snadno spočteme

$$\begin{aligned}\kappa_z &= \frac{\det \begin{pmatrix} c'_x & c''_x \\ c'_y & c''_y \end{pmatrix}}{(\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2})^3}, \\ \kappa &= \frac{\| (c'_x, c'_y, 0) \times (c''_x, c''_y, 0) \|}{(\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2 + 0^2})^3} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 0, 0, \det \begin{pmatrix} c'_x & c'_y \\ c''_x & c''_y \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\|}{(\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2})^3} = |\kappa_z|.\end{aligned}$$

Dále v neinflexních bodech označme $\mathbf{t} = (t_x, t_y, 0)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_* &= (-t_y, t_x, 0), \\ \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''}{\|\mathbf{c}' \times \mathbf{c}''\|} = (0, 0, \text{sign}(\kappa_z)), \\ \mathbf{n} &= \mathbf{b} \times \mathbf{t} = \text{sign}(\kappa_z) (-t_y, t_x, 0) = \text{sign}(\kappa_z) \mathbf{n}_*.\end{aligned}$$

\square

2.3 Křivkový integrál

Definice 2.29. Mějme regulární hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v \mathbb{R}^n a reálnou funkci f definovanou na $\langle \mathbf{c} \rangle$. Pak definujeme *Křivkový integrál 1. druhu*

$$\int_{\mathbf{c}} f ds := \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 2.30. Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na (re)parametrizaci.

Důkaz. Ať $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ je regulární hladká parametrická křivka v \mathbb{R}^n , $\mathbf{c}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$, $s \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ je její reparametrizace a f je reálná funkce definovaná na $\langle \mathbf{c} \rangle$.

Rozlišíme dva případy a počítáme:

1. $\dot{\phi} > 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(s)) \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\dot{\phi}(s)\mathbf{c}'(\phi(s))\| ds \\ &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\mathbf{c}'(\phi(s))\| \dot{\phi}(s) ds = \left| \begin{array}{l} t = \phi(s) \\ dt = \dot{\phi} ds \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt. \end{aligned}$$

2. $\dot{\phi} < 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(s)) \|\dot{\mathbf{c}}(s)\| ds &= \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\dot{\phi}(s)\mathbf{c}'(\phi(s))\| ds \\ &= - \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(\mathbf{c}(\phi(s))) \|\mathbf{c}'(\phi(s))\| \dot{\phi}(s) ds = \left| \begin{array}{l} t = \phi(s) \\ dt = \dot{\phi} ds \end{array} \right| = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) \|\mathbf{c}'(t)\| dt, \end{aligned}$$

kde v poslední rovnosti se mínus vykrátí s prohozením mezí.

□

Definice 2.31. Délku křivky definujeme jako integrál prvního druhu z konstantní jednotkové funkce

$$\ell(\mathbf{c}) := \int_{\mathbf{c}} 1 ds.$$

Definice 2.32. Parametrizovaná křivka $\mathbf{c} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\beta)$. Tuto křivku navíc nazveme *jednoduchou*, je-li \mathbf{c} prosté na $[\alpha, \beta]$. Jednoduchá uzavřená rovinná křivka se rovněž nazývá *Jordanova*.

Věta 2.33 (Umlaufsatz). Je-li $\mathbf{c}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ regulární hladká uzavřená křivka, pro kterou navíc $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$, pak existuje $k \in \mathbf{Z}$ (nazývané index křivky) takové, že

$$\int_{\mathbf{c}} \kappa_z ds = 2k\pi.$$

Je-li navíc \mathbf{c} jednoduchá kladně orientovaná křivka, pak $k = 1$.

Ačkoli znaménková křivost κ_z je funkcí parametru t a křivkový integrál máme definován pro funkce bodu $\mathbf{c}(t)$, nevzniká s definicí indexu křivky žádný problém, protože znaménková křivost je invariantní vůči reparametrizacím zachovávajícím orientaci.

Důkaz. (Částečný.) Podle Věty 2.16 existuje hladká funkce $\theta : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ splňující

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(t) &= (\cos \theta(t), \sin \theta(t)), \\ \theta'(t) &= \kappa_z(t) \|\mathbf{c}'(t)\|, \quad t \in [\alpha, \beta].\end{aligned}$$

Z $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$ plyne $\theta(\beta) = \theta(\alpha) + 2k\pi$ pro nějaké $k \in \mathbb{Z}$. Tedy dostáváme

$$\int_{\mathbf{c}} \kappa_z ds = \int_{\alpha}^{\beta} \kappa_z(t) \|\mathbf{c}'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \theta'(t) dt = [\theta(t)]_{\alpha}^{\beta} = 2k\pi.$$

□

Definice 2.34. Mějme regulární hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v \mathbb{R}^n a zobrazení (vektorové pole) $\mathbf{F} : \langle \mathbf{c} \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$. Pak definujeme *Křivkový integrál 2. druhu*

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} := \int_{\alpha}^{\beta} \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) dt,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 2.35. Křivkový integrál 2. druhu nezávisí na reparametrizaci zachovávající orientaci a mění znaménko při změně orientace.

Důkaz. Pro dané \mathbf{c} a \mathbf{F} definujme funkci $f := \mathbf{F} \cdot \mathbf{t}$ (skalární součin pole a tečného vektoru). Pak podle definice snadno ověříme, že platí

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\mathbf{c}} f ds.$$

Ale integrál 1. druhu se nemění při reparametrizaci. Při změně orientace křivky se však f změní na $-f$. □

Věta 2.36 (Greenova věta). Nechť \mathbf{c} je jednoduchá, hladká, uzavřená, regulární, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka v \mathbf{R}^2 . Nechť $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je hladké vektorové pole definované na nějakém okolí uzávěru $\text{Int } \mathbf{c}$. Pak

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\text{Int } \mathbf{c}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Lemma 2.37 (Obsah oblasti). Buď $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$, $t \in [\alpha, \beta]$ kladně orientovaná, hladká, regulární jednoduchá, uzavřená křivka. Pak plošný obsah oblasti $\text{Int } \mathbf{c}$ je roven

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} c_x(t) c'_y(t) dt = - \int_{\alpha}^{\beta} c_y(t) c'_x(t) dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (c_x c'_y - c'_x c_y) dt.$$

Důkaz. Ať $\mathbf{c}(t), t \in [\alpha, \beta]$ je křivka ve znění věty. Dále mějme vektorové pole $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$. Pak z Věty 2.36 dostáváme, že

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\text{Int } \mathbf{c}} 1 dx dy = A.$$

Také ovšem z definice můžeme psát

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\alpha}^{\beta} (0, c_x(t)) \cdot (c'_x(t), c'_y(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} c_x(t) c'_y(t) dt,$$

čímž dostáváme jednu z dokazovaných rovností. Zbylé rovnosti dostaneme analogicky volbou $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 0)$, respektive $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x)$. \square

Lemma 2.38 (Wirtingerovo). Nechť $f(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkce, pro kterou platí $f(0) = f(\pi) = 0$. Pak

$$\int_0^{\pi} f'^2(t) dt \geq \int_0^{\pi} f^2(t) dt$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $f(t) = D \sin(t)$, kde D je konstanta.

Věta 2.39 (Isoperimetrická nerovnost). Buď $\mathbf{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená regulární hladká křivka délky l a buď A plošný obsah $\text{Int } \mathbf{c}$. Pak

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq A,$$

přítom rovnost nastane, právě když \mathbf{c} je kružnice.

Důkaz. Mějme křivku ve znění věty a ať $\mathbf{c}(s)$ je její parametrizace obloukem. Pak $s \in [0, l]$ a $\|\dot{\mathbf{c}}\| = 1$. Dále uijeme reparametrizace $t = \phi(s) = \frac{\pi s}{l}$, z čehož plyne, že $t \in [0, \pi]$ a tudíž pro rychlost platí $\|\mathbf{c}'(t)\| = \|(\phi^{-1})' \cdot \dot{\mathbf{c}}\| = \frac{l}{\pi}$. Navíc celou parametrizovanou křivku zobrazíme přímo shodností tak, aby platilo $\mathbf{c}(0) = \mathbf{c}(\pi) = [0, 0]$ a $\mathbf{c}'(0) = (c'_x, 0)$, kde $c'_x > 0$.

Nyní křivku vyjádříme v „polárních souřadnicích“:

$$\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t)) = r(t)(\cos \theta(t), \sin \theta(t)),$$

kde r, θ jsou hladké a r je kladná vyjma koncových bodů, ve kterých máme $r(0) = r(\pi) = 0$. Platí

$$\left(\frac{l}{\pi}\right)^2 = \|\mathbf{c}'\|^2 = c_x'^2 + c_y'^2 = (r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta)^2 + (r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta)^2 = r'^2 + r^2\theta'^2,$$

z čehož plyne

$$\int_0^{\pi} (r'^2 + r^2\theta'^2) dt = \frac{l^2}{\pi}.$$

Z Lemmatu 2.37 spočítáme plošný obsah oblasti $\text{Int } \mathbf{c}$ jako

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^\pi (c_x c'_y - c_y c'_x) dt = \frac{1}{2} \int_0^\pi (r \cos \theta (r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta) - r \sin \theta (r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2 \theta' dt. \end{aligned}$$

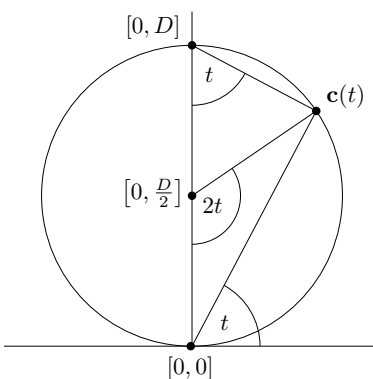
Můžeme tedy počítat:

$$\frac{l^2}{4\pi} - A = \frac{1}{4} \int_0^\pi (r'^2 + r^2 \theta'^2 - 2r^2 \theta') dt = \frac{1}{4} \int_0^\pi r^2 (\theta' - 1)^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^\pi (r'^2 - r^2) dt.$$

Pravá strana je ovšem nezáporná, neboť v prvním integrálu je mocnina a v druhém aplikujeme Lemma 2.38. Celkem tedy

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq A.$$

Zároveň z obou integrálů vidíme, kdy nastane rovnost; v prvním právě tehdy, když $\theta = t$, a v druhém když $r = D \sin(t)$.



V tom případě po přechodu zpátky ke „kartézským souřadnicím“ a drobných úpravách dostáváme

$$\mathbf{c}(t) = \left(0, \frac{D}{2}\right) + \frac{D}{2}(\sin(2t), -\cos(2t)), \quad t \in [0, \pi],$$

takže jde o kružnici. □

3 Afinní prostory a zobrazení

Definice 3.1. Mějme vektorový prostor V dimenze n nad tělesem T . Neprázdnou množinu A spolu se zobrazením $\oplus : A \times V \rightarrow A$ nazveme *afinním prostorem se zaměřením V jestliže*

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{X} \in A : (\mathbf{X} \oplus \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} = \mathbf{X} \oplus (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
2. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in A, \exists! \mathbf{v} \in V : \mathbf{X} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{Y}$, tento vektor značíme $\mathbf{v} = \mathbf{Y} \ominus \mathbf{X}$.

Prvky A nazýváme body afinního prostoru. Dimenzi afinního prostoru definujeme jako dimenzi jeho zaměření. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme místo \oplus psát obyčejné $+$ a místo \ominus psát $-$.

Příklad 3.2. V příkladech se budeme zabývat jen následujícími afinními prostory:

- Množina $A = \mathbb{R}^3$ je afinním prostorem nad vektorovým prostorem $V = \mathbb{R}^3$.
- Obecně pro libovolný vektorový prostor můžeme klást $A = V$ a získáme aritmetický afinní prostor.
- Množina

$$A = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z - 6 = 0\}$$

je afinním prostorem nad

$$V = LO\{(-2, 1, 0)^T, (-3, 0, 1)^T\}.$$

- Obecně je každý lineární útvar (řešení soustavy lineárních rovnic) afinním prostorem nad svým zaměřením (řešením příslušné homogenní soustavy). Jedná se o afinní podprostor aritmetického afinní prostoru.

Věta 3.3. Mějme afinní prostor A se zaměřením V , pak pro libovolné prvky $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in A$; $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

1. $\mathbf{A} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{B} \ominus \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B})$
3. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \ominus \mathbf{C}) = \mathbf{A} \ominus \mathbf{C}$
4. $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{u}) - (\mathbf{B} \oplus \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
5. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{B})$

Důkaz. Pro afinní prostory z Příkladu 3.2 jsou tvrzení zjevná, neboť $\oplus = +$. V obecném případě se vlastnosti musí technicky dokázat z definice, kterýžto důkaz lze nalézt v Dodatku.

Definice 3.4. *Afinní soustavou souřadnic (nebo také repérem) v afinním prostoru A dimenze n rozumíme $(n+1)$ -tici $S = (\mathbf{P}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, kde $\mathbf{P} \in A$ je bod nazývaný počátek a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze V . Pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ definujeme jeho souřadnice v soustavě S vztahem*

$$[\mathbf{X}]_S = [\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B.$$

Jedná se tedy o jednoznačně určenou n -tici skalárů $(t_1, \dots, t_n)^T$ tak, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \dots + t_n\mathbf{u}_n.$$

Pro jednoduchost se i pro vektory dovoluje zápis $[\mathbf{v}]_S := [\mathbf{v}]_B$.

Věta 3.5. Mějme v afinním prostoru A dvě soustavy souřadnic $S = (\mathbf{P}, \underbrace{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n}_B)$ a

$S' = (\mathbf{P}', \underbrace{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n}_{B'})$. Pak pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ platí

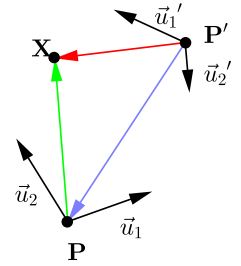
$$[\mathbf{X}]_{S'} = [Id]_{B'}^B [\mathbf{X}]_S + [\mathbf{P}]_{S'}.$$

Zároveň pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ triviálně platí $[\mathbf{v}]_{S'} = [Id]_{B'}^B [\mathbf{v}]_S$.

Důkaz. Afinní souřadnice vektorů jsou definovány jako jejich souřadnice vzhledem k bázi ve V , tedy $[\mathbf{v}]_S := [\mathbf{v}]_B$, $[\mathbf{v}]_{S'} := [\mathbf{v}]_{B'}$. Ze znalosti přechodu mezi bázemi ve vektorových prostorech pak dostáváme $[\mathbf{v}]_{S'} = [Id]_{B'}^B [\mathbf{v}]_S$.

První část tvrzení spočteme přechodem do vektorového prostoru s využitím definice, převodem mezi bázemi zde a pak návratem k druhé soustavě souřadnic.

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}]_{S'} &= [\mathbf{X} - \mathbf{P}']_{B'} = [(\mathbf{X} - \mathbf{P}) + (\mathbf{P} - \mathbf{P}')]_{B'} = \\ &= [(\mathbf{X} - \mathbf{P})]_{B'} + \underbrace{[(\mathbf{P} - \mathbf{P}')]_{B'}}_{[\mathbf{P}]_{S'}} = \\ &= [Id]_{B'}^B \underbrace{[\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B}_{[\mathbf{X}]_S} + [\mathbf{P}]_{S'} \end{aligned}$$



V druhé rovnosti jsme využili třetí bod Věty 3.3 a ve třetí linearitu souřadnic ve vektorových prostorech. \square

Definice a lemma 3.6. Pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A a koeficienty $c_1, \dots, c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ definujeme *afinní kombinaci* $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i$ jako bod

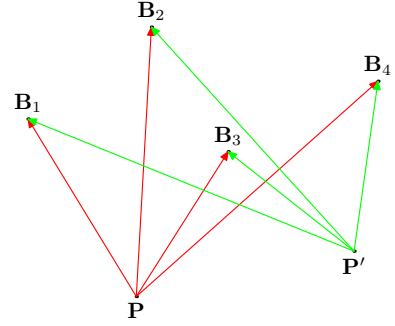
$$\mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}), \quad (1)$$

kde \mathbf{P} je libovolný bod a výraz (1) na jeho volbě nezáleží.

Důkaz. Mějme dva libovolné body \mathbf{P} a \mathbf{P}' . Ukážeme, že se výraz (1) pro \mathbf{P}' rovná tomu pro \mathbf{P} .

Přičteme výraz rovný dle druhého bodu Věty 3.3 nulovému vektoru a upravíme.

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{P}' + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') \right] + \underbrace{(\mathbf{P} - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P})}_{\mathbf{o}} = \\ & = \mathbf{P}' + \left[\sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + (\mathbf{P} - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \right] = \end{aligned}$$



Podle prvního axiomu jsme mohli vektory v hranaté závorce nejprve sečíst, až pak je přičíst k bodu \mathbf{P}' . Dále z komutativity sčítání ve vektorovém prostoru a znovu z druhého axiomu afinního prostoru máme:

$$= \underbrace{[\mathbf{P}' + (\mathbf{P} - \mathbf{P}')]_{\mathbf{P}}}_{\mathbf{P}} + \left[\sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \right] =$$

První člen je roven \mathbf{P} z definice. Vektor $(\mathbf{P}' - \mathbf{P})$ vynásobíme koeficienty c_i , jejichž součet je 1, a posčítáme. Poté sumy sloučíme, vytknutím c_i a použitím třetího bodu z Věty 3.3 získáme výsledek.

$$\begin{aligned} & = \mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) = \\ & = \mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i [(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}') + (\mathbf{P}' - \mathbf{P})] = \left[\mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}) \right] \end{aligned}$$

□

Důsledek 3.7. Jestliže máme jakoukoliv soustavu souřadnic S , pak v ní vyjádříme afinní kombinaci $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i$ snadno jako $[\mathbf{X}]_S = \sum_{i=1}^k c_i [\mathbf{B}_i]_S$. Navíc v aritmetických prostorech a podprostorech (Příklad 3.2) můžeme afinní kombinaci chápat jako lineární kombinaci.

Důkaz. Necht' $S = (\mathbf{P}, \underbrace{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n}_B)$ je soustava souřadnic s počátkem souřadnic \mathbf{P} . Z minulé definice pro \mathbf{X} platí (zvolili jsme \mathbf{P} jako počátek souřadnic)

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + \sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}).$$

Vyjádříme \mathbf{X} v soustavě S .

$$[\mathbf{X}]_S = [\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B = \left[\sum_{i=1}^k c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}) \right]_B = \sum_{i=1}^k c_i [(\mathbf{B}_i - \mathbf{P})]_B = \sum_{i=1}^k c_i [\mathbf{B}_i]_S$$

Použili jsme definici soustavy souřadnic pro vyjádření v B , zavedení \mathbf{X} , linearitu souřadnic ve vektorovém prostoru a opět definici pro vyjádření výsledku v soustavě souřadnic S . □

Definice a lemma 3.8. O libovolných bodech $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A řekneme, že jsou v *obecné poloze* právě tehdy, když vektory $\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1)\}$ jsou lineárně nezávislé. Vlastnost *býti v obecné poloze* nezávisí na pořadí bodů.

Důkaz. Permutací bodů $\mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_k$ se jen permutují vektory $\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1)\}$ a tedy se nemění jejich lineární závislost/nezávislost. Prohozením bodů B_1 a B_2 se přejde k posloupnosti vektorů

$$\{(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_2), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_2)\} = \{-(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1) - (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1) - (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)\}.$$

Nezmění se tedy ani jejich počet, ani jejich lineární obal a tedy ani závislost/nezávislost. Každou jinou permutaci bodů dostaneme složením permutací studovaných.

Definice a lemma 3.9. V afinním prostoru A dimenze n mějme $(n+1)$ bodů $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1}$ v obecné poloze. Pak lze každý bod $\mathbf{X} \in A$ vyjádřit právě jedním způsobem jako afinní kombinaci těchto bodů

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{B}_i, \quad \text{kde } \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1.$$

Posloupnost bodů $Z = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1})$ nazýváme *barycentrická soustava souřadnic* a $(n+1)$ -tici skalárů $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ nazýváme *barycentrické souřadnice* bodu \mathbf{X} .

Důkaz. To že $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{B}_i$ podle definice znamená, že pro libovolné $\mathbf{P} \in A$ platí

$$(\mathbf{X} - \mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{P}).$$

Speciálně můžeme volit $\mathbf{P} = \mathbf{B}_1$ a dostaneme

$$(\mathbf{X} - \mathbf{B}_1) = c_1 \underbrace{(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1)}_{\mathbf{0}} + \sum_{i=2}^{n+1} c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1),$$

tedy se jedná o vyjádření vektoru $(\mathbf{X} - \mathbf{B}_1)$ jako lineární kombinaci vektorů $\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_1)\}$, které tvoří bázi (jsou LN díky obecné poloze a jejich správný počet). Toto vyjádření je tedy jednoznačné. Poznamenejme, že koeficienty c_2, \dots, c_{n+1} můžeme chápat jako libovolné a

$$c_1 = 1 - (c_2 + \dots + c_{n+1}).$$

□

Příklad 3.10. V prostoru $A = \mathbb{R}^2$ vrcholy \mathbf{B}_1 jakéhokoliv trojúhelníku $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic a souřadnice těžiště jsou $(1/3, 1/3, 1/3)$.

Důsledek 3.11. Jestliže $Z = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_{n+1})$ je barycentrická soustava souřadnic a $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ odpovídající barycentrické souřadnice bodu X , pak

$$S = (\mathbf{B}_1, (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_1))$$

je afinní soustava souřadnic a $[\mathbf{X}]_S = (c_2, \dots, c_{n+1})^T$.

Obecněji, jestliže máme libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ a skaláry c_1, \dots, c_k splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$, pak

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_1 + \sum_{i=2}^k c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1),$$

tedy všechny afinní kombinace daných bodů odpovídají tomu, že se k prvnímu bodu přičtou všechny lineární kombinace rozdílových vektorů. Povšimněme si, že druhá summa začíná od $i = 2$, tedy koeficienty lineární kombinace jsou libovolné bez omezení a $c_1 = 1 - (c_2 + \dots + c_k)$.

Definice 3.12. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V . Afinní prostor B nad tělesem T se zaměřením W nazveme *afinní podprostor* prostoru A , pokud $B \subseteq A$, $W \leq V$ a sčítání bodu a vektoru v B je zúžením sčítání bodu a vektoru v A .

Věta 3.13. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V , $\mathbf{X} \in A$ libovolný bod a $W \leq V$ libovolný vektorový podprostor. Pak množina

$$\mathbf{X} + W$$

je afinní podprostor A a každý afinní podprostor lze vyjádřit tímto způsobem, který nazýváme *parametrické vyjádření*.

Důkaz. Nejdříve dokážeme, že je to afinní podprostor A . Je jasné, že se jedná o podmnožinu A a zaměření W je podprostor V .

Nahlédneme, že množina $B = \mathbf{X} + W$ je afinním prostorem, ověřením dvou axiomů. Vlastnost sčítání z prvního axiomu se zdědí z celého prostoru. Ve druhém chceme dokázat

$$\forall \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in B, \exists! \mathbf{w} \in W : \mathbf{Y} + \mathbf{w} = \mathbf{Z}.$$

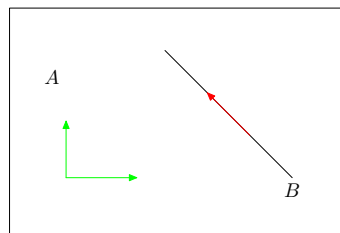
Existuje nejvýše jeden takový vektor \mathbf{w} , protože v celém V , odkud jsou i \mathbf{Y} a \mathbf{Z} , je právě jeden. Ukážeme, že tento vektor je i ve W . Z popisu množiny B máme pro $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{w}_1$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{w}_2.$$

Chceme $(\mathbf{X} + \mathbf{w}_1) + \mathbf{w} = \mathbf{X} + \mathbf{w}_2$, což splníme, když zvolíme $\mathbf{w} := \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_1$. Pak $\mathbf{w} \in W$, protože W je vektorový podprostor. Tedy popisovaná množina je afinní podprostor.

Nyní zbývá ukázat, že každý afinní podprostor B lze vyjádřit tímto způsobem. Stačí vzít libovolný bod $\mathbf{X} \in B$, pak $B = \mathbf{X} + W$, protože platí axiom, že do každého bodu z B se dostaneme přičtením vektoru ze zaměření. \square



Definice 3.14. Necht Z je neprázdná množina bodů afinního prostoru A . Afinním obalem množiny Z rozumíme množinu $AO(Z)$ všech afinních kombinací bodů z Z .

Věta 3.15. Pro každou konečnou neprázdnou množinu bodů je $AO(Z)$ afinním podprostorem. Každý afinní podprostor dimenze k lze vyjádřit jako afinní obal $(k+1)$ bodů. Toto vyjádření nazýváme *bodové vyjádření*.

Důkaz. Označme $Z = (\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_l)$. Pak body $\sum_{i=1}^l c_i \mathbf{B}_i$, kde $\sum_{i=1}^l c_i = 1$, tvoří množinu B všech těchto afinních kombinací, tedy $AO(Z)$. Každou takovou afinní kombinaci můžeme zapsat

$$\underbrace{\mathbf{B}_1}_{\mathbf{X}} + \underbrace{\sum_{i=2}^l c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1)}_{\in W},$$

kde lineární kombinace reprezentovaná sumou může být libovolná, c_i už nemusí mít součet 1, a $W = LO\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_l - \mathbf{B}_1)\}$. Tedy $AO(Z)$ lze vyjádřit jako $\mathbf{X} + W$ a dle Věty 3.13 je to afinní podprostor.

Naopak ukážeme, že každý afinní prostor dimenze k se dá vyjádřit jako AO $k+1$ bodů. Provedeme stejnou úvahu opačně. Máme afinní prostor $B = \mathbf{X} + W$, označíme bázi W jako $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$. Pak $B = AO\{\underbrace{\mathbf{X}, \mathbf{X} + \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{X} + \mathbf{w}_k}_{k+1 \text{ bodů}}\}$. \square

Věta 3.16. Mějme soustavu lineárním rovnic s maticí M typu $m \times n$ nad tělesem T a pravou stranou c . Pak její řešení $\{x : Mx = c\}$ tvoří afinní podprostor aritmetického afinního prostoru T^n . Navíc každý afinní podprostor T^n lze vyjádřit tímto způsobem. Toto vyjádření nazýváme *rovníkové vyjádření*.

Důkaz. Z lineární algebry víme, že množina řešení soustavy $Mx = c$ má tvar $x_1 + \ker M$ pro nějaké partikulární řešení x_1 . Dle Věty 3.13 je tedy tato množina afinním podprostorem. Naopak pro každý podprostor tvaru $\mathbf{X} + W$ můžeme nalézt matici M tak, aby $\ker M = W$ a podprostor je potom řešení soustavy $Mx = c$, kde $c = M\mathbf{X}$. \square

Příklad 3.17. Uvažujme podprostor afinního prostoru \mathbb{R}^4

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + LO \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Chceme, aby naše zaměření W bylo jádrem matice M , budeme tedy řešit homogenní soustavu, kde do řádků vložíme bázi prostoru, který máme.

$$W = LO \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Máme dva pivoty, dvě volné proměnné, tedy řešení bude mít dimenzi 2. (Obecně to 2 být nemusí.)

$$\text{Řešení: } LO \left\{ \left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\}$$

Vektory z báze řešení dáme do řádků matice M .

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \ker M = W$$

Ještě určíme pravou stranu c tak, aby \mathbf{X} byl řešením – jen dosadíme.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Získali jsme soustavu $Mx = c$, jejímž řešením je zadaný afinní podprostor, a jde to takto udělat vždy.

Definice 3.18. (Pod)prostor dimenze 0 je *bod*, (pod)prostor dimenze 1 se nazývá *přímka*, (pod)prostor dimenze 2 se nazývá *rovina*, podprostor dimenze $(n - 1)$ v prostoru dimenze n se nazývá *nadrovina*.

Definice a lemma 3.19. Mějme tři body \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{X} na afinní přímce nad tělesem T , přičemž $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ a $\mathbf{X} \neq \mathbf{B}$. Pak definujeme dělicí poměr

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}} := \lambda,$$

jako jediný skalár, pro který platí $\lambda(\mathbf{B} - \mathbf{X}) = (\mathbf{X} - \mathbf{A})$. Potom platí, že \mathbf{X} je afinní kombinací bodů \mathbf{A} , \mathbf{B}

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\lambda + 1} \mathbf{A} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \mathbf{B}$$

a tedy naopak, jsou-li (c_1, c_2) barycentrické souřadnice \mathbf{X} v soustavě (\mathbf{A}, \mathbf{B}) , pak

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}} = \frac{c_2}{c_1}. \quad (2)$$

Důkaz. Označme $(\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \mathbf{v}$ a nechť $(\mathbf{X} - \mathbf{A}) = \mu\mathbf{v}$. Potom $(\mathbf{B} - \mathbf{X}) = (1 - \mu)\mathbf{v}$ a tedy $\lambda = \frac{\mu}{1 - \mu}$. Ekvivalentně $\mu = \frac{\lambda}{\lambda + 1}$ a máme

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} (\mathbf{B} - \mathbf{A}) = \frac{1}{\lambda + 1} \mathbf{A} + \frac{\lambda}{\lambda + 1} \mathbf{B}.$$

Zjevně pak i $\frac{c_2}{c_1} = \lambda$.

Definice 3.20. Necht A je afinní prostor a $B = \mathbf{X} + U$, $C = \mathbf{Y} + W$ jeho podprostory. Říkáme, že B a C jsou

- *rovnoběžné*, pokud $U \leq W$ nebo $W \leq U$
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a množiny bodů mají neprázdný průnik $B \cap C$.
- *mimoběžné* pokud nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné.

Definice 3.21. Mějme afinní prostory A, B se zaměřenými V, W nad stejným tělesem T . Řekneme, že zobrazení $f : A \rightarrow B$ je *afinní*, jestliže zachovává afinní kombinace, tedy jestliže pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k \in A$ a koeficienty $c_1, \dots, c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ platí

$$f\left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i\right) = \sum_{i=1}^k c_i f(\mathbf{B}_i).$$

Afinní zobrazení $f : A \rightarrow A$ z afinního prostoru do sebe nazveme *afinita*, jestliže je bijektivní.

Důsledek 3.22. Afinní zobrazení zachovávají dělicí poměry. Přesněji, jestliže $f(\mathbf{A}) \neq f(\mathbf{B})$, pak

$$\frac{f(\mathbf{A})f(\mathbf{X})}{f(\mathbf{X})f(\mathbf{B})} = \frac{\mathbf{A}\mathbf{X}}{\mathbf{X}\mathbf{B}}.$$

Důkaz. Protože afinity zachovávají barycentrické souřadnice na přímkách, zachovávají také dělicí poměr, který je s nimi svázán vztahem (2).

Věta 3.23. Zobrazení mezi aritmetickými afinními prostory $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ je afinní právě tehdy když má tvar

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde \mathbf{A} je matice $n \times m$ a \mathbf{p} je vektor $n \times 1$. V případě $m = n$ je toto zobrazení afinitou právě tehdy, když je matice \mathbf{A} regulární. Lineární zobrazení dané maticí \mathbf{A} nazýváme *asociovaný homomorfismus*.

Důkaz. Máli $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ má tvar

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p},$$

pak pro každou afinní kombinaci z \mathbb{T}^m platí

$$f\left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i\right) = \mathbf{A} \left(\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{B}_i\right) + \mathbf{p} = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{A}\mathbf{B}_i + \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{p} = \sum_{i=1}^k c_i (\mathbf{A}\mathbf{B}_i + \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^k c_i f(\mathbf{B}_i),$$

a tedy f je afinní.

Jestliže naopak f je afinní, pak každý bod je afinní kombinací bodů $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0)^T$, $\mathbf{E}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$ pro $i \in \{1, \dots, m\}$ v \mathbb{T}^m . Platí tedy

$$f((c_1, c_2, \dots, c_m)^T) = f\left(\sum_{i=1}^m c_i \mathbf{E}_i + (1 - \sum_{i=1}^m c_i) \mathbf{O}\right) = \mathbf{A}(c_1, c_2, \dots, c_m)^T + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} = f(\mathbf{O})$ a $\mathbf{A} = (f(\mathbf{E}_1) - f(\mathbf{O}) | f(\mathbf{E}_2) - f(\mathbf{O}) | \dots | f(\mathbf{E}_m) - f(\mathbf{O}))$.

Afinní zobrazení je bijekcí právě tehdy když je odpovídající lineární zobrazení bijekcí. To nastane právě tehdy, když je matice \mathbf{A} čtvercová a regulární.

Důsledek 3.24. Afinity z \mathbb{R}^n do sebe vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{A}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{q}$$

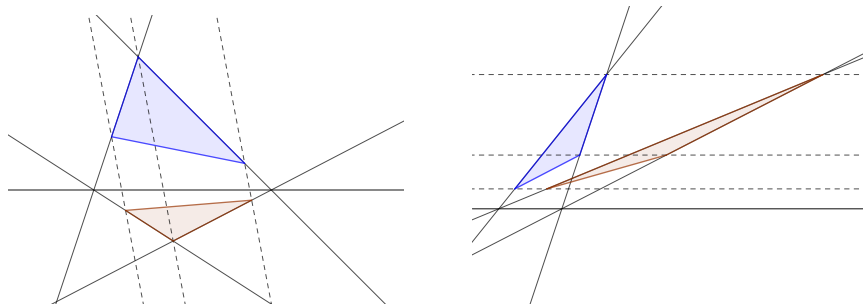
pak

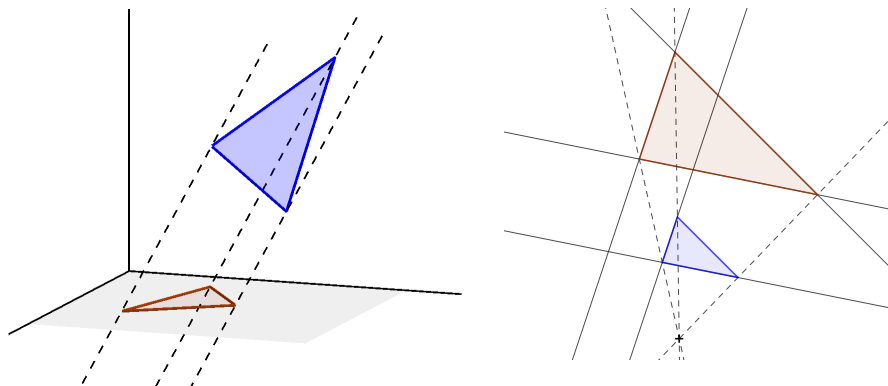
$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

Všechny shodnosti popsané v Důsledku 1.5 jsou i afinitami, $\mathbb{E}(n)$ je tedy podgrupou $\mathbb{A}(n)$. Rovněž afinní grupu můžeme vnořit do maticové grupy způsobem popsaným ve Větě 1.7.

Důsledek 3.25. Afinní zobrazení $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^n$ je jednoznačně dána obrazy $m + 1$ bodů v obecné poloze. Speciálně zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je dáno obrazem 3 bodů, které neleží na jedné afinní přímce.

Poznámka 3.26. I afinity $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je možno klasifikovat podobně jako shodnosti, tříd bude ovšem větší počet, protože máme více stupňů volnosti (stačí aby matice byla regulární, nemusí být ortonormální). Kromě shodností jsou významnými příklady afinit stejnohlelosti (matice je násobkem jednotkové), podobnosti (matice je násobkem ortonormální), osové afinity (existuje celá přímka samodružných bodů). Důležitým příkladem neprostého afinního zobrazení jsou projekce.





Definice 3.27. Pro trojúhelník ABC v \mathbb{R}^2 definujeme jeho orientovaný obsah jako

$$S_{ABC} := \frac{1}{2} \det(B - A | C - A).$$

Věta 3.28. Je-li f afinita v \mathbb{R}^2 tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, pak

$$S_{f(A)f(B)f(C)} = (\det \mathbf{A}) S_{ABC}.$$

Afinity v rovině tedy zachovávají poměry obsahů.

Důkaz. Je-li f afinita s maticí tvaru $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, pak je \mathbf{A} maticí asociovaného homomorfismu. \mathbf{A} je regulární. f zobrazí vektory $B - A$ a $C - A$ na $\mathbf{A}(B - A)$ a $\mathbf{A}(C - A)$. Pro orientovaný obsah zobrazeného trojúhelníku tedy platí

$$\begin{aligned} S_{f(A)f(B)f(C)} &= \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}(B - A) | \mathbf{A}(C - A)) \\ &= \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}(B - A | C - A)) \\ &= \frac{1}{2} \det(\mathbf{A}) \det(B - A | C - A) \\ &= \det(\mathbf{A}) \frac{1}{2} \det(B - A | C - A) \\ &= \det(\mathbf{A}) S_{ABC}. \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána.

Věta 3.29. Nechť $Z = (A, B, C)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic v \mathbf{R}^2 a P, Q, R jsou libovolné body \mathbf{R}^2 . Pak platí

1. Body P, Q, R leží na přímce právě tehdy když $\det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z) = 0$.
2. Obecněji platí $S_{PQR} = \det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z) S_{ABC}$.

Důkaz. Obsah trojúhelníku PQR je roven $S_{PQR} = \frac{1}{2} \det(Q - P | R - P)$ a toto číslo je nulové, právě tehdy když body P, Q, R leží na přímce a trojúhelník je degenerovaný.

Označme barycentrické souřadnice

$$[P]_Z = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}, [Q]_Z = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, [R]_Z = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}.$$

Vyjádříme si determinant ze znění věty a upravíme pomocí řádkových a sloupcových úprav.

$$\begin{aligned} \det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z) &= \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} p_1 + p_2 + p_3 & q_1 + q_2 + q_3 & r_3 + r_2 + r_3 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ p_3 & q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Zároveň

$$P = A + p_2(B - A) + p_3(C - A),$$

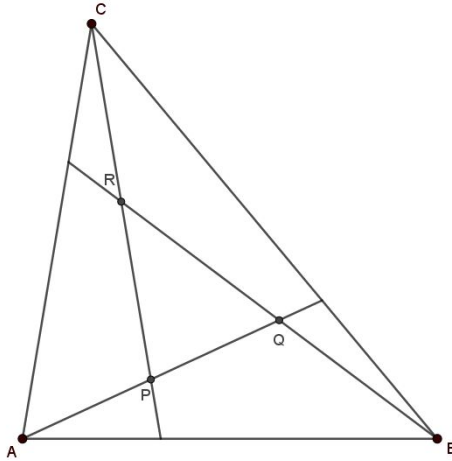
$$Q = A + q_2(B - A) + q_3(C - A),$$

$$R = A + r_2(B - A) + r_3(C - A),$$

a tedy

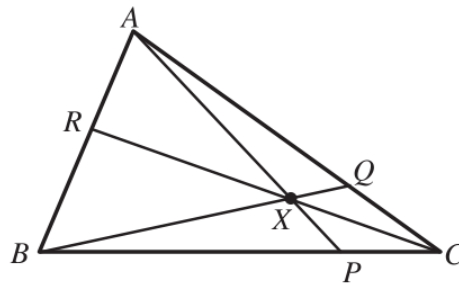
$$\begin{aligned} S_{PQR} &= \frac{1}{2} \det(Q - P | R - P) = \\ &= \frac{1}{2} \det[(q_2 - p_2)(B - A) + (q_3 - p_3)(C - A) | (r_2 - p_2)(B - A) + (r_3 - p_3)(C - A)] = \\ &= \frac{1}{2} \det \left[(B - A | C - A) \begin{pmatrix} q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{2} \det(B - A | C - A) \det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z), \\ &= S_{ABC} \det([P]_Z | [Q]_Z | [R]_Z). \end{aligned}$$

Příklad 3.30. V libovolném trojúhelníku ABC vedme z každého vrcholu spojnicí do (vhodné) třetiny protilehlé strany. Průsečíky těchto spojnic označme P, Q, R . Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR je jedna sedmina obsahu ABC .

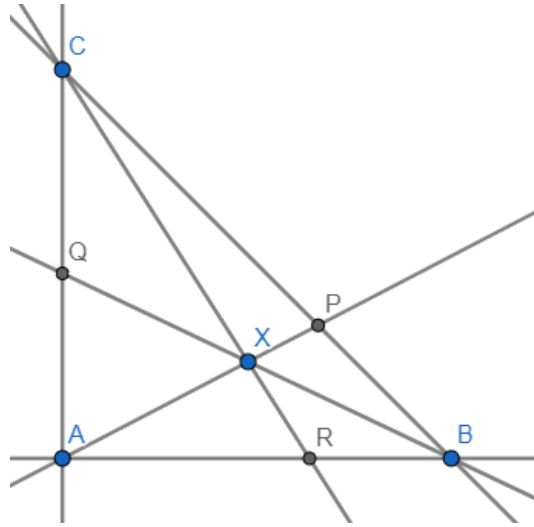


Věta 3.31 (Cevova věta). Mějme trojúhelník ABC a bod X , který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímk). Předpokládejme, že existují průsečíky $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Pak platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$



Důkaz. Protože víme, že afinní zobrazení zachovává dělicí poměry, můžeme říci, že hodnota dělicích poměrů ve znění věty se nezmění, pokud trojúhelník zobrazíme afinním zobrazením na $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$ a $C = [0, 1]$. Bude nám stačit dokázat tvrzení pro tento trojúhelník.



Označíme si souřadnice $X = [x, y]$. Nyní můžeme dopočítat souřadnice bodů P , Q a R .

P je průsečíkem přímk AX a BC . Platí tedy $P = [\alpha x, \alpha y]$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$ a $\alpha x + \alpha y = 1$, tedy $\alpha = \frac{1}{x+y}$ a

$$P = \left[\frac{x}{x+y}, \frac{y}{x+y} \right].$$

R je průsečíkem CX a $y = 0$. Přímk CX dokážeme vyjádřit jako $[0, 1] + t(x, y - 1)$. Dosazením $t = \frac{1}{1-y}$ získáváme

$$R = \left[\frac{x}{1-y}, 0 \right].$$

Stejným způsobem dostaneme

$$Q = \left[0, \frac{y}{1-x} \right].$$

V tuto chvíli jsme schopni dopočítat dělicí poměry.

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\frac{x}{1-y}}{1 - \frac{x}{1-y}} = \frac{\frac{x}{1-y}}{\frac{1-y-x}{1-y}} = \frac{x}{1-y-x}.$$

Protože se dělicí poměr zachovává i když ho počítáme jen pro jednu ze souřadnic, můžeme si vybrat, kterou do výpočtu dosadíme. Tentokrát budeme počítat pouze s první souřadnicí.

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\frac{x}{x+y} - 1}{0 - \frac{x}{x+y}} = \frac{x - x - y}{-x} = \frac{y}{x}$$

V posledním případě budeme počítat podle druhé souřadnice, protože první souřadnice je nulová.

$$\frac{CQ}{QA} = \frac{\frac{y}{1-x} - 1}{0 - \frac{y}{1-x}} = \frac{y - 1 + x}{-y}$$

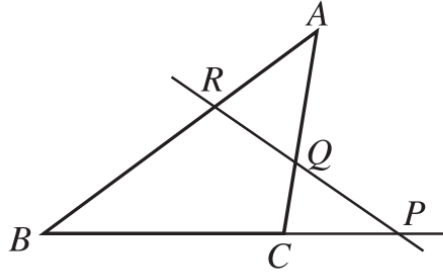
Po dosazení získáváme

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = \frac{x}{1-y-x} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{y+x-1}{-y} = 1.$$

Tím je důkaz dokončen.

Věta 3.32 (Menelaova věta). Mějme trojúhelník ABC a přímku p , která neprochází žádným z vrcholů a není rovnoběžná se žádnou se stran. Označme si $P = p \cap BC$, $Q = p \cap CA$ a $R = p \cap AB$. Pak platí

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$



Důkaz. Označme si dělicí poměry ve znění věty $\frac{AR}{RB} = \lambda_r$, $\frac{BP}{PC} = \lambda_p$ a $\frac{CQ}{QA} = \lambda_q$. Chceme vyjádřit body R , P a Q vzhledem k soustavě souřadnic $Z = (A, B, C)$. Z definice dělicího poměru plyne

$$R = \frac{1}{\lambda_r + 1}A + \frac{\lambda_r}{\lambda_r + 1}B$$

$$P = \frac{1}{\lambda_p + 1}B + \frac{\lambda_p}{\lambda_p + 1}C$$

$$Q = \frac{1}{\lambda_q + 1}C + \frac{\lambda_q}{\lambda_q + 1}A$$

Z Věty 3.29 víme, že body P , Q , R leží na přímce právě tehdy když $\det([R]_Z|[P]_Z|[Q]_Z) = 0$. Vyjádříme si tedy tento determinant.

$$\begin{aligned} 0 = \det([R]_Z|[P]_Z|[Q]_Z) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\lambda_r+1} & \frac{\lambda_r}{\lambda_r+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_p+1} & \frac{\lambda_p}{\lambda_p+1} \\ \frac{\lambda_q}{\lambda_q+1} & 0 & \frac{1}{\lambda_q+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda_r+1} \cdot \frac{1}{\lambda_p+1} \cdot \frac{1}{\lambda_q+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda_r & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_p \\ \lambda_q & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(\lambda_r+1)(\lambda_p+1)(\lambda_q+1)} \cdot (1 + \lambda_r\lambda_p\lambda_q) \end{aligned}$$

Víme, že

$$\frac{1}{(\lambda_r+1)(\lambda_p+1)(\lambda_q+1)} \neq 0,$$

proto musí platit

$$1 + \lambda_r\lambda_p\lambda_q = 0$$

$$-1 = \lambda_r\lambda_p\lambda_q = \frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA}.$$

4 Projektivní geometrie

Definice 4.1. Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $n+1$ nad tělesem T . Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V nazveme *projektivním prostorem dimenze n* nad tělesem T a označujeme ho $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nebo zkráceně jen \mathbb{P}^n :

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1}) = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Prvky této množiny nazýváme *projektivními body* a odpovídající vektory \mathbf{v} jejich *vektorovými zástupci*. Zjevně, jestliže \mathbf{v} je vektorovým zástupcem X , pak pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ je i $\lambda\mathbf{v}$ vektorovým zástupcem X .

Definice 4.2. Mějme vektorový prostor V dimenze $n+1$ nad tělesem T a odpovídající projektivní prostor \mathbb{P}^n . Libovolnou bázi $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ nazveme *soustavou projektivních souřadnic* prostoru \mathbb{P}^n . Souřadnicemi bodu $X \in \mathbb{P}^n$ pak rozumíme uspořádanou $n+1$ -tici skalárů (c_1, \dots, c_{n+1}) takovou, že

$$X = LO \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{v}_i \right\}.$$

Tyto souřadnice jsou dány až na násobek, protože pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně (c_1, \dots, c_{n+1}) a $(\lambda c_1, \dots, \lambda c_{n+1})$ určují stejný projektivní bod X . Proto se těmito souřadnicím někdy říká *homogenní* a zjevně vždy alespoň jedno c_i musí být nenulové. Konečně pro libovolné $0 \neq \mu \in T$ zjevně báze $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ a $(\mu\mathbf{v}_1, \dots, \mu\mathbf{v}_{n+1})$ určují stejný systém projektivních souřadnic.

Definice 4.3. Podmnožinu projektivního prostoru $M \subset \mathbb{P}^n$ nazveme *projektivním podprostorem dimenze k* , jestliže existuje vektorový podprostor $W \leq V^{n+1}$ dimenze $k+1$ tak, že

$$M = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in W, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Projektivní (pod)prostor dimenze 0 nazýváme bod, (pod)prostor dimenze 1 přímka, (pod)prostor dimenze 2 rovina a podprostor maximální dimenze $n-1$ nadrovina.

Definice 4.4. Jestliže $\mathbb{P}(V^{k+1})$ je podprostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ a $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{k+1})$ nějaká báze V^{k+1} , pak lze každý bod $X \in \mathbb{P}(V^{k+1})$ vyjádřit jako

$$X = LO \left\{ \sum_{i=1}^{k+1} t_i \mathbf{w}_i \right\}.$$

Tomuto vyjádření říkáme *parametrické vyjádření podprostoru*. Pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně (t_1, \dots, t_{k+1}) a $(\lambda t_1, \dots, \lambda t_{k+1})$ určují stejný projektivní bod X .

Definice 4.5. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T . Každá nadrovina $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ může být popsána pomocí nenulové lineární formy $\ell \in V_*^{n+1}$, která je prvkem duálního prostoru :

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \ell(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Toto vyjádření nazýváme *rovnicové vyjádření nadroviny*. Navíc, pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ popisuje $\lambda \ell$ tutéž nadrovinu. Souřadnice lineární formy označujeme jako řádky s hvězdičkou.

Příklad 4.6 (Výpočty v projektivní rovině.). V projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka a každé dvě různé přímky se protnou v jednom bodě. Mějme zadány body $A = (1, 2, 3)$, $B = (1, 0, -1)$, $C(0, 1, 1)$, $D(5, 2, 1)$. Určete bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.

Definice a lemma 4.7. Mějme v projektivním prostoru \mathbb{P}^n nad tělesem T čtyři navzájem různé body A, B, C, D , které leží na jedné projektivní přímce. Nechť $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a necht' platí

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Pak definujeme *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) := \frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} \equiv \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T,$$

kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže $(A, B, C, D) = -1$, řekneme, že uspořádaná čtveřice bodů tvoří *harmonickou čtveřici*.

Důkaz. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou nenulové (každý je zástupcem projektivního bodu, tedy generuje jednodimenzionální podprostor), žádný není násobkem jiného (projektivní body jsou různé) a leží v dvoudimenzionálním prostoru (body leží na projektivní přímce). Libovolné dva z nich tedy tvoří bázi onoho dvoudimenzionálního prostoru.

Navíc uvedený zlomek definující dvojpoměr nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže namísto vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ zvolíme jako jiné zástupce jejich násobky

$$\tilde{\mathbf{a}} = \lambda_a \mathbf{a}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \lambda_b \mathbf{b}, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \lambda_c \mathbf{c}, \quad \tilde{\mathbf{d}} = \lambda_d \mathbf{d},$$

pak platí

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{c}} &= \underbrace{\frac{\lambda_c}{\lambda_a} \alpha_1}_{\tilde{\alpha}_1} \tilde{\mathbf{a}} + \underbrace{\frac{\lambda_c}{\lambda_b} \beta_1}_{\tilde{\beta}_1} \tilde{\mathbf{b}} \\ \tilde{\mathbf{d}} &= \underbrace{\frac{\lambda_d}{\lambda_a} \alpha_2}_{\tilde{\alpha}_2} \tilde{\mathbf{a}} + \underbrace{\frac{\lambda_d}{\lambda_b} \beta_2}_{\tilde{\beta}_2} \tilde{\mathbf{b}}\end{aligned}$$

a tedy

$$\frac{\tilde{\alpha}_2 \tilde{\beta}_1}{\tilde{\alpha}_1 \tilde{\beta}_2} = \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2}.$$

Poznámka 4.8. Pro permutace pořadí bodů platí rovnosti

$$(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1}$$

$$(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - (A, B, C, D)$$

Obecně tedy pro 24 permutací získáváme až 6 hodnot dvojpoměru $k, 1 - k, k^{-1}, 1 - k^{-1}, (1 - k)^{-1}, 1 - (1 - k)^{-1}$. Pro harmonickou čtveřici jen tři: $-1, 2, \frac{1}{2}$.

Definice 4.9. Mějme dva projektivní prostory $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(V^{m+1})$ a $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad stejným tělesem T a nějakou podmnožinu $A \subset \mathbb{P}^m$. O zobrazení

$$F : A \rightarrow \mathbb{P}^n$$

řekneme, že je projektivní, jestliže existuje lineární zobrazení $\bar{F} : V^{m+1} \rightarrow V^{n+1}$ tak, že pro každé $\mathbf{v} \in V^{m+1}$ takové, že $LO\{\mathbf{v}\} \in A$ platí

$$F(LO\{\mathbf{v}\}) = LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\}.$$

Poznámka 4.10. Omezení na podmnožinu A v definici 4.9 je nutné z toho důvodu, že když lineární zobrazení \bar{F} není prosté, tak zobrazení F nemůže být definováno na bodech reprezentovaných vektory z $\ker \bar{F}$, neboť $LO\{\mathbf{0}\}$ není projektivní bod. Jestliže je \bar{F} prosté, pak je F definováno na celém prostoru \mathbb{P}^m , v opačném případě na doplňku projektivního podprostoru (odpovídajícího $\text{Ker}\bar{F}$). Budeme studovat zejména projektivní zobrazení na témže prostoru (tedy $m = n$) generovaná regulárními lineárními zobrazeními na V^{n+1} .

Věta 4.11. Projektivní zobrazení $F : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ z projektivního prostoru do sebe jsou bijektivní právě tehdy, když odpovídající lineární zobrazení \bar{F} jsou bijektivní. Tato zobrazení F nazveme *projektivní transformace* nebo též *projektivita*. Všechny projektivní transformace daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá *projektivní grupa*.

Důkaz. Nechť \bar{F} je bijekce. Zvolme \mathbf{v}, \mathbf{w} z příslušného vektorového prostoru V^{n+1} a označme $X = LO\{\mathbf{v}\}, Y = LO\{\mathbf{w}\}$. Předpokládejme $F(X) = F(Y)$, z definice \bar{F} plyne $LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\} = LO\{\bar{F}(\mathbf{w})\}$. Jelikož se rovnají lineární obaly, musí se generující vektory lišit pouze o nějaký nenulový násobek λ , tedy $\bar{F}(\mathbf{v}) = \lambda \bar{F}(\mathbf{w}) = \bar{F}(\lambda \mathbf{w})$, neboť \bar{F} je lineární zobrazení. Díky prostotě \bar{F} máme $\mathbf{v} = \lambda \mathbf{w}$ a nakonec $LO\{\mathbf{v}\} = LO\{\mathbf{w}\}$, neboli $X = Y$ a F je prosté. Z toho, že \bar{F} je surjektivní plyne, že v jeho obrazu jsou všechny vektory a tedy i všechny jednodimenzionální podprostory a tedy F je surjektivní.

Jestliže naopak předpokládáme, že F je bijekce, pak musí být \bar{F} prosté, protože jinak by F nebylo definováno pro lineární obaly vektorů z $\text{Ker}\bar{F}$. Ze surjektivity F pak plyne, že pro libovolné $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ musí existovat $\lambda \neq 0$ takové, že $\lambda \mathbf{v} \in \text{Im}\bar{F}$ a z linearit je i $\mathbf{v} \in \text{Im}\bar{F}$.

Projektivní transformace F tvoří grupu, protože skládání, identita a braní inverzního zobrazení odpovídají těmto operacím pro bijektivní lineární zobrazení \bar{F} . Obě grupy však nejsou isomorfní, protože lineární zobrazení \bar{F} a $\lambda \bar{F}$ odpovídají stejnému projektivnímu zobrazení F . Lineární zobrazení tvoří tak zvanou obecnou lineární grupu $\text{GL}(n+1)$, zatímco projektivní transformace tak zvanou projektivní grupu $\text{PGL}(n) = \text{GL}(n+1)/T^*$, kde T^* označuje multiplikativní grupu nenulových skalárů. \square

Věta 4.12. Projektivní transformace zachovávají dvojpoměr. Jestliže je tedy F projektivní transformace, pak

$$(A, B, C, D) = (F(A), F(B), F(C), F(D)).$$

Důkaz. Necht' $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou vektoroví reprezentanti bodů A, B, C, D a dále necht'

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}.\end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned}\bar{F}(\mathbf{c}) &= \bar{F}(\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}) = \alpha_1 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_1 \bar{F}(\mathbf{b}) \\ \bar{F}(\mathbf{d}) &= \bar{F}(\alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}) = \alpha_2 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_2 \bar{F}(\mathbf{b}),\end{aligned}$$

kde \bar{F} je lineární zobrazení příslušné F . Vektory $\bar{F}(\mathbf{a}), \bar{F}(\mathbf{b}), \bar{F}(\mathbf{c})$ a $\bar{F}(\mathbf{d})$ reprezentují body $F(A), F(B), F(C)$ a $F(D)$. Vidíme, že F zachovává koeficienty lineární kombinace, a proto se dvojpoměr nezmění. \square

Věta 4.13. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n + 2$ bodů X_1, \dots, X_{n+2} z nichž žádných $n + 1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že

$$\begin{aligned}X_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ X_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ X_n &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ X_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 1) \\ X_{n+2} &= (1, 1, \dots, 1, 1).\end{aligned}$$

Důkaz. Body X_1, \dots, X_{n+1} lze vyjádřit jako $X_1 = LO\{\mathbf{v}_1\}, X_2 = LO\{\mathbf{v}_2\}, \dots, X_{n+1} = LO\{\mathbf{v}_{n+1}\}$, kde $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1} \in V^{n+1}$ jsou lineárně nezávislé vektory. Označme $B_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1})$ bázi prostoru V^{n+1} . Souřadnice bodu X_i vzhledem k soustavě projektivních souřadnic C prostoru \mathbb{P}^n budeme značit $[X_i]_C$. Pak máme

$$\begin{aligned}[X_1]_{B_1} &= (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_1} &= (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_1} &= (0, 0, \dots, 0, 1).\end{aligned}$$

Uvažujme $[X_{n+2}]_{B_1} = (c_1, \dots, c_{n+1})$. Všechna čísla c_i jsou nenulová, jinak by totiž X_{n+2} ležel v nějaké nadrovině společně s n body X_i , a to je spor s předpoklady věty. Položme

$B_2 = (c_1 \mathbf{v}_1, c_2 \mathbf{v}_2, \dots, c_{n+1} \mathbf{v}_{n+1})$ projektivní soustavu souřadnic. Pak ale můžeme zapsat

$$\begin{aligned} [X_1]_{B_2} &= (c_1^{-1}, 0, \dots, 0, 0) = (1, 0, \dots, 0, 0) \\ [X_2]_{B_2} &= (0, c_2^{-1}, \dots, 0, 0) = (0, 1, \dots, 0, 0) \\ &\vdots \\ [X_n]_{B_2} &= (0, 0, \dots, c_n^{-1}, 0) = (0, 0, \dots, 1, 0) \\ [X_{n+1}]_{B_2} &= (0, 0, \dots, 0, c_{n+1}^{-1}) = (0, 0, \dots, 0, 1) \\ [X_{n+2}]_{B_2} &= (1, 1, \dots, 1, 1), \end{aligned}$$

jelikož souřadnice bodu projektivního prostoru vynásobené nenulovou konstantou určují stejný bod. \square

Důsledek 4.14. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n+2$ bodů X_1, \dots, X_{n+2} z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině, a také $n+2$ bodů Y_1, \dots, Y_{n+2} z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje právě jedno projektivní zobrazení $F: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, pro které platí

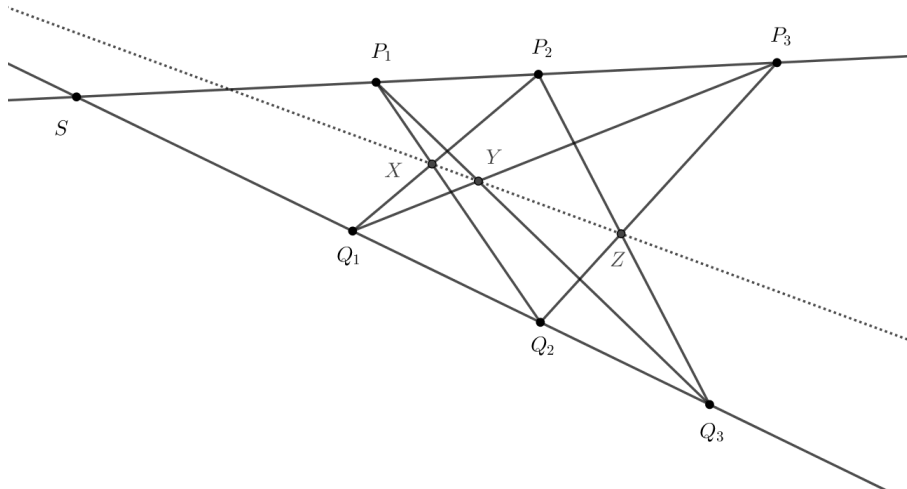
$$F(X_i) = Y_i, \quad i = 1, \dots, n+2$$

Důkaz. Necht $X_i = LO\{\mathbf{x}_i\}$ a $Y_i = LO\{\mathbf{y}_i\}$. V duchu důkazu Věty (4.13) nalezneme jednoznačně (až na případný společný stejný násobek) skaláry c_i tak, aby lineární zobrazení dané jednoznačně předpisem $\bar{F}(\mathbf{x}_i) = c_i \mathbf{y}_i$, $i = 1, \dots, n+1$ splnilo i $\bar{F}(\mathbf{x}_{n+2}) = \mathbf{y}_{n+2}$.

Věta 4.15 (Pappova věta). V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme dvě přímky p , q , které se protínají v bodě S . Na přímce p mějme body P_1, P_2, P_3 různé navzájem a různé od S . Podobně na přímce q mějme body Q_1, Q_2, Q_3 různé navzájem a různé od S . Pak platí, že body

$$X := \overleftrightarrow{P_1 Q_2} \cap \overleftrightarrow{P_2 Q_1}, \quad Y := \overleftrightarrow{P_1 Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3 Q_1}, \quad Z := \overleftrightarrow{P_2 Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3 Q_2}$$

leží na přímce.



Důkaz. Nejprve si všimneme, že bod X neleží na přímce $\overleftrightarrow{P_1Q_1}$, protože pak by body P_1 a P_2 splývaly. Podle věty 4.10. můžeme zvolit soustavu projektivních souřadnic tak, že $S = (1, 0, 0)$, $P_1 = (0, 1, 0)$, $Q_1 = (0, 0, 1)$ a $X = (1, 1, 1)$. Popis přímky $\overleftrightarrow{SP_1}$ získáme jako řešení soustavy

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Neboli $\overleftrightarrow{SP_1} = (0, 0, 1)^*$. Podobně získáme $\overleftrightarrow{SQ_1} = (0, 1, 0)^*$, $\overleftrightarrow{P_1X} = (1, 0, -1)^*$ a $\overleftrightarrow{Q_1X} = (1, -1, 0)^*$. Body P_2 , Q_2 spočítáme jako průniky přímek $\overleftrightarrow{Q_1X}$ a $\overleftrightarrow{SP_1}$, respektive $\overleftrightarrow{P_1X}$ a $\overleftrightarrow{SQ_1}$. To odpovídá řešení soustav

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy $P_2 = (1, 1, 0)$, $Q_2 = (1, 0, 1)$. Bod P_3 leží na přímce $\overleftrightarrow{SP_1}$, lze ho tedy zapsat jako lineární kombinaci $t_1S + t_2P_1$. Oba tyto koeficienty musí být zřejmě nenulové, jinak by P_3 splýval s S nebo P_1 . Můžeme proto položit $P_3 = t_1(1, 0, 0) + t_2(0, 1, 0) = (t_1, t_2, 0) = (1, \alpha, 0)$, kde $\alpha = \frac{t_2}{t_1}$. Stejnou úvahou dostaneme $Q_3 = (1, 0, \beta)$. Nyní spočteme $\overleftrightarrow{P_3Q_1} = (\alpha, -1, 0)^*$, $\overleftrightarrow{P_3Q_2} = (-\alpha, 1, \alpha)^*$, $\overleftrightarrow{P_1Q_3} = (\beta, 0, -1)^*$ a $\overleftrightarrow{P_2Q_3} = (-\beta, \beta, 1)^*$. Pomocí soustav

$$\begin{pmatrix} \beta & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} -\beta & \beta & 1 \\ -\alpha & 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

kteří odpovídají hledání průniku $\overleftrightarrow{P_1Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_1}$ a $\overleftrightarrow{P_2Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_2}$, spočteme $Y = (1, \alpha, \beta)$ a $Z = (\alpha\beta - 1, \alpha\beta - \alpha, \alpha\beta - \beta)$. To, že body X, Y, Z leží na jedné přímce ověříme z definice znamená, že vektory $(1, 1, 1)$, $(1, \alpha, \beta)$ a $(\alpha\beta - 1, \alpha\beta - \alpha, \alpha\beta - \beta)$ jsou lineárně závislé, což je zřejmé. \square

Definice 4.16. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a kvadratickou formu q na V^{n+1} . Neprázdnou množinu

$$Q = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, q(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\} \subset \mathbb{P}(V^{n+1})$$

nazveme projektivní kvadrikou. Tuto kvadriku nazýváme *regulární*, jestliže je forma q regulární, tedy má hodnost $n + 1$. Kvadriky v projektivní rovině nazýváme též kuželosečky.

Definice 4.17. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm kvadriku Q danou kvadratickou formou q a nechť b je příslušná symetrická bilineární forma, tedy $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Řekneme, že dva body $X = LO(\mathbf{v})$, $Y = LO(\mathbf{w})$ jsou *polárně sdružené*, jestliže $b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

Definice a lemma 4.18 (O polaritě). Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm regulární kvadriku Q . Pak

1. Body sdružené s libovolným bodem $X \in \mathbb{P}(V^{n+1})$ tvoří nadrovinu, kterou nazveme *polára* k X a označíme p_X .

2. Naopak každá nadrovina je polárou k právě jednomu bodu, který se nazývá jejím *pólem*.

3. Pro libovolné dva body X, Y platí

$$X \in p_Y \Leftrightarrow Y \in p_X.$$

4. Bod je X sdružen sám se sebou (neboli leží na své poláře p_X) právě tehdy, když leží na Q .

$$X \in p_X \Leftrightarrow X \in Q.$$

V tomto případě p_X nazýváme tečnou nadrovinou ke Q v bodě X .

Důkaz. Zvolme pevně bázi prostoru V^{n+1} a označme B matici odpovídající symetrické bilineární formy vzhledem k této bázi.

1. Pro libovolné $X = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ hledejme polárně sdružené body. Bod $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ je polárně sdružen s X právě tehdy když

$$\underbrace{X^T B Y}_{p_X} = 0.$$

Avšak $X^T B \neq 0$ je nenulový řádek (B je regulární) a tedy získáváme jednu lineární podmínku na Y danou jako nulování lineární formy $p_X = X^T B$. Tyto body tedy tvoří nadrovinu.

2. Mějme naopak nějakou nadrovinu popsanou jako jádro formy $p = (p_1, \dots, p_{n+1})^*$. Pak díky regularitě B existuje právě jedno X takové, že $p = X^T B$.

3. Triviálně plyne ze symetrie B , protože

$$X^T B Y = 0 \Leftrightarrow Y^T B X = 0.$$

4. Bod X je z definice sdružen sám se sebou právě tehdy když $X^T B X = 0$, což přesně znamená, že $X \in Q$.

Lemma 4.19 (Vysvětlení definice tečny). Nechť Q je regulární projektivní kuželosečka v projektivní rovině $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ a $X \in Q$ její bod. Pak tečna p_X má s Q v bodě X dvojnásobný průsečík a žádný jiný průsečík s kuželosečkou nemá.

Důkaz. Nechť b je příslušná bilineární forma a \mathbf{x} vektorový zástupce bodu X a $Y = LO\{\mathbf{y}\}$ libovolný jiný bod na tečně p_X . Tečna je tedy parametrizována jako $s\mathbf{x} + t\mathbf{y}$. Tuto parametrizaci dosadíme do kvadriky, položíme nule a upravíme

$$b(s\mathbf{x} + t\mathbf{y}, s\mathbf{x} + t\mathbf{y}) = s^2 \underbrace{b(\mathbf{x}, \mathbf{x})}_{=0} + 2st \underbrace{b(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{=0} + t^2 b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = t^2 b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0.$$

Kdyby $b(\mathbf{y}, \mathbf{y}) = 0$, pak je celá přímka podmnožinou kuželosečky, což je ve sporu s její regularitou. Vidíme tedy, že $t = 0$, které odpovídá bodu X je jediným a dvojnásobným průsečíkem kuželosečky a tečny p_X .

Věta 4.20. V projektivní rovině $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme regulární kuželosečku Q . Necht' přímka p protíná Q ve dvou různých bodech A, B . Necht' $C \in p$ různé od A, B a necht' $D \in p$ je polárně sdružen s C . Pak (A, B, C, D) tvoří harmonickou čtveřici.

Důkaz. Necht' b je příslušná bilineární forma a $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$, vektorové zástupci odpovídajících bodů. Pak platí $b(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = b(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 0$, protože body A, B leží na kuželosečce a rovněž $b(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = 0$, protože C, D jsou polárně sdružené. Vyjádřeme si lineární kombinace

$$\begin{aligned}\mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}.\end{aligned}$$

a můžeme psát

$$\begin{aligned}0 &= b(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = b(\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}, \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}) = \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \underbrace{b(\mathbf{a}, \mathbf{a})}_{=0} + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) \underbrace{b(\mathbf{a}, \mathbf{b})}_{\neq 0} + \beta_1 \beta_2 \underbrace{b(\mathbf{b}, \mathbf{b})}_{=0}.\end{aligned}$$

Nenulovost $b(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ přitom plyne z Lemmatu 4.19. Musí se tedy $\alpha_1 \beta_2 = -\beta_1 \alpha_2$ a proto $(A, B, C, D) = \frac{\beta_1 \alpha_2}{\alpha_1 \beta_2} = -1$ a body tvoří harmonickou čtveřici.

Věta 4.21. Každá regulární kuželosečka v reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je projektivní transformací kuželosečky dané rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Každá regulární kvadrika v reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je projektivní transformací právě jedné z kvadrik

$$\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0 && \text{(nepřímková kvadrika)} \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0 && \text{(přímková kvadrika)}.\end{aligned}$$

Důkaz. Mějme nějakou regulární kvadriku Q v \mathbb{P}^2 danou kvadratickou formou q a odpovídající symetrická bilineární forma b má matici B . Jelikož nenulový násobek určuje stejnou formu, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že matice B má signaturu $(0, 3, 0)$, nebo $(0, 2, 1)$. Nulita musí být 0, jinak B nemůže být regulární matice. Příklad $(0, 3, 0)$ však není možný, protože to určuje pozitivně definitní formu, takže kvadrika Q by byla prázdná. B má tedy signaturu $(0, 2, 1)$. Existuje proto matice P taková, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P^T B P$$

Takovou matici P získáme metodou symetrických úprav. Označme K kvadriku

$$K = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0\}.$$

Bod $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^2$ náleží K právě když

$$(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ x_3) P^T B P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Z toho ale plyne, že $PX \in Q$. Dostáváme ekvivalenci $X \in K \Leftrightarrow PX \in Q$. Matice P je regulární a určuje tedy projektivní transformaci. Kuželosečku Q tak dostaneme zobrazením bodů na K pomocí matice P .

Důkaz pro kvadriky v \mathbb{P}^3 je zcela obdobný s tím, že dvě přípustné signatury jsou $(0, 3, 1)$ a $(0, 2, 2)$. \square

5 Projektivní rozšíření afinního prostoru

Definice 5.1. Pro libovolné těleso zobrazení $\Phi : T^n \rightarrow \mathbb{P}(T^{n+1})$ dané předpisem

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = LO\{(x_1, \dots, x_n, 1)\}$$

nazývá se *kanonické vnoření* aritmetického afinního prostoru do aritmetického projektivního prostoru stejné dimenze. $\mathbb{P}(T^{n+1})$ se pak nazývá kanonickým projektivním rozšířením nebo též zúplněním afinního prostoru T^n .

Definice a lemma 5.2. Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n , pak $\mathbb{P}^n = \Phi(T^n) \cup \mathbb{P}^{n-1}$, kde \mathbb{P}^{n-1} je nadrovina s homogenní rovnicí $x_{n+1} = 0$, tedy se souřadnicemi $(0, \dots, 0, 1)^*$. Tato nadrovina se nazývá nevlastní nadrovina, označuje se p_∞ a její body se nazývají nevlastní body.

Jestliže $A \subset T^n$ je afinní podprostor dimenze k pak je jeho obraz $\Phi(A)$ obsažen právě v jednom projektivním podprostoru $\mathbb{A} \subset \mathbb{P}^n$ dimenze k . O \mathbb{A} hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění podprostoru A a o A hovoříme jako o afinní verzi \mathbb{A} . Nevlastní body \mathbb{A} považujeme i za nevlastní body A .

Důkaz. Nejprve se ujistíme, že kanonické vnoření Φ je skutečně prosté. Opravdu,

$$LO\{(x_1, \dots, x_n, 1)\} = LO\{(y_1, \dots, y_n, 1)\}$$

pouze v případě, že $(x_1, \dots, x_n, 1) = (y_1, \dots, y_n, 1)$. V $\text{Im}\Phi$ jsou právě projektivní body, které mají poslední složku nenulovou, protože v tom případě máme

$$\Phi^{-1}(LO\{(z_1, \dots, z_n, z_{n+1})\}) = \left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \dots, \frac{z_n}{z_{n+1}} \right).$$

Projektivní body, které mají poslední složku nulovou tvoří nevlastní nadrovinu a tedy dostáváme $\mathbb{P}^n = \Phi(T^n) \cup \mathbb{P}^{n-1}$.

Nyní uvažujme libovolný afinní podprostor $A \subset T^n$ dimenze k , který podle Věty 3.13 můžeme psát ve tvaru $A = X + W$, kde $X = (x_1, \dots, x_n)$ je bod a W je vektorový

podprostor T^n dimenze k . V obrazu $\Phi(A)$ jsou právě projektivní body tvaru $LO\{(x_1 + w_1, \dots, x_n + w_n, 1)\}$, kde $(w_1, \dots, w_n) \in W$. Tyto směry leží právě v jednom $k + 1$ dimenzionálním prostoru $V^{k+1} = LO\{(x_1, \dots, x_n, 1), W\}$, který zároveň generují. Projektivní prostor $\mathbb{A} = \mathbb{P}(V^{k+1})$ dimenze k je projektivním rozšířením A . Jeho nevlastní body tvoří projektivní podprostor $\mathbb{P}(W)$ dimenze $k - 1$.

Věta 5.3. V projektivně rozšířené rovině \mathbb{R}^2 má každá afinní přímka p v \mathbb{R}^2 se směrovým vektorem $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ právě jeden nevlastní bod $(v_x, v_y, 0)$. Tento bod budeme rovněž nazývat *směr* p .

Důkaz. Důkaz plyne z 5.1, kde se využívá parametrické vyjádření afinního podprostoru A (v tomto případě přímky, tedy $A = p$). Ukážeme si však, že stejný výsledek nám vyjde i z rovnicového vyjádření.

Přímka p má normálový vektor $(-v_y, v_x)$ a tedy afinní rovnicové vyjádření $-v_yx + v_xy + c = 0$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. Vyjádření jejího projektivního rozšíření získáme dosazením $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$ a přenásobením celé rovnice x_3 . Dostáváme $-v_yx_1 + v_xx_2 + cx_3$ a toto rozšíření má tedy duální souřadnice $(-v_y, v_x, c)^*$. Nevlastní přímka má duální souřadnice $p_\infty = (0, 0, 1)^*$, a nevlastní bod najdeme jako $p \cap p_\infty$ vypočteme jako $(v_x, v_y, 0)$. \square

Poznámka 5.4. V projektivně rozšířené rovině \mathbb{R}^2 se všechny rovnoběžky protínají v jednom nevlastním bodě - ve svém směru. Přitom všechny nevlastní body leží na (projektivní) přímce $(0, 0, 1)^*$. Reálnou projektivní rovinu \mathbb{P}^2 je tedy možno chápat jako \mathbb{R}^2 , ke kterému se přidá jeden bod v každém směru. Přitom ale po tomto přidání vznikne dokonale symetrická (projektivní) geometrie. Mnoho různých afinních problémů je možno převést na stejný projektivní problém - např. afinní verze Pappovy věty.

Příklad 5.5 (Počítání v afinní a projektivní rovině). Uvažujme afinní rovinu \mathbb{R}^2 s kanonickými afinními souřadnicemi $[x, y]$ a její kanonické projektivní rozšíření \mathbb{P}^2 s kanonickými homogenními souřadnicemi (x_1, x_2, x_3) .

1. Nalezněte projektivní bod, který odpovídá afinnímu bodu $A = [3, -1]$, přesněji tedy nalezněte $\Phi(A)$.
2. Nalezněte afinní bod, který odpovídá projektivnímu bodu $B = (-6, 9, 3)$, přesněji tedy nalezněte $\Phi^{-1}(B)$.
3. Nalezněte projektivní rozšíření afinní přímky $2x + 3y + 4 = 0$ a určete všechny její nevlastní body.
4. Nalezněte afinní verzi přímky s duálními souřadnicemi $(2, -1, 5)^*$.
5. Rozhodněte, zda-li afinní body $A = [1, 2]$, $B[4, -4]$ a $C[3, -2]$ leží na přímce. Určete obecnou rovnici této přímky.
6. Nalezněte bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, kde A, B jsou jako v předchozím bodě a $D = [3, 5]$, $E = [1, 7]$.

Věta 5.6. V projektivně rozšířené rovině \mathbb{R}^2 uvažujme různé body A, B, C, D ležící na jedné přímce. Pak pro dvojpoměry a dělicí poměry platí

1. Jestliže jsou všechny tyto body vlastní, pak

$$(A, B, C, D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}.$$

2. Jestliže D je nevlastní, pak

$$(A, B, C, D) = -\frac{AC}{CB}.$$

3. Speciálně, pokud je (A, B, C, D) harmonická čtveřice a bod D je nevlastní, pak C je středem AB .

Důkaz. 1. Uvažujme následující vlastní body a jejich projektivní verze bereme zároveň jako jejich vektorové zástupce:

$$\begin{aligned} A &= [a_x, a_y] \sim (a_x, a_y, 1) =: \mathbf{a} \\ B &= [b_x, b_y] \sim (b_x, b_y, 1) =: \mathbf{b} \\ C &= [c_x, c_y] \sim (c_x, c_y, 1) =: \mathbf{c} \\ D &= [d_x, d_y] \sim (d_x, d_y, 1) =: \mathbf{d} \end{aligned}$$

Všechny tyto body leží na jedné přímce, zvolíme tedy barycentrickou soustavu této přímky jako (A, B) a vyjádříme $C = c_1A + c_2B, D = d_1A + d_2B$ pomocí barycentrických souřadnic (c_1, c_2) a (d_1, d_2) . Z 3.27 plyne

$$\frac{AC}{CB} = \frac{c_2}{c_1} \text{ a } \frac{AD}{DB} = \frac{d_2}{d_1}.$$

Všimneme si také, že

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= d_1\mathbf{a} + d_2\mathbf{b}. \end{aligned}$$

To platí protože

$$\mathbf{c} = c_1\mathbf{a} + c_2\mathbf{b} = (c_1a_x + c_2b_x, c_1a_y + c_2b_y, c_1 + c_2) = (c_1a_x + c_2b_x, c_1a_y + c_2b_y, 1)$$

Stejně to platí i pro \mathbf{d} . Můžeme tedy spočítat dvojpoměr jako

$$(A, B, C, D) = \frac{d_1c_2}{d_2c_1} = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{d_1}{d_2} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA} = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}.$$

2. Bod D je nevlastním bodem přímky \overleftrightarrow{AB} a tedy se podle Věty 5.3 spočítá jako $D = (b_x - a_x, b_y - a_y, 0)$. Pak je zřejmé, že $\mathbf{d} = -\mathbf{a} + \mathbf{b}$, což dává dvojpoměr

$$(A, B, C, D) = \frac{d_1c_2}{d_2c_1} = \frac{(-1) \cdot c_2}{1 \cdot c_1} = -\frac{c_2}{c_1} = -\frac{AC}{CB}.$$

3. Je-li (A, B, C, D) harmonická čtveřice a D nevlastní bod, pak

$$(A, B, C, D) = -1 = -\frac{AC}{CB}.$$

To plyne z bodu 2 části tvrzení. Pak ale $\frac{AC}{CB} = 1$, neboli C je středem úsečky AB . \square

Věta 5.7. Uvažujme kanonicky projektivně rozšířený afinní prostor T^n . Projektivní transformace uvažovaná na vlastních bodech mají tvar lineárních lomených zobrazení. Afinity tvoří podgrupu projektivních transformací a jsou to právě ta zobrazení, které vlastní body zobrazují na vlastní body a nevlastní body na nevlastní body.

Důkaz. Větu dokážeme v rozšířené rovině \mathbb{R}^2 . Analogie pro vyšší dimenze a jiná tělesa pak bude zřejmá. Projektivní transformaci popíšeme regulární maticí F a zobrazme nějaký vlastní bod $(x, y, 1)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ \frac{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}{a_{31}x + a_{32}y + a_{33}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

Z toho je zřejmý tvar lineárně lomených zobrazení. Všechny afinity; získáme položením $a_{31} = a_{32} = 0$ a $a_{33} = 1$. Pak totiž

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

To odpovídá známému tvaru afinních zobrazení

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

včetně známého skládání.

Podmínka $a_{31} = a_{32} = 0$ je nutná, jinak nalezneme bod $[x, y]$ takový, že jeho obraz bude mít poslední složku 0 a tedy nepůjde o afinní (vlastní) bod. Pokud $a_{33} \neq 1$ (nemůže platit $a_{33} = 0$ protože pak by byla F singulární), tak můžeme celou matici F vydělit tímto číslem a dostaneme stejné projektivní zobrazení.

Z toho taky vidíme, že (3) jsou právě ta projektivní zobrazení, která zobrazují vlastní body na vlastní a nevlastní na nevlastní. Pokud zobrazujeme nevlastní bod, tj. s nulou ve třetí složce, pak

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ 0 \end{pmatrix}$$

je nevlastní bod. Afinity tedy zobrazují vlastní body na vlastní a nevlastní body na nevlastní. \square

Příklad 5.8. Zkoumejte lineární lomená zobrazení, například

$$f(x) = \frac{2x + 3}{4x + 5},$$

z hlediska analýzy a z hlediska projektivních zobrazení na přímce.

Definice 5.9 (Afinní pojmy pro kvadriky). Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n , pak

1. O množině $\tilde{Q} \subset T^n$ řekneme, že je to regulární afinní kvadrika, jestliže to je množina vlastních bodů regulární kvadriky Q v \mathbb{P}^n . O Q hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění \tilde{Q} a o \tilde{Q} hovoříme jako o afinní verzi Q . Nevlastní body Q považujeme i za nevlastní body \tilde{Q} .
2. Tečné nadroviny ke \tilde{Q} definujeme jako afinní verze tečných nadrovin ke Q ve vlastních bodech.
3. Jestliže je pól nevlastní nadroviny p_∞ vlastním bodem, pak jej nazýváme středem kvadriky \tilde{Q} .
4. Jestliže má kvadrika v nevlastním bodě tečnou nadrovinu, která není nevlastní, nazýváme tuto nadrovinu asymptotickou k \tilde{Q} .

Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme stejným písmenem označovat afinní objekt (nadrovinu, kvadriku, prostor) a jeho projektivní zúplnění.

Definice 5.10 (Afinní klasifikace kuželoseček). V projektivně rozšířené rovině \mathbb{R}^2 mějme regulární kuželosečku Q . Řekneme o ní, že to je *elipsa*, jestliže nemá žádný nevlastní bod, *parabola*, jestliže má právě jeden nevlastní bod a *hyperbola*, jestliže má dva nevlastní body, jiné možnosti nejsou. Těmto názvům říkáme *afinní typ* kuželosečky. O dvou vlastních přímkách řekneme, že mají sdružené směry, jestliže jsou jejich nevlastní body polárně sdružené vůči Q .

Příklad 5.11. Všechny pojmy si postupně vyzkoušejme na afinní kuželosečce

$$x^2 + 2xy - 2y + 2 = 0.$$

Věta 5.12. Elipsa a hyperbola mají střed, parabola střed nemá. Hyperbola má dvě různé asymptoty, parabola ani elipsa asymptoty nemají. Pro elipsu jsou vždy dva různé směry po dvou sdružené. Pro hyperbolu jsou směry asymptot sdružené vždy samy se sebou a ostatní směry jsou po dvou sdružené. Pro parabolu existuje jeden směr (její nevlastní bod), který je sdružen sám se sebou i se všemi ostatními směry.

Důkaz. Nechť Q je dána symetrickou maticí $B = (b_{ij})$. Parametrické vyjádření nevlastní přímky je $(s, t, 0)$, jestliže ho dosadíme do rovnice kuželosečky, dostaneme homogenní kvadratickou rovnici v s, t

$$b_{11}s^2 + 2b_{12}st + b_{22}t^2 = 0,$$

kteřá má 0, 1 nebo 2 řešení (až na násobek) a tedy kuželosečka má odpovídající počet nevlastních bodů. O tom který z těchto případů nastane přitom rozhoduje signum diskriminantu

$$b_{12}^2 - b_{11}b_{22} = - \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Nyní studujme, kdy je polárou nějakého nevlastního bodu nevlastní přímka $(0, 0, 1)^*$. Nastane to jistě v parabolickém případě, kdy snadno vidíme, že nevlastní přímka je buď polárou bodu $(b_{12}, -b_{11}, 0)$, nebo (v případě že $b_{12} = b_{11} = 0$) bodu $(1, 0, 0)$.

Předpokládejme naopak, že polárou nějakého $(s, t, 0)$ je nevlastní přímka $(0, 0, 1)^*$. Pak jistě platí

$$(s, t, 0) \cdot B = (0, 0, \lambda),$$

kde $\lambda \neq 0$. Vzhledem k symetrii matice B z toho vyplývá

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -t^2 & st \\ st & -s^2 \end{pmatrix},$$

kde $\mu \in \mathbb{R}^*$ a tedy jsme v parabolickém případě, přičemž $(s, t, 0)$ je dvojnásobným bodem paraboly. Ve všech ostatních případech je polára nevlastního bodu vlastní přímkou.

Vidíme tedy, že pól nevlastní přímky je vlastní v případě elipsy a hyperboly, které tedy mají střed. V případě paraboly je tento pól nevlastní a tedy parabola střed nemá.

Okamžitě také dostáváme tvrzení o asymptotách, které jsou definovány jako vlastní tečny v nevlastním době. Elipsa žádné nevlastní body nemá. Parabola má jeden nevlastní bod, ale jeho polára (tečna) je nevlastní. Hyperbola má dva nevlastní body a jejich poláry jsou vlastní, tedy jsou to tečny a asymptoty.

Kromě případu, že nevlastní bod X je dvojnásobným bodem paraboly tedy sdružený směr nalezneme jednoznačně jako $Y = p_X \cap p_\infty$. Tento bod je roven X právě tehdy $X \in Q$. Tím je dokázáno tvrzení o sdružených směrech pro elipsu a hyperbolu. V případě paraboly je jediný bod X paraboly sdružen sám se sebou a všemi ostatními nevlastními body, protože $p_X = p_\infty$. Poláry všech ostatních bodů jsou vlastní přímky, které mají jeden nevlastní bod X .

Definice 5.13 (Eukleidovské pojmy pro kuželosečky). V projektivně rozšířené rovině \mathbb{R}^2 s kanonickým skalárním součinem mějme regulární kuželosečku Q . Směr (nevlastní bod) nazýváme hlavní, jestliže existuje směr sdružený, který je na něj kolmý. Osu kuželosečky definujeme jako poláru hlavního směru, pokud tato polára není nevlastní přímkou. Vrcholy kuželosečky definujeme jako vlastní průsečíky os s kuželosečkou. Úsečka spojující střed a vrchol se nazývá poloosa.

Věta 5.14. Pro kružnici je každý bod jejím vrcholem. Elipsa, která není zároveň kružnicí má čtyři vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Hyperbola má dva vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Parabola má jeden vrchol a jednu osu, která prochází vrcholem a nevlastním bodem paraboly. Tečna ke kuželosečce v jejím vrcholu má vždy hlavní směr.

Věta 5.15. Necht' přímka p prochází středem S kuželosečky Q (elipsy nebo hyperboly) a protíná kuželosečku ve dvou různých bodech A, B . Pak S je středem úsečky AB . Tečny ke Q v bodech A, B jsou rovnoběžné a mají směr sdružený se směrem p . Jestliže má přímka se směrem sdruženým k p s kuželosečkou Q dva průsečíky X, Y , pak přímka p půlí úsečku XY .

Důkaz. Přímka p protíná nevlastní přímku p_∞ v nějakém bodě D . Body (A, B, S, D) leží na jedné přímce a A, B , jsou na kuželosečce a S, D jsou polárně sdružené. Proto podle Lemma 4.20 body (A, B, S, D) tvoří harmonickou čtveřici, přičemž D je bod nevlastní. Podle Věty 5.6 je tedy S středem úsečky AB .

Protože p prochází středem je její pól P nevlastním bodem. P a D jsou sdružené směry. Protože body A, B leží na přímce p , jejich poláry (které jsou tečnami) prochází bodem P a mají tedy směr sdružený se směrem přímky p .

Jestliže nějaká přímka prochází bodem P a protíná kuželosečku v bodech X, Y , pak jistě protíná i přímku p v nějakém bodě Z . Protože P a Z jsou polárně sdružené je (X, Y, Z, P) harmonická čtveřice a v důsledku je Z středem XY . \square

Věta 5.16. Necht' vlastní přímka p prochází jediným nevlastním bodem X paraboly a protíná ji v dalším (vlastním) bodě Y . Necht' přímka rovnoběžná s tečnou v bodě Y protíná parabolu ve dvou bodech A, B . Pak přímka p půlí úsečku AB .

Důkaz. Podobně jako v důkazu věty 5.15 prochází tečna pólem P přímky p a ze stejných důvodů přímka p půlí tětivy rovnoběžné s touto tečnou.

Poznámka 5.17 (Meta-věta o projektivních, afinních a eukleidovských pojmech). Projektivní zobrazení zachovávají (správně zobrazují) projektivní pojmy, afinní zobrazení zachovávají afinní pojmy a shodnosti zachovávají eukleidovské (na skalárním součinu závisící) pojmy.

Věta 5.18 (Příklad afinně zachovaného pojmu). V projektivně rozšířené rovině \mathbb{R}^2 mějme elipsu Q se středem S . Jestliže F je afinita, pak $F(Q)$ je opět elipsa a $F(S)$ je jejím středem.

Důkaz. Elipsa v rozšířené rovině \mathbb{R}^2 nemá žádný nevlastní bod. Podle Věty 5.7 F zobrazuje vlastní body na vlastní a nevlastní na nevlastní, takže $F(p_\infty) = p_\infty$ a $F(Q) \cap p_\infty = \emptyset$. Obraz elipsy proto nemá žádný nevlastní bod a je to opět elipsa. Označme b bilineární formu původní elipsy. Pak bilineární forma jejího obrazu je dána jako $\bar{b}(X, Y) = b(F^{-1}(X), F^{-1}(Y))$.

Je-li S středem Q , pak pro každý $X \in p_\infty$ platí $b(X, S) = 0$ a dostáváme tedy, že i pro každý $Y \in p_\infty$

$$\bar{b}(F(S), Y) = b(S, F^{-1}(Y)) = 0,$$

protože $F^{-1}(Y) \in p_\infty$. $F(S)$ je proto skutečně středem $F(Q)$. \square

Věta 5.19. V projektivně rozšířené rovině \mathbb{R}^2 platí, že

1. každá elipsa je afinní transformací elipsy $x^2 + y^2 - 1 = 0$,
2. každá parabola je afinní transformací paraboly $x^2 - y = 0$,

3. každá hyperbola je afinní transformací hyperboly $xy - 1 = 0$.

V důsledku jsou tedy každé dvě kuželosečky stejného afinního typu mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

Definice a lemma 5.20 (Projektivní a afinní klasifikace kvadrik v prostoru). V projektivně rozšířeném prostoru \mathbb{R}^3 definujeme tyto afinní typy regulárních kvadrik

1. *elipsoid* jako nepřímkovou kvadriku, která nemá žádný nevlastní bod,
2. *eliptický paraboloid*, jako nepřímkovou kvadriku, která má právě jeden nevlastní bod,
3. *dvojdílný hyperboloid* jako nepřímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku
4. *jednodílný hyperboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku
5. *hyperbolický paraboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří dvě přímky.

Každé dvě kvadriky stejného afinního typu jsou mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

Důkaz. Afinní klasifikace plyne z výčtu všech možností polohy nevlastní roviny (sečná, tečná, mimo) vůči kvadrice. Přímková kvadrika nemůže mít neprázdný průnik s žádnou rovinou, proto je tříd jen 5. Existenci transformací dokazovat nebudeme.

Příklad 5.21 (Úloha o tarotech). Nalezni 5 různých rozdělení (kol) 16 hráčů do 4 skupin (stolů) tak, aby každý hráč potkal každého hráče v právě jedné skupině (u jednoho stolu). Hint: uvažuj rozšířenou afinní rovinu nad čtyřprvkovým tělesem \mathbb{F}_4 . Vlastní body jsou hráči, nevlastní body jsou kola, každá vlastní přímka prochází jedním nevlastním bodem (tedy patří do jednoho kola) a obsahuje 4 vlastní body (tedy je to stůl se 4 hráči).

Příklad 5.22. Komplexní projektivní přímka $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ reprezentuje Möbiovu geometrii. Její projektivní zobrazení zachovávají kruhové křivky a úhly mezi křivkami. Dvojpoměr 4 bodů je reálný právě tehdy když tyto body leží na jedné kruhové křivce.

6 Dodatek

Materiál z této sekce se nebude zkoušet, obsahuje několik důkazů a zobecnění.

Lemma 1.16 Pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Důkaz. Rozlišíme dva případy:

- \mathbf{v}, \mathbf{w} jsou lineárně závislé. Jelikož vektorový součin antikomutuje, můžeme BÚNO předpokládat, že $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$. Potom je $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{o}$, takže levá strana (LS) dokazované rovnosti je rovna \mathbf{o} . Ovšem pravá strana (PS) je rovna $(\mathbf{u} \cdot \lambda \mathbf{v})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\lambda \mathbf{v} = \mathbf{o}$, takže rovnost platí.
- \mathbf{v}, \mathbf{w} jsou lineárně nezávislé. Potom je $B = (\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \times \mathbf{w})$ báze \mathbb{R}^3 . Obě strany dokazované rovnosti jsou výrazy lineární v \mathbf{u} , tedy stačí ukázat platnost v případě, kdy je \mathbf{u} roven jednomu z prvků B .

– $\mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{w}$:

$$\text{LS} = \mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{o}.$$

Dále z kolmosti \mathbf{u} na \mathbf{v} a \mathbf{w} plyne

$$\text{PS} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{o} = \text{LS}.$$

– $\mathbf{u} = \mathbf{v}$: Rovnost přejde do tvaru

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Stačí ukázat, že skalární součin libovolného prvku B s LS je stejný, jako s PS. Snadno je vidět, že

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \text{LS} &= \mathbf{o} = \mathbf{v} \cdot \text{PS}, \\ (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \text{LS} &= \mathbf{o} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \text{PS}. \end{aligned}$$

Konečně označíme-li úhel mezi \mathbf{v} a \mathbf{w} jako α , platí

$$\begin{aligned} \mathbf{w} \cdot \text{LS} &= \det(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{v} \times \mathbf{w}) = -\det(\mathbf{v} \times \mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = -(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \\ &= -\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\|^2 = -\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \sin^2 \alpha, \\ \mathbf{w} \cdot \text{PS} &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})^2 - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{w} \cdot \mathbf{w}) = \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \cos^2 \alpha - \|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \\ &= -\|\mathbf{v}\|^2 \|\mathbf{w}\|^2 \sin^2 \alpha = \mathbf{w} \cdot \text{LS}. \end{aligned}$$

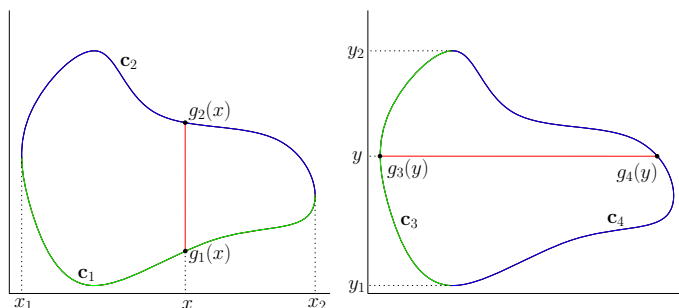
- $\mathbf{u} = \mathbf{w}$: LS i PS jsou „antisymetrické vzhledem k \mathbf{v} a \mathbf{w} “, tedy prohodíme-li v nich \mathbf{v} a \mathbf{w} , obě se pouze pronásobí -1. Tím pádem je tento případ analogický předchozímu.

Greenova věta 2.36: Necht \mathbf{c} je jednoduchá, hladká, uzavřená, regulární, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka v \mathbf{R}^2 . Necht $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je hladké vektorové pole definované na nějakém okolí uzávěru $\text{Int } \mathbf{c}$. Pak

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\text{Int } \mathbf{c}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$

Důkaz. (Náznak.) Větu dokážeme pro speciální případ křivky $\mathbf{c} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ze znění věty. Předpokládejme, že \mathbf{c} lze „rozdělit“ na dvě hladké křivky $\mathbf{c}_1(x) = (x, g_1(x))$, $\mathbf{c}_2 = (x, g_2(x))$, $x \in [x_1, x_2]$, kde $g_1, g_2 : [x_1, x_2] \rightarrow \mathbb{R}$ jsou zobrazení splňující:

- $g_1(x_1) = g_2(x_1)$, $g_1(x_2) = g_2(x_2)$ (tedy $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\beta) = \mathbf{c}_1(x_1) = \mathbf{c}_2(x_1)$ a $\mathbf{c}(\gamma) = \mathbf{c}_1(x_2) = \mathbf{c}_2(x_2)$ pro nějaké $\gamma \in (\alpha, \beta)$),
- $g_1(x) < g_2(x)$, $x \in (x_1, x_2)$ (tedy \mathbf{c}_1 je „dolní část“ \mathbf{c} a \mathbf{c}_2 „horní“, ovšem \mathbf{c}_2 je opačně orientovaná než skutečná příslušná část \mathbf{c}).



Symetricky budeme chtít, aby křivka mohla být rozdělena na „levou část“ $\mathbf{c}_3(y) = (g_3(y), y)$ a „pravou část“ $\mathbf{c}_4 = (g_4(y), y)$, $y \in [y_1, y_2]$ s analogickými vlastnostmi.

Pro hladké vektorové pole $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ můžeme psát:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} &= \int_{\mathbf{c}} F_1(x, y) dx + F_2(x, y) dy \\ &= \left(\int_{x_1}^{x_2} F_1(x, g_1(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} F_1(x, g_2(x)) dx \right) + \\ &\quad + \left(- \int_{y_1}^{y_2} F_2(g_3(y), y) dy + \int_{y_1}^{y_2} F_2(g_4(y), y) dy \right) \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x))) dx + \int_{y_1}^{y_2} (-F_2(g_3(y), y) + F_2(g_4(y), y)) dy. \end{aligned}$$

Počítejme nyní (s využitím Fubiniho věty):

$$\begin{aligned} \int_{\text{Int } \mathbf{c}} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dx dy &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} -\frac{\partial F_1}{\partial y} dy \right) dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (F_1(x, g_1(x)) - F_1(x, g_2(x))) dx. \end{aligned}$$

Analogicky ukážeme, že

$$\int_{\text{Int } \mathbf{c}} \frac{\partial F_2}{\partial x} dx dy = \int_{y_1}^{y_2} (-F_2(g_3(y), y) + F_2(g_4(y), y)) dy$$

Sečtení těchto dvou rovností dává Greenovu větu pro \mathbf{c} . □

Wirtingerovo lemma 2.38: Nechť $f(t) : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ je hladká funkce, pro kterou platí $f(0) = f(\pi) = 0$. Pak

$$\int_0^\pi f'^2(t) dt \geq \int_0^\pi f^2(t) dt$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $f(t) = D \sin(t)$, kde D je konstanta.

Důkaz. Označme $g(t) = \frac{f(t)}{\sin t}$, $t \in (0, \pi)$, a (s využitím L'Hospitalova pravidla) spojitě dodefinujeme

$$\begin{aligned} g(0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = f'_+(0), \\ g(\pi) &= \lim_{t \rightarrow \pi^-} g(t) = -f'_-(\pi). \end{aligned}$$

Platí tedy $f(t) = g(t) \sin t$, $t \in [0, \pi]$ a můžeme počítat:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f'(t)^2 dt &= \int_0^\pi (g'(t) \sin(t) + g(t) \cos(t))^2 dt \\ &= \int_0^\pi g'^2(t) \sin^2(t) dt + \int_0^\pi \underbrace{2g(t)g'(t)}_{(g^2(t))'} \sin(t) \cos(t) dt + \int_0^\pi g^2(t) \cos^2(t) dt \end{aligned}$$

a použitím per-partes na střední člen dostáváme

$$\begin{aligned} &= \int_0^\pi (g'(t) \sin(t))^2 dt + \underbrace{[g^2(t) \sin(t) \cos(t)]_0^\pi}_0 - \int_0^\pi g^2(t) (\cos^2(t) - \sin^2(t)) dt \\ &\quad + \int_0^\pi g^2(t) \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^\pi (g'(t) \sin(t))^2 dt + \int_0^\pi \underbrace{(g(t) \sin t)^2}_{f(t)} dt \geq \int_0^\pi f^2(t) dt. \end{aligned}$$

Rovnost zřejmě nastává právě pro g' nulovou, tedy $f(t) = D \sin(t)$ pro nějaké pevné $D \in \mathbb{R}$. \square

Věta 3.3: Mějme afinní prostor A se zaměřením V , pak pro libovolné prvky $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in A$; $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

1. $\mathbf{A} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{B} \ominus \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B})$

3. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \ominus \mathbf{C}) = \mathbf{A} \ominus \mathbf{C}$
4. $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{u}) - (\mathbf{B} \oplus \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
5. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{B})$

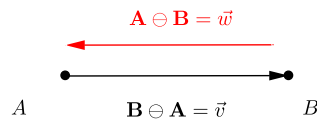
Důkaz.

1. Z druhého axiomu afinního prostoru víme $\exists! \mathbf{v} \in V : \mathbf{A} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{A}$, a dále můžeme za pomoci prvního axiomu psát

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{o} = (\mathbf{A} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{o} = \mathbf{A} \oplus (\mathbf{v} + \mathbf{o}) = \mathbf{A} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{A},$$

čímž získáváme požadované tvrzení.

2. Označme $\mathbf{v} = \mathbf{B} \ominus \mathbf{A}$ a $\mathbf{w} = \mathbf{A} \ominus \mathbf{B}$.



Jsou to ty jednoznačně určené vektory, že

$$\mathbf{A} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{B} \quad \mathbf{B} \oplus \mathbf{w} = \mathbf{A}.$$

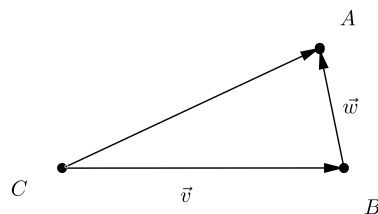
K první rovnosti přičteme $\oplus \mathbf{w}$ a dále upravíme.

$$(\mathbf{A} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A} \oplus (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{A}$$

Jelikož existuje právě jeden takový vektor pro každé \mathbf{A} a \mathbf{o} poslední rovnost splňuje, platí $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{o}$, tedy $\mathbf{w} = -\mathbf{v}$.

3. Necht' $\mathbf{v} = \mathbf{B} \ominus \mathbf{C}$ a $\mathbf{w} = \mathbf{A} \ominus \mathbf{B}$.



Ukážeme, že následující výraz je roven \mathbf{A} .

$$\mathbf{C} \oplus (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{C} \oplus \mathbf{v}) \oplus \mathbf{w} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{w} = \mathbf{A}$$

Podobně bychom dokázali i zbylé formule.

□

Zobecnění definice 5.1: Mějme n -dimenzionální afinní prostor A se zaměřením V^n nad tělesem T a $(n+1)$ -dimenzionální afinní prostor B se zaměřením V^{n+1} nad stejným tělesem a prosté afinní zobrazení $\varphi : A \rightarrow B$ a bod $\mathbf{P} \in B \setminus \text{Im}(\varphi)$. Pak je zobrazení $\Phi : A \rightarrow \mathbb{P}(V^{n+1})$ zadané předpisem

$$\Phi(\mathbf{X}) := LO\{\varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{P}\},$$

prosté a nazývá se *vnoření* A do projektivního prostoru $\mathbb{P}(V^{n+1})$.