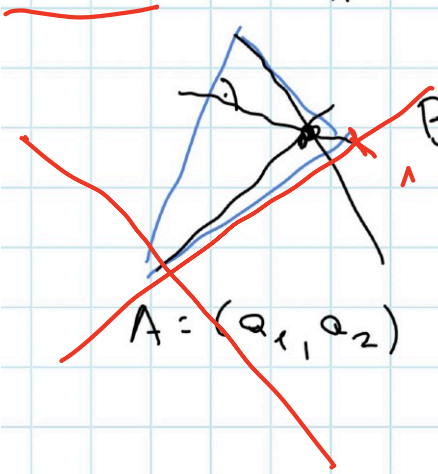
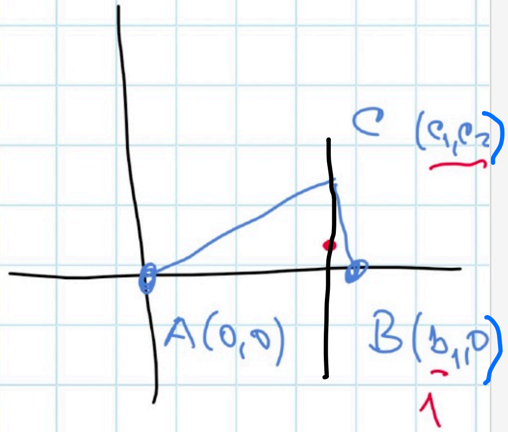
CO JE GEOMETRIE

Erlangenský program (Felix Klein 1872)

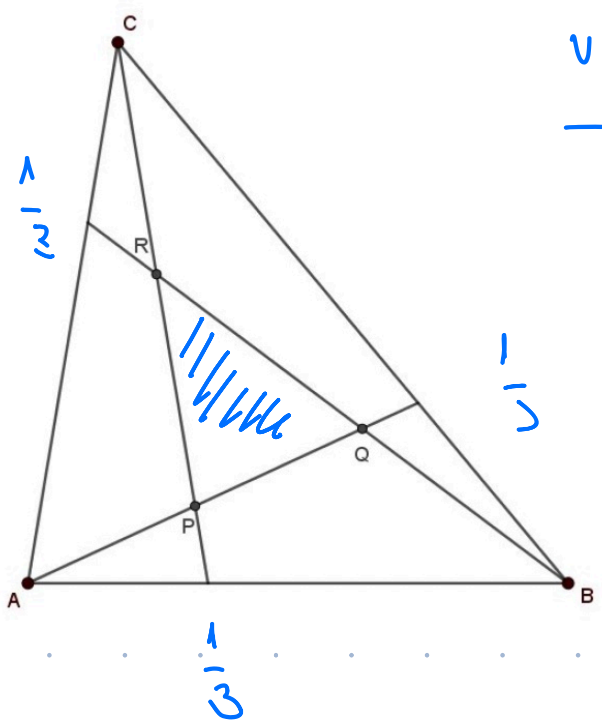
Příklad 1



VÝŠKY SE PROTÍNAJÍ



Příklad 2

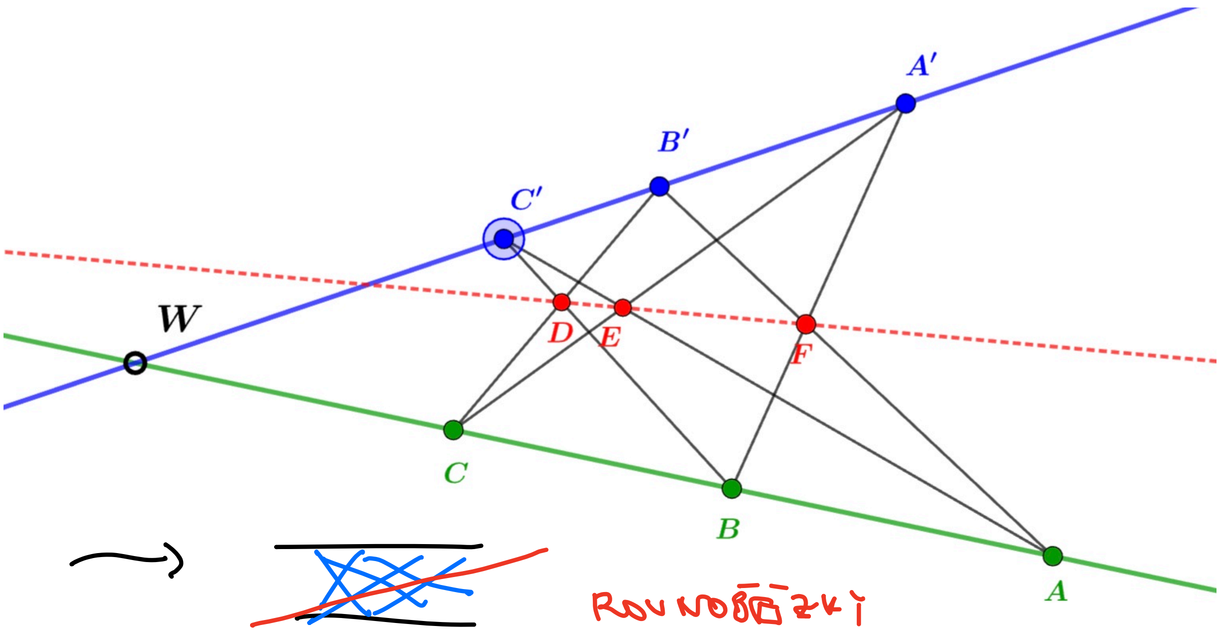


$$\frac{\text{VELKÝ}}{\text{MALÝ}} = ?$$

ROVNOSTR.

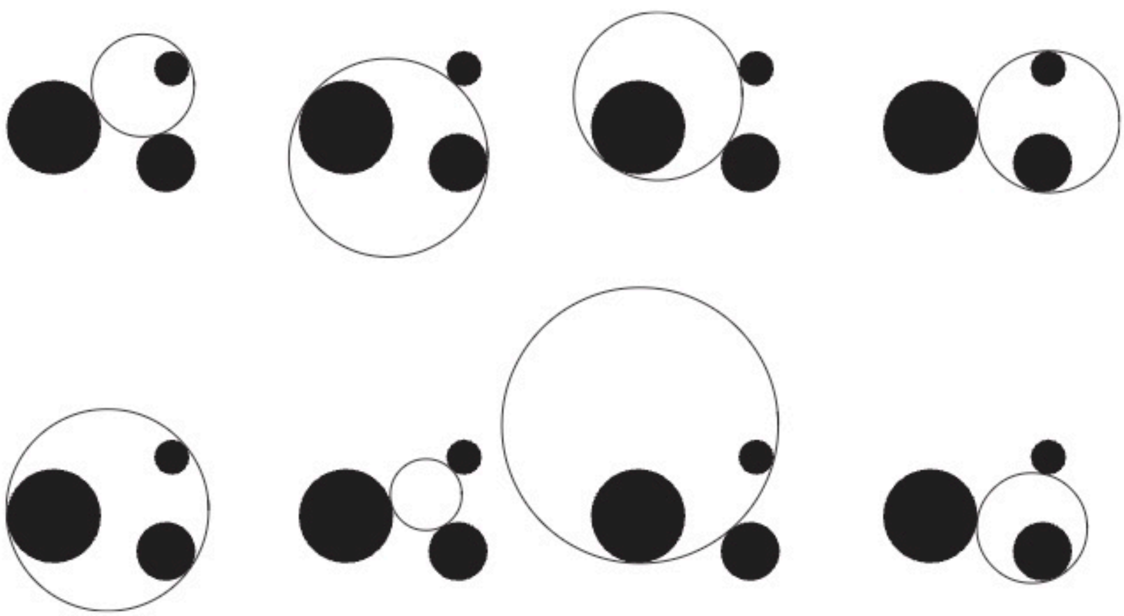
Afinní zobrazení

Ex 3



ROVNOBĚŽKY

Ex 4



MÖBILLOVA GEOMETRIE

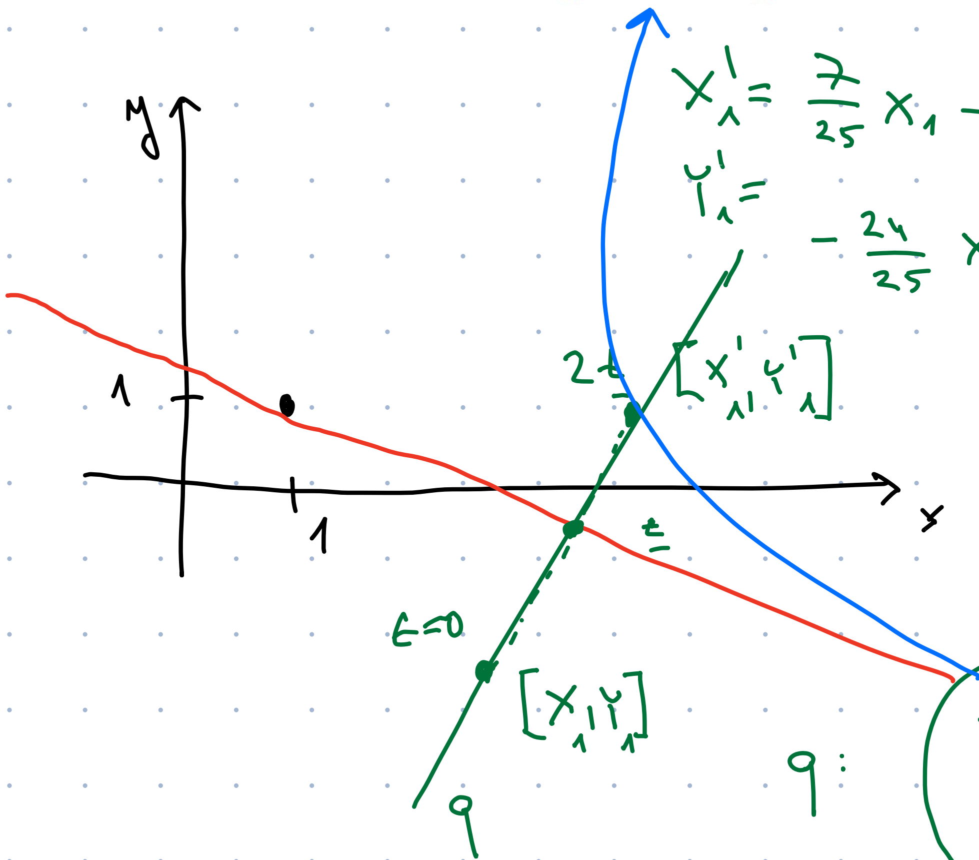
SHODNÁ ZOBRAZENÍ

Příklad 1.1. V rovině analyticky vyjádřete osovou souměrnost podle přímky

$$p : 3x + 4y - 7 = 0.$$

$$x_1' = \frac{7}{25} x_1 - \frac{24}{25} y_1 + \frac{42}{25}$$

$$y_1' = -\frac{24}{25} x_1 - \frac{7}{25} y_1 + \frac{56}{25}$$



$$t = \frac{7 - 3x_1 - 4y_1}{25}$$

2t

q:

$$x = x_1 + 3t$$
$$y = y_1 + 4t$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{42}{25} \\ \frac{56}{25} \end{pmatrix}$$

Definice 1.2. Zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se nazývá shodné (nebo shodnost), jestliže zachovává eukleidovské vzdálenosti, tedy pro každé dva body $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$||f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{Y})|| = ||\mathbf{X} - \mathbf{Y}||.$$

$$||X - Y|| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

Lemma 1.3. Složení dvou shodností je shodnost, shodnosti jsou prostá zobrazení a inverzní zobrazení ke shodnosti (tam kde je definováno) rovněž zachovává vzdálenosti.

Věta 1.4. Shodná zobrazení $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor a $\mathbf{A}$ je matice $n \times n$ splňující $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$ (ortogonální matice).

Důsledek 1.5. Shodnosti jsou bijekce a vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathrm{E}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{q}$$

pak

$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{X} + (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}), \quad (g \circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{X} + (\mathbf{B}\mathbf{p} + \mathbf{q}).$$

$A^{-1} = A^T$

Definice 1.6. Shodné zobrazení f nazveme přímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = 1$ a nepřímé jestliže $\det(\mathbf{A}) = -1$. Přímá zobrazení tvoří podgrupu, kterou označíme $\mathrm{E}_+(n)$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{A}$ jednotková matice a $\vec{p}$ nějaký vektor z $\mathbb{R}^n$ nazýváme posunutí. Množina všech posunutí tvoří podgrupu označovanou (pokud nehrozí nedorozumění) rovněž $\mathbb{R}^n$. Zobrazení, pro která je $\mathbf{p}$ nulový vektor tvoří tzv. ortogonální podgrupu označovanou $\mathrm{O}(n)$ (lineární zobrazení zachovávající skalární součin). Podgrupa $\mathrm{O}(n)$ tvořená přímými zobrazeními se značí buď $\mathrm{O}_+(n)$, nebo častěji $\mathrm{SO}(n)$ (speciální ortogonální grupa).

Věta 1.7. Pro každou shodnost $f \in \mathrm{E}(n)$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, platí maticová rovnost zapsaná blokově jako

$$\begin{pmatrix} f(\mathbf{X}) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Navíc zobrazení, které každé shodnosti přiřazuje tuto matici $(n+1) \times (n+1)$, tedy

$$f \to \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{p} \\ \mathbf{0} & 1 \end{pmatrix}$$

je vnoření grupy $\mathbb{E}(n)$ do grupy regulárních matic $\mathbb{GL}(n+1)$.

$$\left(\begin{array}{c|c} B & q \\ \hline 0\,0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & p \\ \hline 0\,0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} BA & Bp+q \\ \hline 0\,0 & 1 \end{array}\right)$$

Definice 1.8. Mějme shodné zobrazení $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Body splňující $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ nazýváme jeho samodružnými body. Lineární zobrazení $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme asociovaným homomorfismem k zobrazení f a vlastní směry tohoto zobrazení nazýváme samodružné směry zobrazení f.

Řekneme, že množina M je samodružná množina zobrazení f, jestliže platí $f(M) = M$, tedy zobrazení ji zobrazení zachovává (jako celek, ne nutně každý její bod zvlášť).

Lemma 1.9. Přímka $\mathbf{Q} + LO\{\mathbf{v}\}$ je samodružnou množinou shodnosti f právě tehdy, když $LO\{\mathbf{v}\}$ je jeho samodružný směr a $f(\mathbf{Q}) - \mathbf{Q}$ je násobkem $\mathbf{v}$.

SMĚR VEKTOR AŽ NA NENULOVÝ NÁSOBEK

$x = 1 + 3t$

$y = 4 - 7t$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \doteq$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + LO\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$

Věta 1.10. Pro každou shodnost $f \in \mathrm{E}(2)$ nastane právě jedna z těchto možností.

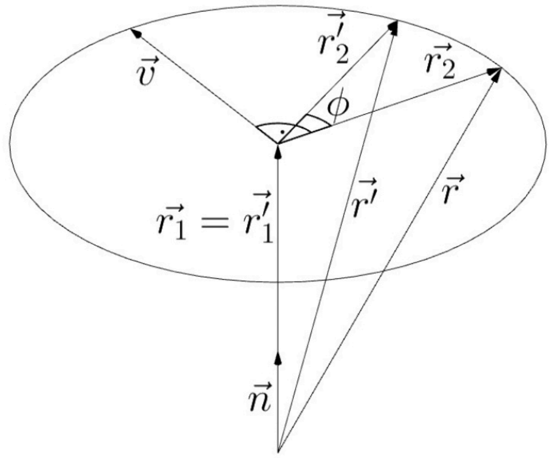
- f je přímá shodnost a
  - má všechny body samodružné a všechny směry samodružné s vl. číslem 1, pak jde o identitu.
  - má právě jeden samodružný bod, pak ji nazýváme otočení. Samodružné směry pak nemá buď žádné, nebo všechny s vl. číslem -1. V tomto posledním případě jde o otočení o π neboli o středovou souměrnost.
  - nemá žádné samodružné body a všechny směry jsou samodružné s vl. číslem 1, pak ji nazýváme posunutí .
- f je nepřímá shodnost. Pak má právě dva samodružné směry, jeden s vlastním číslem 1 a jeden s vlastím číslem -1 a
  - buď má právě jednu přímku samodružných bodů, pak ji nazýváme osová souměrnost
  - nebo nemá žádné samodružné body, pak ji nazýváme posunutá osová souměrnost.

Zobrazení	**Identita**	**Neidentické posunutí**	**Neidentické otočení**	**Osová souměrnost**	**Posunutá souměrnost**
Samodružné body	všechny	-	střed otočení	osa souměrnosti	-
Samodružné směry	všechny	všechny	všechny (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	směr osy a kolmý na osu	směr osy a kolmý na osu
Samodružné přímky	všechny	všechny ve směru posunutí	všechny jdoucí středem (středová souměrnost) nebo žádné (jinak)	osa a přímky na ni kolmé	jedna přímka
Přímé/ nepřímé	přímé	přímé	přímé	nepřímé	nepřímé

Věta 1.11 (Rodriguesova formule)**.** Mějme dva vektory $\mathbf{n}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, přičemž $\mathbf{n}$ je jednotkový. Pak pro vektor $\mathbf{r}' \in \mathbb{R}^3$, který dostaneme otočením vektoru $\mathbf{r}$ kolem vektoru $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ o úhel ϕ v kladném směru platí:

$$\mathbf{r}' = (1 - \cos\phi)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + \cos\phi\mathbf{r} + \sin\phi(\mathbf{n} \times \mathbf{r}).$$

Otočením v kladném směru přitom myslíme, že při úhlu $\phi \in (0, \pi)$ tvoří vektory $(\mathbf{n}, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ kladně orientovanou bázi $\mathbb{R}^3$ a při úhlu $\phi \in (-\pi, 0)$ záporně orientovanou.



Definice 1.12. Připomeňme si z ineární algebry (LA, cvičení 3.5.5), že kvaterniony tvoří nekomutativní těleso (označované $\mathbb{H}$) a mají tvar $q = s + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, přičemž $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$ a $\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j}$. V této přednášce budeme s nazývat skalární část, vektor $\mathbf{v} = (a, b, c)$ vektorová část a budeme kvaterniony zapisovat ve tvaru

$$q = (s, \underbrace{(x, y, z)}_{\mathbf{v}}).$$

Reálná čísla jsou do kvaternionů vnořena jako $s \to (s, \mathbf{0})$ a vektorový prostor $\mathbb{R}^3$ je do nich vnořen jako $\mathbf{v} \to (0, \mathbf{v})$.

Pro tato vnoření a jejich inverzy nebudeme zavádět žádné označení, z kontextu a z aplikovaných operací bude jasné, kdy zacházíme např. s vektorem a kdy s kvaternionem vektoru odpovídajícím. Například ve Větě 1.17 by na pravé straně bylo přesnější psát vektor vzniklý „odvnořením“ kvaternionu $q(0, \mathbf{r})\bar{q}$, což by ale zbytečně zaplevelovalo značení.

Lemma 1.13 (Geometrický význam kvaternionových operací)**.** Pro libovolné kvaterniony $q_1 = (s_1, \mathbf{v}_1)$, $q_2 = (s_2, \mathbf{v}_2)$ platí

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (s_1 + s_2, \mathbf{v_1} + \mathbf{v_2}) \\ q_1 \cdot q_2 &= (s_1 s_2 - \mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2} + s_1\mathbf{v_2} + s_2\mathbf{v_1}). \end{aligned}$$

$q = 3 + 4i - 7j + 5k \qquad \bar{q} = 3 - 4i + 7j - 5k$

$|z|^2 = z \cdot \bar{z} \qquad q = (3, (4, -7, 5)) \qquad \bar{q} = (3, (-4, 7, 5))$

$\to \mathbb{R}^4$

Definice 1.14. Pro libovolný kvaternion $q = (s, \mathbf{v})$ definujeme konjugovaný kvaternion $\bar{q} = (s, -\mathbf{v})$ a jeho normu $||q|| = \sqrt{q\bar{q}} = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{s^2 + \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}} = \sqrt{s^2 + x^2 + y^2 + z^2}$. Kvaterniony, které mají normu rovnou 1 nazýváme jednotkové.

Lemma 1.15. Jednotkové kvaterniony (označované $\mathbb{H}_1$) tvoří multiplikativní grupu. Každý jednotkový kvaternion s nenulovou vektorovou částí lze jednoznačně zapsat ve tvaru

$$\boxed{q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha),}$$

kde $\mathbf{n}$ je jednotkový vektor a $\alpha \in (0, \pi)$.

$\mathbb{C}$: $|z| = 1$ $\cos\alpha + i\sin\alpha$

Věta 1.17. Pro pevný jednotkový kvaternion $q = (\cos\alpha, \mathbf{n}\sin\alpha)$ je lineární zobrazení $R_q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definované jako

$$R_q(\mathbf{r}) = q\mathbf{r}\bar{q}$$

$O_+(3)$

otočení kolem osy $\mathbf{n}$ úhel 2α v kladném směru.

$\vec{r}$

Příklad 1.18. Vypočítejte vektor, který vznikne otočením vektoru $(1, 0, 0)$ kolem vektoru $(3, 4, 0)$ o úhel $\phi = \pi/3$ v kladném směru.

$$\vec{r} = (0,(1,0,0)) = i \qquad \alpha = \pi/6$$

$$\vec{n} = \frac{1}{5}(3,4,0) \qquad q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}(3,4,0)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{10}i + \frac{4}{10}j$$

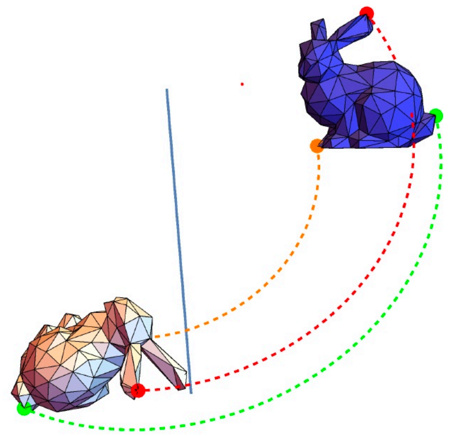
$$\vec{r}' = q r \bar{q} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{10}i + \frac{4}{10}j\right)\cdot i \cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{10}i - \frac{4}{10}j\right) =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{10}i + \frac{4}{10}j\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{10} - \frac{4}{10}k\right) =$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{20} - \frac{3\sqrt{3}}{20}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{100} - \frac{16}{100}\right)i + \left(\frac{12}{100} + \frac{12}{100}\right)j + \left(-\frac{4\sqrt{3}}{20} - \frac{4\sqrt{3}}{20}\right)k$$

$$= 0 + \left(\frac{68}{100}\right)i + \frac{24}{100}j - \frac{8\sqrt{3}}{20}k$$

Věta 1.19. Každá přímá shodnost v $\mathbb{R}^3$ má alespoň jednu samodružnou přímku a lze ji složit z otočení kolem této přímky a posunutí ve směru této přímky (má tedy tvar šroubového pohybu).



Věta 1.20 (Cartan-Dieudonné)**.** Každý prvek $\mathrm{O}(n)$ je možné vyjádřit jako složení nejvýše n souměrností podle nadroviny procházející počátkem a každý prvek $\mathrm{E}(n)$ je možné vyjádřit jako složení nejvýše $n+1$ souměrností podle nadrovin.

$f(x) = AX + p$

$O(n) \iff p = \vec{0}$

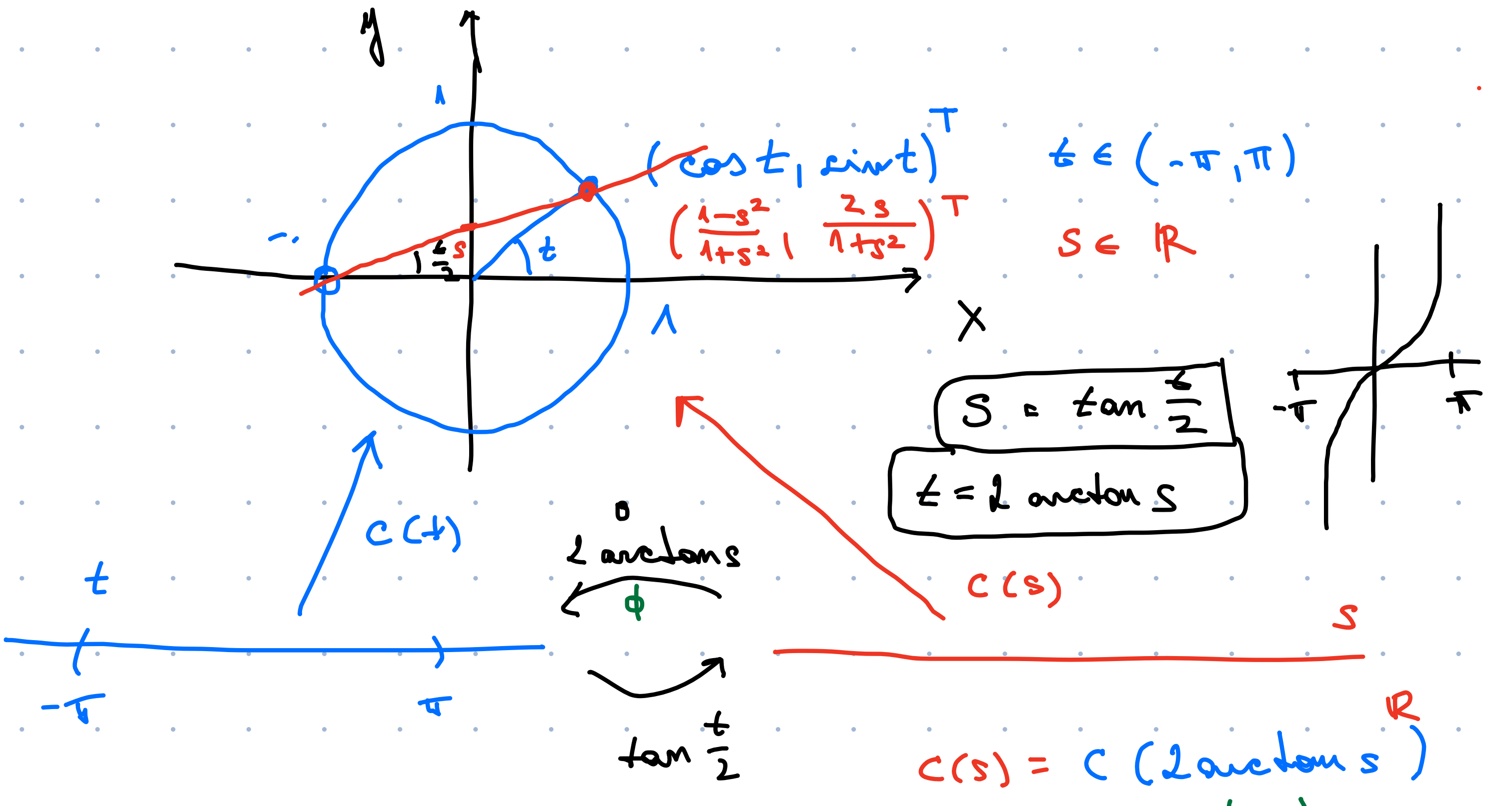
2 Diferenciální geometrie křivek

Příklad 2.1. Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ jednotkovou kružnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$ bez bodu $(-1, 0)$. Tuto množinu parametrizujme jako $\mathbf{c}(t) = (\cos t, \sin t)^T$ pro $t \in (-\pi, \pi)$ a uvažujme reparametrizaci $t = 2 \arctan s$ pro $s \in (-\infty, \infty)$. Nová parametrizace má tvar

$$\mathbf{c}(s) = \left(\frac{1 - s^2}{1 + s^2}, \frac{2s}{1 + s^2} \right)^T, \qquad s \in (-\infty, \infty).$$

Tuto parametrizaci racionálními funkcemi lze také přímo geometricky zkonstruovat jako množinu průsečíků kružnice s přímkami z bodu $(-1, 0)$ se směrnicí $s \in \mathbb{R}$.

Definice 2.2. Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval (případně neomezený), spojité zobrazení $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrická křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $\langle \mathbf{c} \rangle := \mathbf{c}(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky*. Parametrická křivka se nazývá *hladká*, jestliže $\mathbf{c}$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$ (tedy má každá její složka spojitou derivaci všech řádů) a *regulární*, jestliže $\mathbf{c}'(t) \neq (0, 0, \ldots, 0)^T$ pro každé $t \in I$.



Poznámka 2.3.

1. Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme hladkým zobrazením na I restrikci na I hladkého zobrazení definovaného na nějakém otevřeném nadintervalu.

2. Parametrická křivka je popsána n-ticí funkcí $\mathbf{c}(t) = (c_1(t), \cdots, c_n(t))^T$ jedné proměnné definovaných na I.

3. Pro hladkou regulární parametrickou křivku definujeme její funkci rychlosti $||\mathbf{c}'(t)||$, která je hladká a kladná.
   $= \sqrt{c_1'(t)^2 + \ldots + c_n'(t)^2}$

4. Ve větách a definicích budeme pro jednoduchost pracovat s hladkými křivkami (třídy $\mathcal{C}^\infty$), ale většina pojmů a výsledků platí i pro nižší třídu hladkosti.

Definice 2.4. Je-li $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^n$ hladká regulární parametrická křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ hladké bijektivní zobrazení $\tilde{I}$ na I s vlastní a všude nenulovou derivací (tzv. *difeomorfismus*), je

$$\tilde{\mathbf{c}} := \mathbf{c} \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$$

regulární parametrická křivka se stejným obrazem jako $\mathbf{c}$. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* a $\tilde{\mathbf{c}}$ *reparametrizací* $\mathbf{c}$. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme $\tilde{\mathbf{c}}$ reparametrizací $\mathbf{c}$ *zachovávající orientaci.*

Definice a lemma 2.5. Býti reparametrizací je relace ekvivalence (kterou označíme $\sim$) na množině všech hladkých regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *křivka.* Každého zástupce příslušné třídy ekvivalence nazýváme *parametrizací* této křivky. Býti reparametrizací zachovávající orientaci je rovněž relace ekvivalence (kterou označíme $\approx$) na množině všech regulárních parametrizovaných křivek a každou její třídu nazýváme *orientovaná křivka.*

DK

Z MA ϕ^{-1} je také hladký difeomorfismus

1. Reflexivní $c = c \circ \underbrace{id}_{\text{DIFEOM.}}$

2. Symetrická $\tilde{c} = c \circ \phi \Rightarrow c = \tilde{c} \circ \phi^{-1}$

3. Tranzitivita $(\tilde{c} = c \circ \phi) \wedge (\tilde{\tilde{c}} = \tilde{c} \circ \psi) \Rightarrow \tilde{\tilde{c}} = c \circ \underbrace{(\phi \circ \psi)}_{\text{DIFEOM.}}$

1. ekvivalence dokázána!

2. ORIENTACE: $(id)' > 0$

$\phi' > 0 \Rightarrow (\phi^{-1})' > 0$

$(\phi' > 0) \wedge (\psi' > 0) \Rightarrow (\phi \circ \psi)' > 0$

Poznámka 2.6. Pokud nebude nebezpečí omylu, budeme slovem *křivka* (případně orientovaná křivka) označovat nejen třídu ekvivalence, ale i jejího reprezentanta (regulární parametrizovanou křivku), se kterým právě pracujeme, nebo dokonce její obraz.

Poznámka 2.7. V diferenciální geometrii studujeme vlastnosti křivek, které se při reparametrizaci nemění nebo mění odpovídajícím způsobem (například mění znaménko při změně orientace). Nadále budeme používat zkrácený zápis parametrizací téže křivky. Například pokud máme parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ budeme její reparametrizaci $\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))$ označovat jednoduše $\mathbf{c}(s)$. Konečně kvůli zjednodušení zápisu budeme někdy vynechávat hodnotu parametru a budeme psát například $\mathbf{c}'$ místo $\mathbf{c}'(t)$ a podobně. Pokud neřekneme jinak, čárka značí derivaci $\frac{d}{dt}$ a tečka derivaci $\frac{d}{ds}$.

Lemma 2.8. Pro derivace dvou parametrizací $\mathbf{c}(t)$ a $\underbrace{\tilde{\mathbf{c}}(s) = \mathbf{c}(\phi(s))}_{\mathbf{c}(s)}$ téže hladké regulární křivky v každém odpovídajícím bodě platí

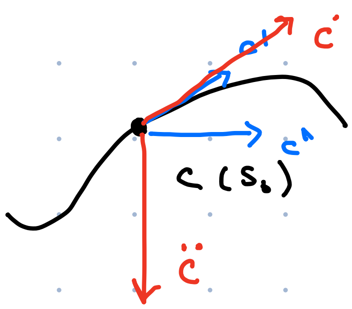
$$(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\dddot{\mathbf{c}}) = (\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''') \begin{pmatrix} \dot\phi & \ddot\phi & \dddot\phi \\ 0 & \dot\phi^2 & 3\dot\phi\ddot\phi \\ 0 & 0 & \dot\phi^3 \end{pmatrix}.$$

DK

$$\dot c(s_0) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0} \tilde c(s) = \frac{d}{ds}\Big|_{s_0} c(\phi(s)) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=\phi(s_0)} c(t) \cdot \frac{d}{ds}\Big|_{s=s_0} \phi(s) = \underline{c' \cdot \dot\phi}$$

$$\ddot c = (\dot c)^{\cdot} = \frac{d}{ds}(c' \cdot \dot\phi) = c' \cdot \ddot\phi + (c')^{\cdot}\dot\phi = \underline{c' \cdot \ddot\phi + (c'' \cdot \dot\phi) \cdot \dot\phi}$$

$$\dddot c = (\ddot c)^{\cdot} = \text{SKRIPTA} \dots = \dddot\phi c' + 3\dot\phi\ddot\phi c'' + (\dot\phi)^3 c'''$$



Definice 2.9. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^2$ definujeme *jednotkový tečný vektor*

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}$$

dále orientovaný jednotkový normálový vektor

$$\mathbf{n}_*(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{t}(t)$$

a znaménkovou křivost

$$\kappa_z(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t))}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je znaménková křivost nulová, nazýváme *inflexní.*

Příklad 2.10. Studujme křivku $\mathbf{c}(t) = (t, t^2)$, kde $t \in (-2, 2)$ v jejím bodě $t = 1$.

Věta 2.11. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^2$ zachovávající orientaci se v daném bodě tečný vektor, orientovaný normálový vektor a znaménková křivost nemění. Při reparametrizaci která mění orientaci se tyto vektory mění na opačné a znaménková křivost pouze změní znaménko. $c(t)$ $\quad c(s) = c(\phi(s))$ $\quad \pm$

Dk

$$\vec{t}(s) = \frac{\dot{c}}{||\dot{c}||} = \frac{\phi' \cdot c'}{||\phi' \cdot c'||} = \operatorname{sign} \phi' \cdot \frac{c'}{||c'||} = \operatorname{sign} \phi' \; \vec{t}(t)$$

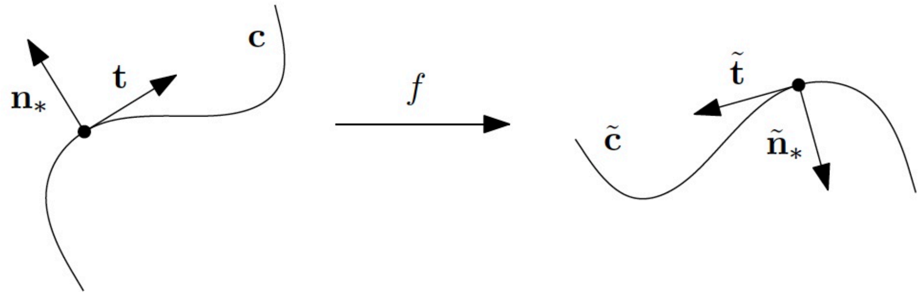
$$\vec{n}_*(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{t}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{\operatorname{sign} \phi'} \; \vec{t}(t) = \operatorname{sign} \phi' \; \vec{n}_*(t)$$

$$\kappa_z(s) = \frac{\det(\dot{c}|\ddot{c})}{||\dot{c}||^3} = \frac{\det\left[(c'|c'')\begin{pmatrix} \phi' & \phi'' \\ 0 & \phi'^2 \end{pmatrix}\right]}{||\phi' \cdot c'||^3} =$$

$\det = \phi'^3$

$$\operatorname{sign}(\phi') \frac{\det(c'|c'')}{||c'||^3} \; \kappa_z(t).$$

Věta 2.12. Znaménková křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^2$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ_z, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}_*$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{A}\mathbf{c}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě znaménkovou křivost $\tilde\kappa_z = (\det \mathbf{A})\kappa_z$, tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{A}\mathbf{t}$ a normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}}_* = (\det \mathbf{A})\mathbf{A}\mathbf{n}_*$.



Dk

$$\tilde c(t) = A\cdot c(t) + p$$

$$\tilde c'(t) = A\cdot c'(t) \qquad \tilde c''(t) = A\cdot c''(t)$$

$$\tilde\kappa_z = \frac{\det(\tilde c' \mid \tilde c'')}{\|\tilde c'\|^3} = \frac{\det(Ac' \mid Ac'')}{\|Ac'\|^3} = \det A \cdot \underbrace{\frac{\det(c' \mid c'')}{\|c'\|^3}}_{\kappa_z}$$

$$\tilde{\vec t} = \frac{\tilde c'}{\|\tilde c'\|} = \frac{Ac'}{\|Ac'\|} = A\,\frac{c'}{\|c'\|} \quad \vec t$$

$$\tilde{\vec n}_* = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\tilde{\vec t} = \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix} A\,\vec t = (\det A)\cdot A\,\overbrace{\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\vec t}^{\bar n_*}.$$

$\cdot$ $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ komutuji s $\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}$

antikomutuji $\begin{pmatrix}a&b\\b&-a\end{pmatrix}$

Definice 2.13. Pro každou křivku $\mathbf{c}$ definujeme v každém bodě její *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a *normálovou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}_*(t)\}$. Dále v každém neinflexním bodě definujeme její *poloměr křivosti* jako $R(t) = \frac{1}{|\kappa_z(t)|}$, její *střed křivosti* jako bod $S(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa_z(t)}\mathbf{n}_*(t)$ a kružnici se středem $S(t)$ a poloměrem $R(t)$ nazýváme *oskulační kružnice* v bodě $\mathbf{c}(t)$.

Důsledek 2.14. Tečná přímka, normálová přímka a oskulační kružnice se nemění při reparametrizaci a jsou ekvivariantní vůči shodnostem.

Poznámka 2.15. Křivka má v každém svém bodě kontakt nejvyššího řádu s tečnou přímkou (ze všech přímek) a v každém neinflexním bodě s oskulační kružnicí (ze všech kružnic). Navíc, jestliže označíme $N(t)$ normálovou přímku v bodě t, pak v každém neinflexním bodě $\mathbf{c}(t_0)$ platí

$$S(t_0) = \lim_{t->t_0} N(t_0) \cap N(t).$$

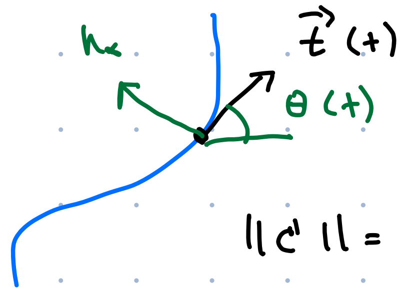
Věta 2.16. Pro hladkou regulární parametrickou křivku $\mathbf{c} : I \to \mathbb{R}^2$ platí

$$\mathbf{t}'(t) = ||\mathbf{c}'(t)||\kappa_z(t)\mathbf{n}_*(t).$$

Dále platí, že existuje hladká funkce $\theta(t) : I \to \mathbb{R}$ splňující $\mathbf{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$ pro $t \in I$ a pro znaménkovou křivost pak platí

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \quad t \in I.$$

Pokud je tedy křivka parametrizována konstantní jednotkovou rychlostí $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$, pak je tedy znaménková křivost rychlostí změny směru křivky.



$$\theta' = ||c'|| \cdot \kappa_z$$

$$||c'|| = \sqrt{c' \cdot c'}$$

$$(\sqrt{x^2})' = \frac{1}{2} \frac{2x \cdot \cancel{x}}{}$$

Dk

$$\vec{t}' = \left(\frac{c'}{||c'||}\right)' = \frac{\sqrt{c'\cdot c'}\, c'' - \frac{1}{2}\frac{2c'\cdot c''}{\sqrt{c'\cdot c'}}\, c'}{c'\cdot c'} =$$

$$= \frac{||c'||^2 c'' - (c'\cdot c'')c'}{||c'||^3} = K \cdot \vec{n}_*$$

to má směr n_* <=> kolmé na c'

$$\frac{||c'||^2 c'' - (c'\cdot c'')c'}{||c'||^3} \cdot c' = ||c'||^2 \cdot \cancel{(c''\cdot c')} - (c'\cdot c'')\cancel{||c'||^2}$$

$$= 0$$

Nyní množství $\vec{t}'$:

$$\det(\vec{t},\vec{t}') = \det(\vec{t}, k\vec{n}_*) = k$$

$$\det\left(\frac{c'}{\|c'\|}, \frac{\|c'\|^2 c'' - \cancel{(c'\cdot c'')}c'}{\|c'\|^3}\right) =$$

$$= \det(c', c'') \cdot \frac{1}{\|c'\|^2} = \|c'\| \frac{\det(c', c'')}{\|c'\|^3}$$

κ_z

$$\Rightarrow \vec{t}' = \|c'\| \, \kappa_z \cdot \vec{n}_*$$

Dále $\vec{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$

$$\vec{t}'(t) = \theta'(t)\underbrace{(-\sin\theta(t), \cos\theta(t))}_{\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}(\vec{t}) = n_*}$$

z 1. části úvahy $\parallel$

$$\|c'(t)\| \cdot \kappa_z(t) \cdot \vec{n}_*(t)$$

Věta 2.17. Na otevřeném intervalu I budiž zadány dvě hladké reálné funkce $f(t)$, $r(t)$, přičemž $r(t) > 0$ pro $t \in I$. Pak existuje až na přímou shodnost právě jedna hladká parametrická rovinná křivka $\mathbf{c}(t)$, $t \in I$, pro kterou platí

$$||\mathbf{c}'(t)|| = r(t), \qquad \kappa_z(t) = f(t).$$

$\theta = \int$

Dk $\exists!\ \theta(t)$ ① $\theta'(t) = r(t)\cdot f(t)$ $t_0 \in I$

② $\theta(t_0) = \theta_0$ KONSTANTY

$$\Rightarrow \vec{t}(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

$$\Rightarrow c'(t) = r(t)\cdot\vec{t}(t)$$

$$\Rightarrow c(t) = \int r(t)\cdot(\cos\theta(t), \sin\theta(t))$$

$c(t_0) = (x_0, y_0)$

$\boxed{\text{Křivky v } \mathbb{R}^3}$

Definice 2.18. V každém bodě hladké regulární parametrické křivky $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme *jednotkový tečný vektor* $\mathbf{t}(t)$ a *křivost* $\kappa(t)$

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t)}{||\mathbf{c}'(t)||}, \qquad \kappa(t) = \frac{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}{||\mathbf{c}'(t)||^3}.$$

Bod, ve kterém je křivost nulová, se nazývá *inflexní bod*. V každém neinflexním bodě dále definujeme *jednotkový binormálový vektor* $\mathbf{b}(t)$, *jednotkový normálový vektor* $\mathbf{n}(t)$ a *torzi* $\tau(t)$

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||}, \qquad \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t), \qquad \tau(t) = \frac{\det(\mathbf{c}'(t)|\mathbf{c}''(t)|\mathbf{c}'''(t))}{||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||^2}.$$

Z definice plyne, že trojice vektorů $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ tvoří v každém neinflexním bodě kladně orientovanou ortonormální bázi $\mathbb{R}^3$, která se nazývá *Frenetův repér.*

Věta 2.19. Při reparametrizaci křivky v $\mathbb{R}^3$ zachovávající orientaci se v daném bodě křivost, torze a Frenetův repér nemění. Při reparametrizaci, která mění orientaci se křivost, torze a normálový vektor rovněž nemění, zatímco tečný a binormálový vektor se mění na vektory opačné.

Dk

$$\tilde{c}(s) = c(\phi(t))$$

$$(\dot{\mathbf{c}}|\ddot{\mathbf{c}}|\dddot{\mathbf{c}}) = (\mathbf{c}'|\mathbf{c}''|\mathbf{c}''') \underbrace{\begin{pmatrix} \dot\phi & \ddot\phi & \dddot\phi \\ 0 & \dot\phi^2 & 3\dot\phi\ddot\phi \\ 0 & 0 & \dot\phi^3 \end{pmatrix}}_{M} \Leftarrow \text{LEMMA 2.8.} \qquad \det M = \dot\phi^6$$

$$\dot c \times \ddot c = (\dot\phi c') \times (\cancel{\ddot\phi c'} + \dot\phi^2 \cdot c'') = (\dot\phi^3) \cdot (c' \times c'')$$

$$\tilde{\vec t} = \frac{\dot c}{||\dot c||} = \frac{\dot\phi\, c'}{|\dot\phi|\, ||c'||} = \operatorname{sign} \dot\phi \ \vec t$$

$$\tilde{\vec b} = \frac{\dot c \times \ddot c}{||\dot c \times \ddot c||} = \frac{(\dot\phi)^3}{|\dot\phi|^3} \cdot \frac{(c' \times c'')}{||c' \times c''||}$$

sign $\dot\phi$ $\quad \vec b$

$$\tilde{\vec n} = \tilde{\vec b} \times \tilde{\vec t} = (\operatorname{sign} \dot\phi)^2 \ \vec b \times \vec t = \vec n$$

$$\tilde\kappa = \frac{\|\dot c \times \ddot c\|}{\|\dot c\|^3} = \frac{|\phi'|^3 \, \|c' \times c''\|}{|\phi'|^3 \, \|c'\|} \quad \kappa$$

$$\tilde\tau = \frac{\det(\dot c|\ddot c|\dddot c)}{\|\dot c \times \ddot c\|^2} = \frac{\det(c'|c''|c''') \, \cancel{\det} M \; \phi'^6}{\|c' \times c''\|^2 \cdot |\phi'|^6} \quad \tau$$

Věta 2.20. Křivost, tečný a normálový vektor jsou ekvivariantní vůči shodnostem $\mathbb{R}^3$. Přesněji, mějme shodnost ve tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX} + \mathbf{p}$, parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$ a v jejím libovolném bodě veličiny κ, $\mathbf{t}$ a v neinflexním bodě navíc τ, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Pak křivka $\tilde{\mathbf{c}}(t) = f(\mathbf{c}(t)) = \mathbf{Ac}(t) + \mathbf{p}$ má v odpovídajícím bodě křivost $\tilde\kappa = \kappa$ a tečný vektor $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{At}$. V neinflexních bodech má navíc torzi $\tilde\tau = (\det \mathbf{A})\tau$, normálový vektor $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{An}$ a binormálový vektor $\tilde{\mathbf{b}} = (\det \mathbf{A})\mathbf{Ab}$.

Bez Dk

Definice 2.21. Pro hladkou regulární křivku $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ definujeme v každém bodě *tečnou přímku* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t)\}$ a dále v každém neinflexním bodě definujeme

- *oskulační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t)\}$, $= LO\{c'(t), c''(t)\}$
- *rektifikační rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{t}(t), \mathbf{b}(t)\}$,
- *normálovou rovinu* jako množinu $\mathbf{c}(t) + LO\{\mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$.

Definice a lemma 2.22. O hladké parametrizované křivce $\mathbf{c}(t)$ řekneme, že je *parametrizovaná obloukem* nebo jednotkovou rychlostí, jestliže pro všechna $t \in I$ platí $||\mathbf{c}'(t)|| = 1$. Každou hladkou regulární křivku lze parametrizovat obloukem. Je-li $\mathbf{c}(t)$ nějaká parametrizace obloukem, pak všechny ostatní parametrizace této křivky obloukem získáme reparametrizací $t = \phi(s)$, $\phi(s) = \pm s + s_0$, kde s_0 je libovolná konstanta.

Dk $\quad c_t : I \to \mathbb{R}^n$ regulární, hladká

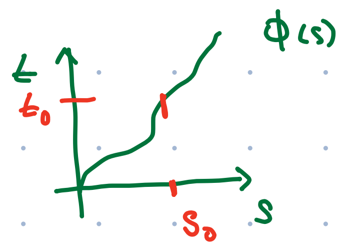
$\|c'(t)\| > 0$

definuji $\quad \psi(t) = \int \|c'(t)\| \, dt \quad$ (jedna z primit. funkcí)

$\psi'(t) = \|c'(t)\| > 0 \quad$ hladká bijekce (difeom.)

$\exists \ \phi = \psi^{-1}$ a reparametrizuji $\quad c(s) = c(\underbrace{\phi(s)}_{=t})$

$$\dot{c}_{s_0} = \dot{\phi}_{s_0}\, c'_{t_0} = \frac{1}{\psi'_{t_0}} \cdot c'_{t_0} = \frac{c'}{\|c'\|} = 1 \quad \text{tedy oblouk}$$



Mějme $c(t)$ oblouk
$c(\phi(s))$ totéž oblouk } 2 param. obloukem

$$\dot{c} = \dot{\phi} \cdot c'$$

$$\overset{1 =}{} \|\dot{c}\| = |\dot{\phi}| \cdot \underbrace{\|c'\|}_{=1} \Rightarrow \dot{\phi} = \pm 1$$

$$\phi = \pm s + s_0$$

$\boxtimes$

Lemma 2.23. Pro regulární hladkou křivku $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovanou obloukem v každém bodě platí $\mathbf{t}(t) = \mathbf{c}'(t)$ a $\kappa(t) = ||\mathbf{c}''(t)|| = ||\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)||$. V každém neinflexním bodě navíc $\mathbf{n}(t) = \frac{\mathbf{c}''(t)}{||\mathbf{c}''(t)||}$.

Dk

$$t = \frac{c'}{\underbrace{\|c'\|}_{=1}} = c'$$

$$c'(t) \cdot c'(t) = 1 \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$2c'(t) \cdot c''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad c' \perp c''$$

$$\Rightarrow \|c' \times c''\| = \underbrace{\cancel{\|c'\|}}_{c'} \|c''\| = \|c''\|$$

$$\kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} = \|c''\|$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} \times \frac{c'}{\|c'\|} = \frac{1}{\|c''\|} (c' \times c'') \times c' =$$

$$= -\frac{1}{\|c''\|} \underset{u}{c'} \times (\underset{v}{c'} \times \underset{w}{c''}) = -\frac{1}{\|c''\|} \Big(\underbrace{(c' \cdot c'')}_{=0} \cdot c' - \underbrace{(c' \cdot c')}_{=1} \cdot c'' \Big)$$

$$= \frac{c''}{\|c''\|}$$

$\boxtimes$

Lemma 1.16. Pro každé tři vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ platí

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

Věta 2.24 (Frenetovy vzorce)**.** Je-li $\mathbf{c}(t)$ hladká křivka v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem, pak v každém neinflexním bodě platí

$$\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}, \qquad \mathbf{n}' = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}, \qquad \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n},$$

což lze vyjádřit maticově jako

$$(\mathbf{t}'|\mathbf{n}'|\mathbf{b}') = (\mathbf{t}|\mathbf{n}|\mathbf{b}) \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

nebo s využitím takzvaného Darbouxova vektoru $\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$ jako

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \qquad \mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \qquad \mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b}.$$

Dk

$\vec d \times \vec t = (\tau \vec t + \kappa \vec b) \times \vec t = \kappa \vec n = \vec t'$

$\vec d \times \vec n$ — — — $\vec n'$

$d \times \vec b =$ — — — $\vec b'$

Uvažujme 3 vektory závisející na t

$(v_1(t), v_2(t), v_3(t))$ ON báze $\forall t$

libovolný vektor $\vec v \in \mathbb{R}^3$

$\vec v = (\vec v \cdot \vec v_1)\vec v_1 + (\vec v \cdot \vec v_2)\vec v_2 + (v \cdot \vec v_3)\vec v_3$

platí i pro $\vec v = \vec v_1'$, $\vec v_2'$, $\vec v_3'$

$(\vec v_1' | \vec v_2' | \vec v_3') = (\vec v_1 | \vec v_2 | \vec v_3) M$ kde $m_{ji} = \vec v_i' \cdot \vec v_j$

$\forall i,j.$ $\vec v_i \cdot \vec v_j = \delta_{ij} \quad \Big| \frac{d}{dt}$

$\vec v_i' \cdot \vec v_j + \vec v_i \cdot \vec v_j' = 0$

$\underbrace{\vec v_i' \cdot \vec v_j = -\vec v_j' \cdot \vec v_i}$ $\Rightarrow$ M je antisymetrická.

Nyní speciální případ $(\vec{v}_1|\vec{v}_2|\vec{v}_3) = (\vec{t}|\vec{n}|\vec{b})$

podle Lemma $\underline{2.23}$

$$\vec{t} = c' \qquad \kappa = \|c''\|$$

$$\vec{t}' = c'' \qquad \vec{n} = \frac{c''}{\|c''\|} = \frac{\vec{t}'}{\kappa} \Bigg\} \quad \vec{t}' = \kappa \cdot \vec{n}$$

$$\Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$= \vec{n}' \cdot \vec{b}$

$$\vec{n}' \cdot \vec{b} = \left(\frac{c''}{\underbrace{\|c''\|}_{\kappa}}\right)' \cdot \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} = \frac{\kappa \cdot c''' - \cancel{\kappa' \cdot c''}}{\kappa^2} \cdot \frac{c' \times c''}{\kappa} =$$

$$= \frac{1}{\kappa^2} c''' \cdot (c' \times c'') = \underbrace{\frac{\det(c'|c''|c''')}{\|c' \times c''\|^2}}_{\tau}$$

Věta 2.26. Nechť $f(t) > 0, g(t)$ jsou hladké funkce definované na otevřeném intervalu I. Pak existuje až na přímou eukleidovskou shodnost právě jedna hladká křivka $\mathbf{c}(t)$ v $\mathbb{R}^3$ parametrizovaná obloukem na intervalu I tak, že

$$\kappa(t) = f(t), \quad \tau(t) = g(t).$$

Tyto rovnice se někdy nazývají *přirozené rovnice křivky*.

Věta 2.27. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ bez inflexních bodů platí, že leží v nějaké rovině právě tehdy, když $\tau(t) = 0$ pro každé $t \in I$.

$\underline{\text{Dk}}$ $(\Rightarrow)$ $\quad c(t)$ leží v $\quad px + qy + rz + s = 0$

(c_x, c_y, c_z)

$$p \cdot c_x + q\, c_y + r\, c_z + s = 0 \qquad \frac{d}{dt}$$

$$p \cdot c_x' + q\, c_y' + r\, c_z' = 0 \qquad \frac{d}{dt}$$

$$p \cdot c_x'' + q\, c_y'' + r\, c_z'' = 0 \qquad \frac{d}{dt}$$

$'''$ $\quad$ $'''$ $\quad$ $'''$

c', c'', c''' jsou kolmé na (p,q,r) $\Rightarrow$ LZ

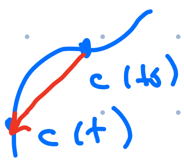
$\Rightarrow \tau = 0$.

$\Leftarrow$ $\tau \equiv 0$ v každém bodě FRENET

$\vec{b}' = -\tau \cdot \vec{n} = 0$ $\Rightarrow$ $\vec{b}$ je konstantní

zvolme $t_0 \in I$

def. $h(t) = (c(t) - c(t_0)) \cdot \vec{b}(t)$



platí $h(t_0) = 0$

$h' = c'(t) \cdot \vec{b} = 0$

$\Rightarrow h \equiv 0$

$$c(t) \cdot \underbrace{\vec{b}(t)}_{(p,q,r)} - \underbrace{c(t_0) \cdot \vec{b}(t)}_{s} = 0$$

rovina $\blacksquare$

Věta 2.28. Pro regulární hladkou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ vnořenou do $\mathbb{R}^3$ zobrazením $(x, y) \to (x, y, 0)$ platí $\kappa = |\kappa_z|$ a v neinflexních bodech $\mathbf{n} = \operatorname{sign}(\kappa_z)\mathbf{n}_*$.

$$c = (c_x, c_y) = (c_x, c_y, 0)$$

$$\kappa_z = \frac{\det\begin{pmatrix} c_x' & c_x'' \\ c_y' & c_y'' \end{pmatrix}}{\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2}^{\,3}} \qquad \kappa = \frac{\|(c_x', c_y', 0) \times (c_x'', c_y'', 0)\|}{\sqrt{c_x'^2 + c_y'^2 + 0}^{\,3}} = \frac{\|(0, 0, \det(\ ))\|}{\sqrt{\ }^{\,3}}$$

$\kappa = |\kappa_z|$

rovné $|\ |$

$$\vec{t} = (t_x, t_y, 0)$$

$$\vec{n}_* = (-t_y, t_x, 0)$$

± 1 sign det( )

$$\vec{b} = \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} = (0, 0, \operatorname{sign}(\kappa_z))$$

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} = \operatorname{sign}(\kappa_z)(0, 0, 1) \times (t_x, t_y, 0) = \operatorname{sign}(\kappa_z)(-t_y, t_x, 0)$$

$\blacksquare$

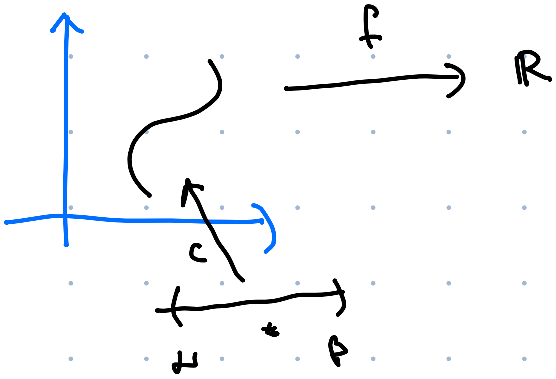
KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Definice 2.29. Mějme regulární hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a reálnou funkci f definovanou na $\langle \mathbf{c} \rangle$ $= \operatorname{Im} c$. Pak definujeme *Křivkový integrál 1. druhu*

$$\int_{\mathbf{c}} f \mathrm{d}s := \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{c}(t)) ||\mathbf{c}'(t)|| \mathrm{d}t,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 2.30. Křivkový integrál prvního druhu nezávisí na (re)parametrizaci.



Př. $f(x,y) = xy$

$c(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 3t \\ 3t \end{pmatrix}$ $\quad ||c'(t)|| = 3(1+t^2)$

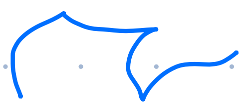
$t \in (0,1)$

$$\int_c f\,ds = \int_0^1 f(c(t))\,||c'(t)||\,dt = \int_0^1 (t^3 - 3t)\cdot 3t \cdot 3(1+t^2)\,dt =$$

$$= 9\int_0^1 t^6 - 2t^4 - 3t^2\,dt = 9\left[\frac{t^7}{7} - \frac{2t^5}{5} - t^3\right]_0^1 =$$

$$= 9\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{5} - 1\right)$$

Lze definovat i pro c v konečně bodech C^0 a na zbytku C^1



Dk. $c(t)$ na $t \in (\alpha, \beta)$

$c(s) = c(\phi(s))$ na $s \in (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$

ϕ diff. $\quad \dot{c} = \dot{\phi} \cdot c'$

$$\int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(c(s))\,||\dot{c}(s)||\,ds = \int_{\tilde{\alpha}}^{\tilde{\beta}} f(c(\phi(s)))\,||c'(\phi(s))||\,|\dot{\phi}(s)|\,ds =$$

subs. $t = \phi(s)$, $dt = \dot{\phi}\,ds$

$\dot{\phi} > 0$, $|\dot{\phi}| = \dot{\phi}$: $\quad = \int_{\alpha}^{\beta} f(c(t)) \cdot ||c'(t)|| \cdot dt$

$\dot{\phi} < 0$, $-|\dot{\phi}| = \dot{\phi}$: $\quad = \int_{\beta}^{\alpha} f(c(t)) \cdot ||c'(t)||\,(-dt)$

$\alpha \updownarrow \beta$

Definice 2.31. Délku křivky definujeme jako integrál prvního druhu z konstantní jednotkové funkce

$$\ell(\mathbf{c}) := \int_{\mathbf{c}} 1 \mathrm{d}s. \quad = \int_\alpha^\beta 1 \cdot \|c'(t)\| \, dt$$

Definice 2.32. Parametrizovaná křivka $\mathbf{c} : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ se nazývá *uzavřená*, jestliže $\mathbf{c}(\alpha) = \mathbf{c}(\beta)$. Tuto křivku navíc nazveme *jednoduchou*, je-li $\mathbf{c}$ prosté na $[\alpha, \beta)$. Jednoduchá uzavřená rovinná křivka se rovněž nazývá *Jordanova*.

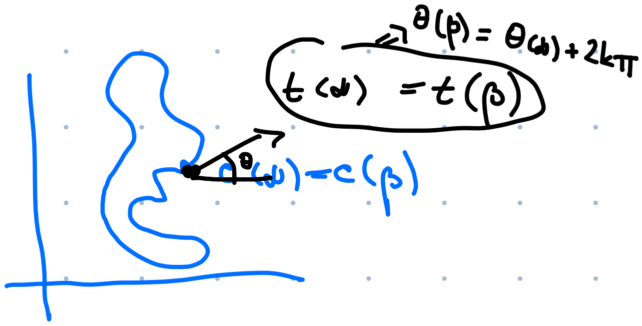
Věta 2.33 (Umlaufsatz)**.** Je-li $\mathbf{c}(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ regulární hladká uzavřená křivka, pro kterou navíc $\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{t}(\beta)$, pak existuje $k \in \mathbf{Z}$ (nazývané index křivky) takové, že

$$\int_c \kappa_z \, \mathrm{d}s = 2k\pi.$$

Je-li navíc $\mathbf{c}$ jednoduchá kladně orientovaná křivka, pak $k = 1$.

BEZ Dk

"proti směru hodinových ručiček"



Dk

2.16.

$$\kappa_z(t) = \frac{\theta'(t)}{\|\mathbf{c}'(t)\|},$$

$\vec{t} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\int_c \kappa_z \, ds = \int_\alpha^\beta \kappa_z(t) \cdot \|c'(t)\| \, dt = \int_\alpha^\beta \theta'(t) \, dt =$$

$$= \left[\theta(t)\right]_\alpha^\beta = 2k\pi \qquad \square$$

Definice 2.34. Mějme regulární hladkou parametrickou křivku $\mathbf{c}(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$ v $\mathbb{R}^n$ a zobrazení (vektorové pole) $\mathbf{F} : \langle \mathbf{c} \rangle \to \mathbb{R}^n$. Pak definujeme *Křivkový integrál 2. druhu*

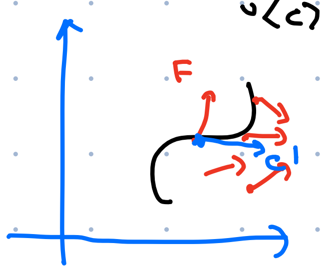
$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} \mathrm{d}\mathbf{X} := \int_\alpha^\beta \mathbf{F}(\mathbf{c}(t)) \cdot \mathbf{c}'(t) \mathrm{d}t,$$

pokud integrál napravo existuje jako Lebesgueův integrál.

Věta 2.35. Křivkový integrál 2. druhu nezávisí na reparametrizaci zachovávající orientaci a mění znaménko při změně orientace.

Př.

$\mathbb{R}^n \supset \langle c \rangle \xrightarrow{F} \mathbb{R}^n$



např. $(x-y, x+y)$

Dk: c a F je dáno, definuji na $\langle c \rangle$ funkci

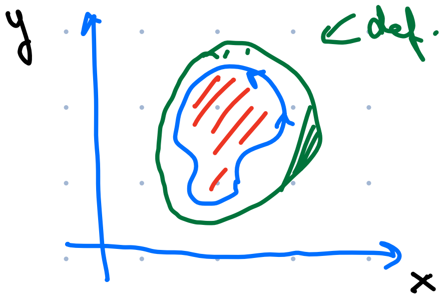
$$f = F \cdot \vec{t} \qquad \vec{t} = \frac{c'}{\|c'\|}$$

$$\int_c F dX = \int_c f ds$$ když zachovám orientaci

když změním orientaci $f \Rightarrow -f$. ☒

Věta 2.36 (Greenova věta). Nechť $\mathbf{c}$ je jednoduchá, hladká, uzavřená, regulární, kladně orientovaná (proti směru hodinových ručiček) křivka v $\mathbf{R}^2$. Nechť $\mathbf{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ je hladké vektorové pole definované na nějakém okolí uzávěru Int $\mathbf{c}$. Pak

$$\int_{\mathbf{c}} \mathbf{F} d\mathbf{X} = \int_{\text{Int } \mathbf{c}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy.$$



F $\quad F_1 \quad F_2$

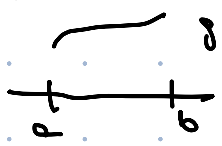
Př: $F = (x \cdot y, x + y)$

$$\int_c F dx = \int_{\text{Int } c} (1 - x) \, dx dy$$

bez Dk.

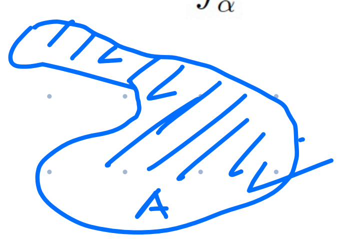
$G'(x) = g(x)$

$$\int_a^b g(x) = G(b) - G(a)$$



Lemma 2.37 (Obsah oblasti). Buď $\mathbf{c}(t) = (c_x(t), c_y(t))^T$, $t \in [\alpha, \beta]$ kladně orientovaná, hladká, regulární jednoduchá, uzavřená křivka. Pak plošný obsah oblasti Int $\mathbf{c}$ je roven

$$A = \int_\alpha^\beta c_x(t) c_y'(t) dt = -\int_\alpha^\beta c_y(t) c_x'(t) dt = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta (c_x c_y' - c_x' c_y) dt.$$



$c = (R \cdot \cos t, R \cdot \sin t)$ $\quad t \in (0, 2\pi)$

$$A = \int_0^{2\pi} R \cdot \cos t \cdot R \cdot \cos t \, dt.$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt \qquad = R^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt}_{\pi} = \underline{\underline{\pi R^2}}$$

$$I_1 = I_2$$

$$I_1 + I_2 = \int_0^{2\pi} (\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}) \, dt = \underline{\underline{2\pi}}$$

Dk Greenova věta pro vhodné F

$$F = (0, x) \implies \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$$

$$\int_c F \, dx = \int_\alpha^\beta (0, c_x(t)) \cdot (c'_x(t), c'_y(t)) \, dt = \int_\alpha^\beta c_x(t) c'_y(t) \, dt$$

$$F = (-y, 0) \quad - - \ldots \longrightarrow \quad -\int_\alpha^\beta c_y(t) c'_x(t) \, dt$$

$$F = \frac{1}{2}(-y, x) \qquad \text{průměr.}$$

Věta 2.39 (Isoperimetrická nerovnost)**.** Buď $\mathbf{c} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená regulární hladká křivka délky l a buď A plošný obsah Int $\mathbf{c}$. Pak

$$\frac{l^2}{4\pi} \geq A,$$

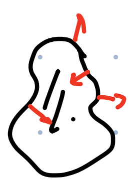
přitom rovnost nastane, právě když $\mathbf{c}$ je kružnice.

Pro kružnici: $l = 2\pi R$, $A = \pi R^2$

$$\frac{l^2}{4\pi} = \frac{4\pi^2 R^2}{4\pi} = \pi R^2$$

ROVNOST.

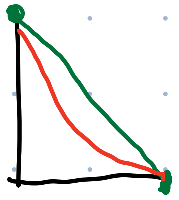
Dk.



l dané

$\max\limits_{\{\text{křivky délky } l\}} A$

Optimalizace přes ∞ dim prostor

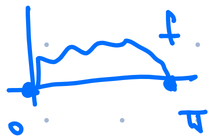


$\Rightarrow$ VARIAČNÍ POČET.

Lemma 2.38 (Wirtingerovo). Nechť $f(t) : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ je hladká funkce, pro kterou platí $f(0) = f(\pi) = 0$. Pak

$$\int_0^\pi f'^2(t)dt \geq \int_0^\pi f^2(t)dt$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $f(t) = D\sin(t)$, kde D je konstanta.



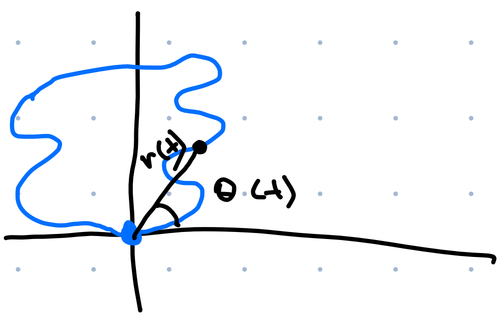
Bez Dk.

Dk Věty 2.39

BÚNO $c(t)$ parametr. na $t \in (0,\pi)$ konst. rychlostí $\|c'(t)\| = \frac{\ell}{\pi}$

$$c(0) = c(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c'(0) = (c'_x(0), 0) \qquad c'_x(0) = 0$$



Vyjádříme

$$c(t) = (c_x(t), c_y(t)) = \underline{r(t)}(\cos\theta(t), \sin\theta(t)) \quad \geq 0$$

$$r(0) = r(\pi) = 0$$

$$A = \frac{1}{2}\int_0^\pi (c_x \cdot c_y' - c_y c_x') = \frac{1}{2}\int_0^\pi r\cdot\cos\theta\,(r'\cdot\sin\theta + r\theta'\cos\theta) -$$

$$- r\cdot\sin\theta\,(r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi r^2\cdot\theta'\,dt$$

$$\left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 = \overset{\text{konst}}{\|c'\|} = c_x'^2 + c_y'^2 = \ldots\ldots = r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^\pi \underbrace{(r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2)}_{\text{konst}} \, dt = \frac{\ell^2}{\pi}$$

$$\frac{\ell^2}{4\pi} - A = \frac{1}{4} \int_0^\pi \left(r'^2 + r^2 \cdot \theta'^2 - 2\, r^2 \cdot \theta'\right) dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4} \int_0^\pi r^2 (\theta' - 1)^2}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{4} \int_0^\pi (r'^2 - r^2)\, dt}_{\geq 0 \text{ podle } 2.39} \geq 0$$

$= 0 \iff \theta = t + k$

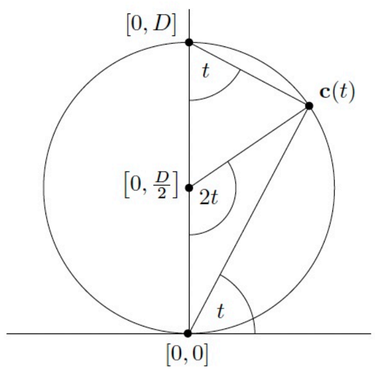
navíc $\theta(0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\theta(t) = t}}$$

$= 0 \iff \underline{\underline{r(t) = D \cdot \sin t}}$

$$\Rightarrow \quad c(t) = D \cdot \sin t \cdot (\cos t, \sin t) = \left(0, \frac{D}{2}\right) + \frac{D}{2} (\sin 2t, \cos 2t)$$

$t \in (0, \pi)$



$\blacksquare$

Afinní geometrie

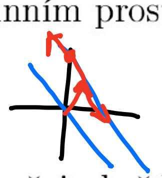
Definice 3.1. Mějme vektorový prostor V dimenze n nad tělesem T. Neprázdnou množinu A spolu se zobrazením $\oplus : A \times V \to A$ nazveme *afinním prostorem se zaměřením V jestliže*

1. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{X} \in A : (\mathbf{X} \oplus \mathbf{u}) \oplus \mathbf{v} = \mathbf{X} \oplus (\mathbf{u} + \mathbf{v})$
2. $\forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in A, \exists! \mathbf{v} \in V : \mathbf{X} \oplus \mathbf{v} = \mathbf{Y}$, *tento vektor značíme* $\mathbf{v} = \mathbf{Y} \ominus \mathbf{X}$.

Prvky A nazýváme body *afinního prostoru. Dimenzi afinního prostoru definujeme jako dimenzi jeho zaměření. Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme místo $\oplus$ psát obyčejné $+$ a místo $\ominus$ psát $-$.*

Příklad 3.2. V příkladech se budeme zavývat jen následujícími afinními prostory:

- Množina $A = \mathbb{R}^3$ je afinním prostorem nad vektorovým prostorem $V = \mathbb{R}^3$.
- Obecně pro libovolný vektorový prostor můžeme klást $A = V$ a zístkáme aritmetický afinní prostor.
- Množina
$$A = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z - 6 = 0\} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
je afinním prostorem nad



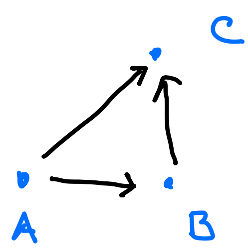
$$V = LO\{(-2, 1, 0)^T, (-3, 0, 1)^T\}.$$

LO

- Obecně je každý lineární útvar (řešení soustavy lineárních rovnic) afinním prostorem nad svým zaměřením (řešením příslušné homogenní soustavy). Jedná se o afinní podprostor aritmetického afinní prostoru.

Věta 3.3. Mějme afinní prostor A se zaměřením V, pak pro libovolné prvky $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in A$; $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ platí

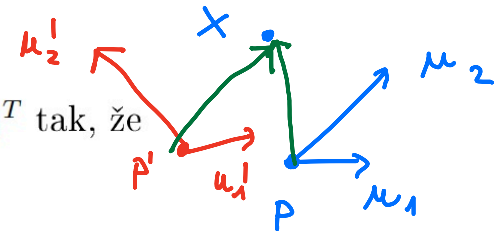
1. $\mathbf{A} \oplus \mathbf{o} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{B} \ominus \mathbf{A}) = -(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B})$
3. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \ominus \mathbf{C}) = \mathbf{A} \ominus \mathbf{C}$
4. $(\mathbf{A} \oplus \mathbf{u}) - (\mathbf{B} \oplus \mathbf{v}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{u} - \mathbf{v})$
5. $(\mathbf{A} \ominus \mathbf{B}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \ominus \mathbf{D}) + (\mathbf{C} \ominus \mathbf{B})$



Důkaz. Pro afinní prostory z Příkladu 3.2 jsou tvrzení zjevná, neboť $\boxed{\oplus = +.}$ Vo obecném případě se vlastnosti musí technick dokázat z definice.

Definice 3.4. *Afinní soustavou souřadnic* (nebo také *repérem*) v afinním prostoru A dimenze n rozumíme $(n+1)$-tici $S = (\mathbf{P}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$, kde $\mathbf{P} \in A$ je bod nazývaný počátek a $B = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n)$ je báze V. Pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ definujeme jeho souřadnice v soustavě S vztahem

$$[\mathbf{X}]_S = [\mathbf{X} - \mathbf{P}]_B.$$



Jedná se tedy o jednoznačně určenou n-tici skalárů $(t_1, \dots, t_n)^T$ tak, že

$$\mathbf{X} = \mathbf{P} + t_1\mathbf{u}_1 + t_2\mathbf{u}_2 + \dots + t_n\mathbf{u}_n.$$

Pro jednoduchost se i pro vektory dovoluje zápis $[\mathbf{v}]_S := [\mathbf{v}]_B$.

Věta 3.5. Mějme v afinním prostoru A dvě soustavy souřadnic $S = (\mathbf{P}, \underbrace{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n}_{B})$ a $S' = (\mathbf{P}', \underbrace{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_n}_{B'})$. Pak pro libovolný bod $\mathbf{X} \in A$ platí

$$[\mathbf{X}]_{S'} = [Id]^B_{B'}[\mathbf{X}]_S + [\mathbf{P}]_{S'}.$$

Zároveň pro každý vektor $\mathbf{v} \in V$ triviálně platí $[\mathbf{v}]_{S'} = [Id]^B_{B'}[\mathbf{v}]_S$.   z LA   matice přechodu

Dk

$$[X]_{S'} = [X - P']_{B'} = [(X-P) + (P-P')]_{B'} =$$

$$= [(X-P)]_{B'} + [(P-P')]_{B'} = [Id]^B_{B'} \underbrace{[(X-P)]_B}_{[X]_B} + [P]_{B'}$$

Definice a lemma 3.6. Pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A a koeficienty $c_1, \dots c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$ definujeme *afinní kombinaci* $\sum_{i=1}^{k} c_i\mathbf{B}_i$ jako bod

$$\mathbf{P} + \sum_{i=1}^{k} c_i(\mathbf{B}_i - \mathbf{P}), \tag{1}$$

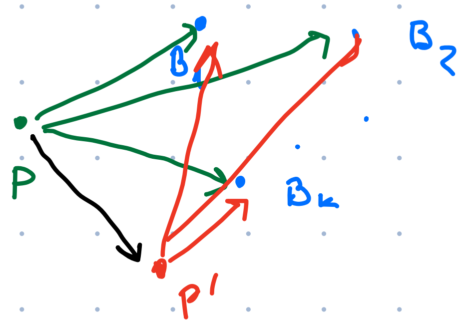
kde $\mathbf{P}$ je libovolný bod a výraz (1) na jeho volbě nezáleží.

Dk

$$P' + \sum_{i=1}^{k} c_i(B_i - P') + (P-P') + (P'-P)$$

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(P'-P) \;=$$

$$= P \quad + \sum_{i=1}^{k} c_i(B_i - P) \quad \square$$



B

Důsledek 3.7. Jestliže máme jakoukoliv soustavu souřadnic S $= (P, \underbrace{u_1, \dots, u_n}{})$, pak v ní vyjádříme afinní kombinaci $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{B}_i$ snadno jako $[\mathbf{X}]_S = \sum_{i=1}^{k} c_i [\mathbf{B}_i]_S$. Navíc v aritmetických prostorech a podprostorech (Příklad 3.2) můžeme afinní kombinaci chápat jako lineární kombinaci.

Dk

$$[X]_S = [(X-P)]_B = \left[\sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P)\right]_B = \sum_{i=1}^{k} c_i [(B_i - P)]_B = \sum_{i=1}^{k} c_i [B_i]_S$$

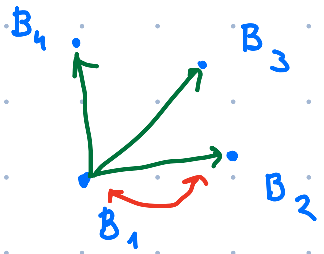
počátek souřadnic P volíme zároveň jako bod P z def. 3.6

V aritm. prostorech:

$$X \overset{3.6}{=} \sum_{i=1}^{k} c_i B_i = P + \sum_{i=1}^{k} c_i (B_i - P) = \sum_{i=1}^{k} c_i B_i$$

VŠE VEKTORY

Definice a lemma 3.8. O libovolných bodech $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots \mathbf{B}_k$ v afinním prostoru A řekneme, že jsou *v obecné poloze* právě tehdy, když vektory $\{(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_k - \mathbf{B}_1)\}$ jsou lineárně nezávislé. Vlastnost *býti v obecné poloze* nezávisí na pořadí bodů.



LN

1 když permutuji pouze $B_2, \dots, B_k$ LN nemění (pouze permutuji vektory)

2 Prohodím $B_1 \leftrightarrow B_2$

Dk

$$\text{LN} \left\{ \begin{array}{c} (B_2 - B_1) \\ (B_3 - B_1) \\ \vdots \\ (B_k - B_1) \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -(B_2 - B_1) \\ (B_3 - B_1) - (B_2 - B_1) \\ \vdots \\ (B_k - B_1) - (B_2 - B_1) \end{array} \right\}$$

LK, která nemění LN

∎

Definice a lemma 3.9. V afinním prostoru A dimenze n mějme $(n+1)$ bodů $\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_{n+1}$ v obecné poloze. Pak lze každý bod $\mathbf{X} \in A$ vyjádřit právě jedním způsobem jako afinní kombinaci těchto bodů

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{B}_i, \qquad \text{kde } \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1.$$

Posloupnost bodů $Z = (\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_{n+1})$ nazýváme *barycentrická soustava souřadnic* a $(n+1)$-tici skalárů $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ nazýváme barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{X}$.

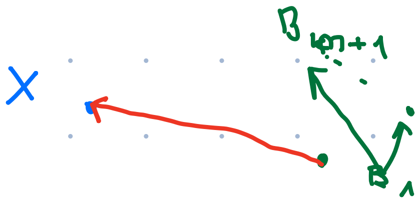
df. 3.7.

Dk libovolné $P \in A$

$$(X - P) = \sum_{i=1}^{n+1} c_i (B_i - P)$$

speciálně pro $P = B_1$:

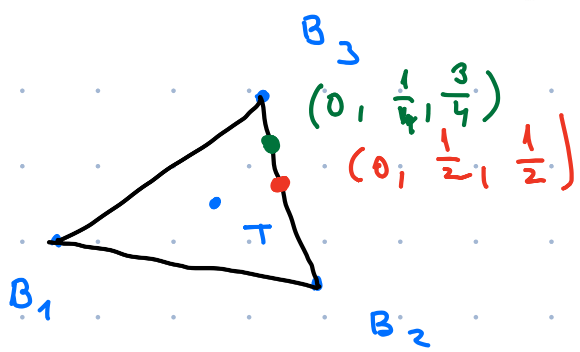
$$(X - B_1) = c_1 \underbrace{\cancel{(B_1 - B_1)}}_{0} + \sum_{i=2}^{n+1} c_i (B_i - B_1).$$



Báze, protože se jedná o n LN vektorů.

Tedy $c_2, \dots, c_{n+1}$ jsou dány jednozn. a klademe $c_1 = 1 - c_2 - c_3 - \dots - c_{n+1}$.

Příklad 3.10. V prostoru $A = \mathbb{R}^2$ vrcholy $\mathbf{B}_1$ jakéhokoliv trojúhelníku $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic a souřadnice těžiště jsou $(1/3, 1/3, 1/3)$. $= T$



Důsledek 3.11. Jestliže $Z = (\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_{n+1})$ je barycentrická soustava souřadnic a $(c_1, \dots, c_{n+1})^T$ odpovídající barycentrické souřadnice bodu X, pak

$$S = (\mathbf{B}_1, (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1), (\mathbf{B}_3 - \mathbf{B}_1), \dots, (\mathbf{B}_{n+1} - \mathbf{B}_1))$$

je afinní soustava souřadnic a $[\mathbf{X}]_S = (c_2, \dots, c_{n+1})^T$.

Obecněji, jestliže máme libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k$ a skaláry $c_1, \dots, c_k$ splňující $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 1$, pak

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{B}_i = \mathbf{B}_1 + \sum_{i=2}^{k} c_i (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_1),$$

tedy všechny afinní kombinace daných bodů odpovídají tomu, že se k prvnímu bodu přičtou všechny lineární kombinace rozdílových vektorů. Povšimněme si, že druhá summa začíná od $i = 2$, tedy koeficienty lineární kombinace jsou libovolné bez omezení a $c_1 = 1-(c_2+\dots+c_k)$.

Definice 3.12. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V. Afinní prostor B nad tělesem T se zaměřením W nazveme *afinní podprostor* prostoru A, pokud $B \subseteq A$, $W \leq V$ a sčítání bodu a vektoru v B je zúžením sčítání bodu a vektoru v A.

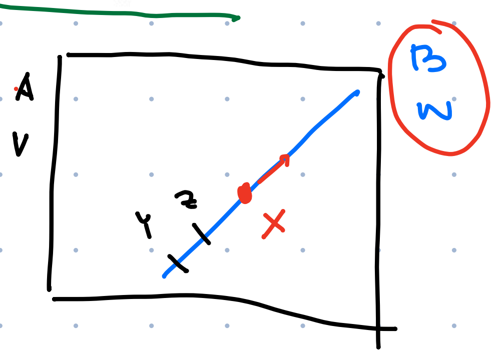
Věta 3.13. Nechť A je afinní prostor nad tělesem T se zaměřením V, $\mathbf{X} \in A$ libovolný bod a $W \leq V$ libovolný vektorový podprostor. Pak množina

$$\boxed{\mathbf{X} + W}$$

je afinní podprostor A a každý afinní podprostor lze vyjádřit tímto způsobem, který nazýváme *parametrické vyjádření*.

$x = 2 + 3t$

$y = 7 - 5t$



$W \leq V$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$

$= \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}}_{X} + \underbrace{\mathrm{Lo}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}\right\}}_{W}$

Dk $B = X + W$ je podprostor (splňuje 2 axiomy z def)

1. platí v celém A
2. $\forall\, Y, Z \in B \;\; \exists!\, w \in W : Y + w = Z$.

$\exists!\, w \in V$

$\left.\begin{array}{l} Y = X + w_1 \\ Z = X + w_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$ stačí ~~vzít~~ $w = (w_2 - w_1) \in W$

Definice 3.14. Nechť Z je neprázdná množina bodů afinního prostoru A. *Afinním obalem* množiny Z rozumíme množinu $AO(Z)$ všech afinních kombinací bodů z Z.

Věta 3.15. Pro každou konečnou neprázdnou množinu bodů je $AO(Z)$ afinním podprostorem. Každý afinní podprostor dimenze k lze vyjádřit jako afinní obal $(k+1)$ bodů. Toto vyjádření nazýváme *bodové vyjádření*.

Věta 3.16. Mějme soustavu lineárním rovnic s maticí M typu $m \times n$ nad tělesem T a pravou stranou c. Pak její řešení $\{x : Mx = c\}$ tvoří afinní podprostor aritmetického afinního prostoru T^n. Navíc každý afinní podprostor T^n lze vyjádřit tímto způsobem. Toto vyjádření nazýváme *rovnicové vyjádření*.

Dk 3.15 $\quad Z = (B_1, \dots, B_l)$ $\quad$ libovolný $X \in AO(Z)$

lze vyjádřit

libovolné

$$X = \sum_{i=1}^{l} c_i B_l = \underset{\text{Bod}}{B_1} + \underbrace{\sum_{i=2}^{l} c_i (B_i - B_1)}_{\in W = LO\begin{pmatrix} B_2 - B_1 \\ \vdots \\ B_l - B_1 \end{pmatrix}} \qquad (*)$$

tvoří afinní podprostor.

Dále mějme $X + W$ podprostor dimenze k $\Rightarrow$ $W = LO\{w_1, \dots, w_k\}$

a definuji $(k+1)$ bodů $B_1 = X$, $B_2 = X + w_1$, $\dots$, $B_{k+1} = X + w_k$

a obrátím formuli $(*)$

Dk 3.16 Řešení je $X + \operatorname{Ker} M$ (LA). A naopak pro každé W existuje matice taková, že $W = \operatorname{Ker} M$ a soustava bude

$$\boxed{M \cdot x = M \cdot X}$$

Příklad 3.17. Uvažujme podprostor afinního prostoru $\mathbb{R}^4$

$$B = \overset{X}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + \overset{W}{LO\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

Chceme, aby naše zaměření W bylo jádrem matice M, budeme tedy řešit homogenní soustavu, kde do řádků vložíme bázi prostoru, který máme.

$$W = LO\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Máme dva pivoty, dvě volné proměnné, tedy řešení bude mít dimenzi 2. (Obecně to 2 být nemusí.)

$$\text{Řešení:} \quad LO\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Vektory z báze řešení dáme do řádků matice M.

$$M = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \ker M = W$$

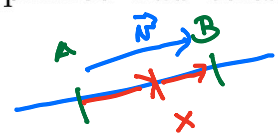
Ještě určíme pravou stranu c tak, aby $\mathbf{X}$ byl řešením – jen dosadíme.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \qquad c = M \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Získali jsme soustavu $Mx = c$, jejímž řešením je zadaný afinní podprostor, a jde to takto udělat vždy.

Definice 3.18. (Pod)prostor dimenze 0 je *bod*, (pod)prostor dimenze 1 se nazývá *přímka*, (pod)prostor dimenze 2 se nazývá *rovina*, podprostor dimenze $(n-1)$ v prostoru dimenze n se nazývá *nadrovina*.

Definice a lemma 3.19. Mějme tři body $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{X}$ na afinní přímce nad tělesem T, přičemž $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$ a $\mathbf{X} \neq \mathbf{B}$. Pak definujeme dělící poměr



$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}} := \lambda,$$

jako jediný skalár, pro který platí $\underbrace{\lambda(\mathbf{B} - \mathbf{X}) = (\mathbf{X} - \mathbf{A})}$. Potom platí, že $\mathbf{X}$ je afinní kombinací bodů $\mathbf{A}, \mathbf{B}$

$$\mathbf{X} = \frac{1}{\lambda+1}\mathbf{A} + \frac{\lambda}{\lambda+1}\mathbf{B}$$

a tedy naopak, jsou-li (c_1, c_2) barycentrické souřadnice $\mathbf{X}$ v soustavě $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, pak

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}} = \frac{c_2}{c_1}. \tag{2}$$

Dk označme $\vec{v} = (B - A) \neq \vec{0}$ a nechť $(X - A) = \mu \vec{v}$

a tedy $(B - X) = (1-\mu)\vec{v}$

$$\lambda = \frac{\mu}{1-\mu} \Rightarrow \mu = \frac{\lambda}{\lambda+1}$$

$$X = A + \overset{c_2}{\frac{\lambda}{\lambda+1}}(B - A) = \underbrace{\frac{1}{\lambda+1}}_{c_1}A + \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+1}}_{c_2}B$$

Naopak (A,B) barycentr. souř. souřadnic $c_1+c_2=1$

$$[X]_{(A,B)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \iff X = c_1 A + c_2 B$$

pak $r = \frac{c_2}{c_1}$.

V literatuře se dělicí někdy označuje $(A,B;X)$ a definují se s - .

Definice 3.20. Nechť A je afinní prostor a $B = \mathbf{X} + U$, $C = \mathbf{Y} + W$ jeho podprostory. Říkáme, že B a C jsou

- *rovnoběžné*, pokud $U \leq W$ nebo $W \leq U$
- *různoběžné*, pokud nejsou rovnoběžné a množiny bodů mají neprázdný průnik $B \cap C$.
- *mimoběžné* pokud nejsou ani rovnoběžné, ani různoběžné.

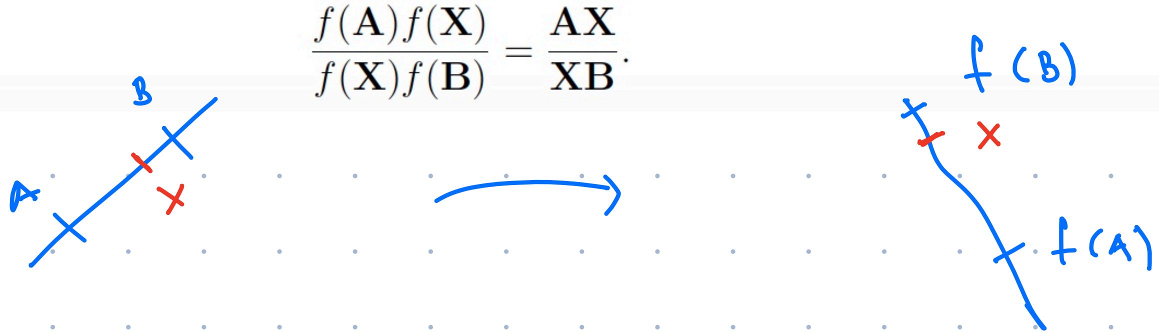
Definice 3.21. Mějme afinní prostory A, B se zaměřeními V, W nad stejným tělesem T. Řekneme, že zobrazení $f : A \to B$ je *afinní*, jestliže zachovává afinní kombinace, tedy jestliže pro libovolné body $\mathbf{B}_1, \dots \mathbf{B}_k \in A$ a koeficienty $c_1, \dots c_k \in T$ splňující $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$ platí

$$f(\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{B}_i) = \sum_{i=1}^{k} c_i f(\mathbf{B}_i).$$

Afinní zobrazení $f : A \to A$ z afinního prostoru do sebe nazveme *afinita*, jestliže je bijektivní.

Důsledek 3.22. Afinní zobrazení zachovávají dělící poměry. Přesněji, jestliže $f(\mathbf{A}) \neq f(\mathbf{B})$, pak

$$\frac{f(\mathbf{A})f(\mathbf{X})}{f(\mathbf{X})f(\mathbf{B})} = \frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}}.$$



Věta 3.23. Zobrazení mezi aritmetickými afinními prostory $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$ je afinní právě tehdy když má tvar

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{p},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice $n \times m$ a $\mathbf{p}$ je vektor $n \times 1$. V případě $m = n$ je toto zobrazení afinitou právě tehdy, když je matice $\mathbf{A}$ regulární. Lineární zobrazení dané maticí $\mathbf{A}$ nazýváme *asociovaný homomorfismus.*

Dk. Jestliže $f(x) = Ax + p$ a $\underset{\mathbb{T}_m}{Y} = \sum_{i=1}^{k} c_i \underset{\mathbb{T}_m}{B_i}$, $c_1 + \dots + c_k = 1$

$$f(Y) = A \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} c_i B_i \right) + p = \sum_{i=1}^{k} c_i (A \cdot B_i) + \underbrace{1}_{=\sum_{i=1}^{k} c_i} p =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} c_i \,(A B_i + p) = \sum_{i=1}^{k} c_i f(B_i)$$

Naopak, nechť f je afinní a $Y \in \mathbb{T}_m$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = y_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{E_1} + y_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{E_2} + \dots + y_m \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{E_m} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{0}$$

kde $\mu = 1 - (y_1 + \dots + y_m)$

$$f(Y) = y_1 f(E_1) + y_2 f(E_2) + \dots + y_m f(E_m) + \mu f(0) =$$

$$= \underbrace{\big(f(E_1) - f(0) \,|\, \dots \,|\, f(E_m) - f(0)\big)}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} + \underbrace{f(0)}_{p}$$

f je bijekce $\iff$ A regulární

Důsledek 3.24. Afinity z $\mathbb{R}^n$ do sebe vzhledem ke skládání zobrazení tvoří grupu, kterou budeme označovat $\mathbb{A}(n)$. Jestliže

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{p}, \quad g(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{q}$$

pak

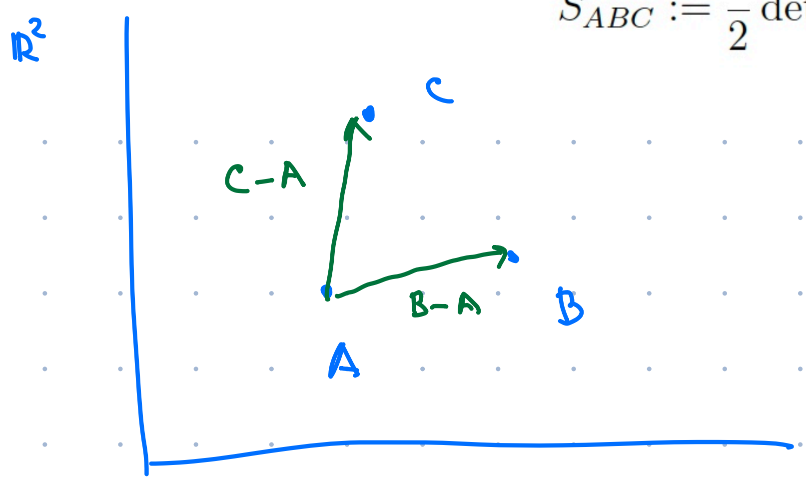
$$f^{-1}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{X}+(-\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{p}), \quad (g\circ f)(\mathbf{X}) = (\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{X}+(\mathbf{B}\cdot\mathbf{p}+\mathbf{q}).$$

Všechny shodnosti popsané v Důsledku 1.5 jsou i afinitami, $\mathbb{E}(n)$ je tedy podgrupou $\mathbb{A}(n)$. Rovněž afinní grupu můžeme vnořit do maticové grupy způsobem popsaným ve Větě 1.7.

Důsledek 3.25. Afinní zobrazení $f : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^n$ je jednoznačně dána obrazy $m+1$ bodů v obecné poloze. Speciálně zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je dáno obrazem 3 bodů, které neleží na jedné afinní přímce.

Definice 3.27. Pro trojúhelník ABC v $\mathbb{R}^2$ definujeme jeho orientovaný obsah jako

$$S_{ABC} := \frac{1}{2}\det(B-A|C-A).$$



Věta 3.28. Je-li f afinita v $\mathbb{R}^2$ tvaru $f(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{p}$, pak

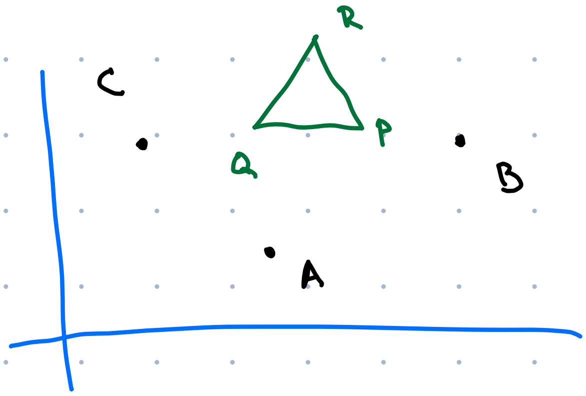
$$S_{f(A)f(B)f(C)} = (\det\mathbf{A})S_{ABC}.$$

Afinity v rovině tedy zachovávají poměry obsahů.

Dk vizte skripta

Věta 3.29. Nechť $Z = (A, B, C)$ tvoří barycentrickou soustavu souřadnic v $\mathbf{R}^2$ a P, Q, R jsou libovolné body $\mathbf{R}^2$. Pak platí

1. Body P, Q, R leží na přímce právě tehdy když $\underline{\det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z)} = 0$.
2. Obecněji platí $S_{PQR} = \det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z) S_{ABC}$.



$$[P]_Z = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \quad [Q]_Z = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad [R]_Z = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$det([P]_Z|[Q]_Z|[R]_Z) = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} +$$

$$= \begin{vmatrix} p_1 + p_2 + p_3 & q_1 + q_2 + q_3 & r_3 + r_2 + r_3 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_2 & q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ p_3 & q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} q_2 - p_2 & r_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 & r_3 - p_3 \end{vmatrix}. \ *$$

Navíc

$p_1 A + p_2 \cdot B + p_3 C$

$$\left.\begin{aligned} P &= A + p_2(B - A) + p_3(C - A), \\ Q &= A + q_2(B - A) + q_3(C - A), \\ R &= A + r_2(B - A) + r_3(C - A), \end{aligned}\right\}$$

$$S_{PQR} = \frac{1}{2} \det(Q - P \mid R - P) =$$

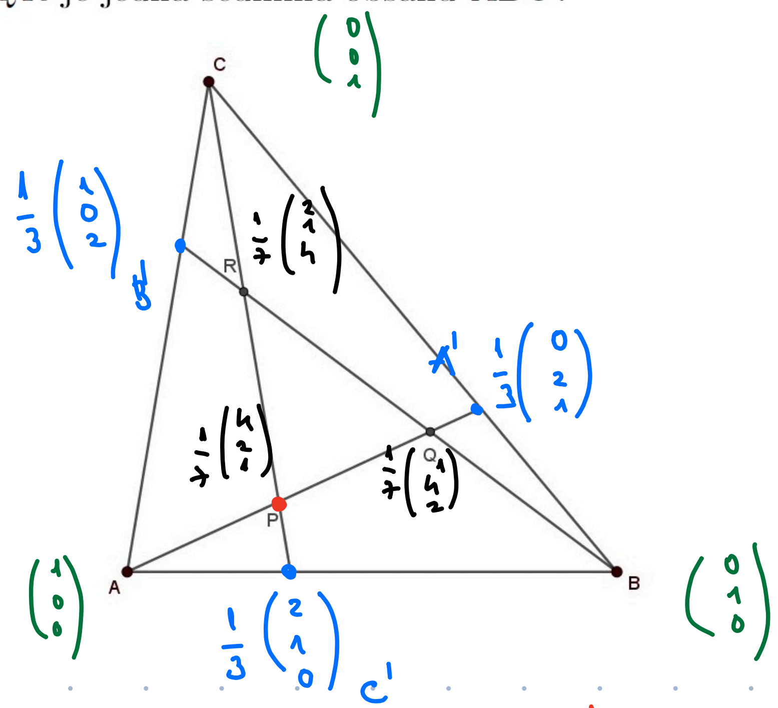
$$= \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} (q_2 - p_2)(B - A) + & (r_2 - p_2)(B - A) + \\ (q_3 - p_3)(C - A) & + (r_3 - p_3)(C - A) \end{bmatrix}$$

*

$$= \frac{1}{2}\det\left(\underbrace{\left[(B-A)\,\middle|\,(C-A)\right]}_{S_{ABC}}\cdot\begin{bmatrix} q_2-p_2 & r_2-p_2\\ q_3-p_3 & r_3-p_3\end{bmatrix}\right)$$

$$\begin{vmatrix} p_1 & r_1\\ \vdots & \vdots \\ p_3 & r_3\end{vmatrix}$$

Příklad 3.30. V libovolném trojúhelníku ABC veďme z každého vrcholu spojnici do (vhodné) třetiny protilehlé strany. Průsečíky těchto spojnic označme P, Q, R. Dokažte, že obsah trojúhelníku PQR je jedna sedmina obsahu ABC.



$Z = (A, B, C)$

$c_1 A + c_2 A'$

$$P \in AA' \iff P = A + c_2\,(A'-A) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-1\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-c_2\\ c_2\frac{2}{3}\\ c_2\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$P \in CC' \iff \begin{array}{ccc} C & P & C' \\ \end{array}\quad \begin{vmatrix} 0 & 1-c_2 & \frac{2}{3}\\ 0 & c_2\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ 1 & c_2\frac{1}{3} & 0\end{vmatrix} = 0$$

$$\frac{1}{3}(1-c_2) - \frac{4}{9}\cdot c_2 = 0 \quad |\cdot 9$$

$$3 - 3c_2 - 4c_2 = 0$$

$$c_2 = \frac{3}{7}$$

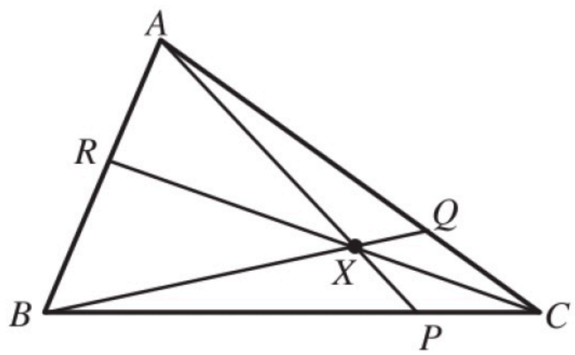
$$[P]_Z = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$$

$\frac{1}{7}$

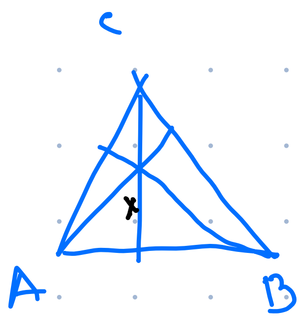
$$S_{PQR} = \frac{1}{7^3} \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}_{49 = 7^2} \cdot S_{ABC}$$

Věta 3.31 (Cevova věta)**.** Mějme trojúhelník ABC a bod X, který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Předpokládejme, že existují průsečíky $P = AX \cap BC$, $Q = BX \cap CA$ a $R = CX \cap AB$. Pak platí

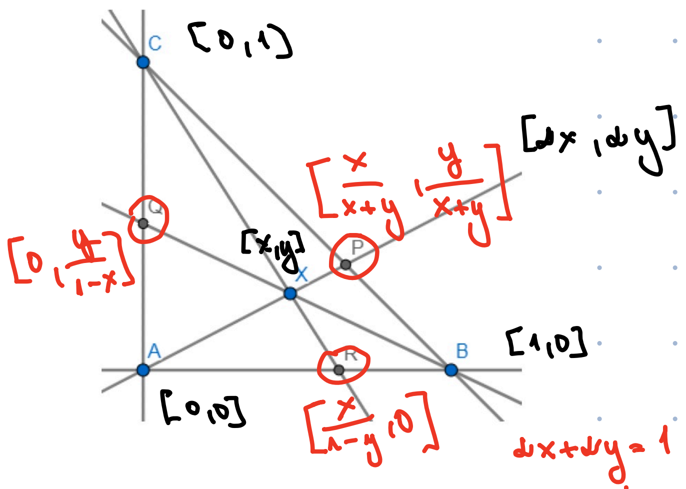
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1.$$



Dk



$\xleftrightarrow{f}$ bijekce



$dx + dy = 1$

$d = \frac{1}{x+y}$

$$\frac{AR}{RB} = \frac{\frac{x}{1-y}}{1 - \frac{x}{1-y}} = \frac{x}{1-x-y}$$

Pronásobím $= 1$.

$$\frac{BP}{PC} = \frac{\frac{x}{x+y} - 1}{0 - \frac{x}{x+y}} = \frac{y}{x}$$

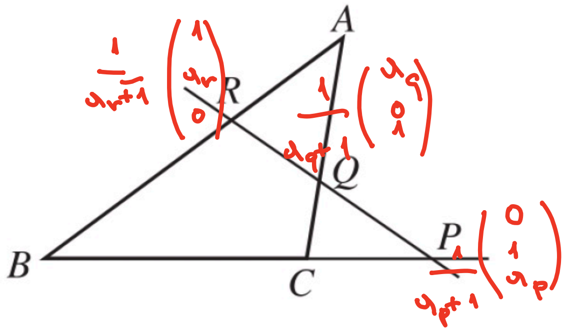
$$\frac{CQ}{QA} = \frac{y-1+x}{-y}$$

$\blacksquare$

Věta 3.32 (Menelaova věta)**.** Mějme trojúhelník ABC a přímku p, která neprochází žádným z vrcholů a není rovnoběžná se žádnou se stran. Označme si $P = p \cap BC$, $Q = p \cap CA$ a $R = p \cap AB$. Pak platí

$$\underbrace{\frac{AR}{RB}}_{a_r} \cdot \underbrace{\frac{BP}{PC}}_{a_p} \cdot \underbrace{\frac{CQ}{QA}}_{a_q} = -1.$$

$s = (A, B, C)$ bar. soustava souřadnic



$\Leftrightarrow \quad R = \frac{1}{a_r+1} A + \frac{a_r}{a_r+1} B \qquad [R]_s = \begin{pmatrix}\frac{1}{a_r+1}\\ \frac{a_r}{a_r+1}\\ 0\end{pmatrix}$

3.29 $\Rightarrow$ PQR na přímce $\Leftrightarrow \det\left([R]_s \,|\, [P]_s \,|\, [Q]_s\right) = 0$

$$\frac{1}{(a_r+1)(a_p+1)(a_q+1)} \underbrace{\begin{vmatrix}1 & 0 & a_q\\ a_r & 1 & 0\\ 0 & a_p & 1\end{vmatrix}}_{(1 + a_r a_p a_q)}$$

$\blacksquare$

PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

Definice 4.1. Mějme vektorový prostor V^{n+1} dimenze $n+1$ nad tělesem T. Množinu všech 1-dimenzionálních podprostorů V nazveme *projektivním prostorem dimenze* n nad tělesem T a označujeme ho $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nebo zkráceně jen $\mathbb{P}^n$:

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1}) = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{n+1}, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Prvky této množiny nazýváme *projektivními body* a odpovídající vektory $\mathbf{v}$ jejich *vektorovými zástupci*. Zjevně, jestliže $\mathbf{v}$ je vektorovým zástupcem X, pak pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ je i $\lambda\mathbf{v}$ vektorovým zástupcem X.

Definice 4.2. Mějme vektorový prostor V dimenze $n+1$ nad tělesem T a odpovídající projektivní prostor $\mathbb{P}^n$. Libovolnou bázi $(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{n+1})$ nazveme *soustavou projektivních souřadnic* prostoru $\mathbb{P}^n$. Souřadnicemi bodu $X \in \mathbb{P}^n$ pak rozumíme uspořádanou $n+1$-tici skalárů $(c_1, \ldots c_{n+1})$ takovou, že

$$X = LO\left\{\sum_{i=1}^{n+1} c_i \mathbf{v}_i\right\}.$$

Tyto souřadnice jsou dány až na násobek, protože pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(c_1, \ldots c_{n+1})$ a $(\lambda c_1, \ldots \lambda c_{n+1})$ určují stejný projektivní bod X. Proto se těmto souřadnicím někdy říká *homogenní* a zjevně vždy alespoň jedno c_i musí být nenulové. Konečně pro libovolné $0 \neq \mu \in T$ zjevně báze $(\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_{n+1})$ a $(\mu\mathbf{v}_1, \ldots \mu\mathbf{v}_{n+1})$ určují stejný systém projektivních souřadnic.

$\mathbb{P}_2 = \mathbb{R}(\mathbb{R}^3)$ projektivní rovina

$LO\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\} = LO\left\{\begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix}\right\}$

$\mathbb{P}^n = \{V^{n+1} \setminus \{\vec{0}\}\}/\sim$

$\vec{n}_1 \sim \vec{n}_2 \iff \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

V souřadnicích $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\20\\30\end{pmatrix}$

Definice 4.3. Podmnožinu projektivního prostoru $M \subset \mathbb{P}^n$ nazveme projektivním podprostorem dimenze k, jestliže existuje vektorový podprostor $W \leq V^{n+1}$ dimenze $k+1$ tak, že

$$M = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in W, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Projektivní (pod)prostor dimenze 0 nazýváme bod, (pod)prostor dimenze 1 přímka, (pod)prostor dimenze 2 rovina a podprostor maximální dimenze $n-1$ nadrovina.

Definice 4.4. Jestliže $\mathbb{P}(V^{k+1})$ je podprostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ a $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{k+1})$ nějaká báze V^{k+1}, pak lze každý bod $X \in \mathbb{P}(V^{k+1})$ vyjádřit jako

$$X = LO\left\{\sum_{i=1}^{k+1} t_i \mathbf{w}_i\right\}.$$

Tomuto vyjádření říkáme *parametrické vyjádření podprostoru*. Pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ zjevně $(t_1, \ldots, t_{k+1})$ a $(\lambda t_1, \ldots, \lambda t_{k+1})$ určují stejný projektivní bod X.

Definice 4.5. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T. Každá nadrovina $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$ může být popsána pomocí nenulové lineární formy $\ell \in V_*^{n+1}$, která je prvkem duálního prostoru :

$$\mathbb{P}^{n-1} = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, \ell(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\}.$$

Toto vyjádření nazýváme *rovnicové vyjádření nadroviny*. Navíc, pro libovolné $0 \neq \lambda \in T$ popisuje $\lambda\ell$ tutéž nadrovinu. Souřadnice lineární formy označujeme jako řádky s hvězdičkou.

Příklad 4.6 (Výpočty v projektivní rovině.)**.** V projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ každými dvěma různými body prochází právě jedna přímka a každé dvě různé přímky se protnou v jednom bodě. Mějme zadány body $A = (1,2,3)$, $B = (1,0,-1)$, $C(0,1,1)$, $D(5,2,1)$. Určete bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}$.

$\overleftrightarrow{AB} = \mathbb{P}(W)$

$W = LO\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$X \in \overleftrightarrow{AB}$ $\quad \vec{w} \in W \quad (t_1, t_2) \in \mathbb{P}_1$

$\Updownarrow$

$X = LO\{\vec{w}\} = LO\left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

na příklad $\quad X = LO\left\{ \overset{10}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \overset{20}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = LO\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad \begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \overleftrightarrow{AB}$

1

$\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

ABX leží na přímce $\Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

AB pomocí lineární formy

$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0 \quad$ pro AB

$a_1 1 + a_2 2 + a_3 3 = 0$

$a_1 1 + a_2 0 + a_3(-1) = 0$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad (a_1, a_2, a_3) \in LO\{(1, -2, 1)\}$

$\ell(x_1, x_2, x_3): \quad x_1 - 2x_2 + x_3 \quad$ až na násobek

$AB = (1, -2, 1)^* \quad$ (přímka, nikoliv bod)

CD: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \overleftrightarrow{CD} \in LO\left\{\left(\frac{1}{5}, -1, 1\right)\right\} = LO\{(1, -5, 5)\}$

$CD = (1, -5, 5)^T$

$AB \cap CD$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

$= (5, 4, 3)$.

Definice a lemma 4.7. Mějme v projektivním prostoru $\mathbb{P}^n$ nad tělesem T čtyři navzájem různé body A, B, C, D, které leží na jedné projektivní přímce. Nechť $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ jsou jejich vektoroví zástupci a nechť platí

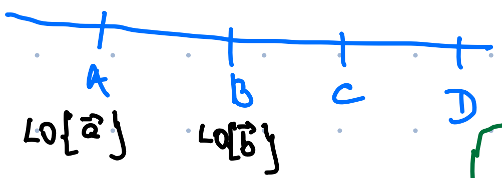
$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak definujeme *dvojpoměr* uspořádané čtveřice bodů

$$(A, B, C, D) := \frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1}}{\frac{\beta_2}{\alpha_2}} \equiv \frac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1 \beta_2} \in T,$$

kterýžto výraz nezávisí na volbě vektorových zástupců. Jestliže $(A, B, C, D) = -1$, řekneme, že uspořádaná čtveřice bodů tvoří *harmonickou čtveřici*.

Dk nezávislosti na volbě zástupců



$\alpha_i \neq 0$

$\beta_i \neq 0$

$\vec{c} \longrightarrow \alpha \cdot \vec{c}$

$\alpha_1 \to \alpha\, \alpha_1$

$\beta_1 \to \alpha\, \beta_1$

α se vykrátí

$\vec{a} \longrightarrow \mu \cdot \vec{a}$

$\alpha_1 \to \frac{1}{\mu} \alpha_1$

$\alpha_2 \to \frac{1}{\mu} \alpha_2$

μ se vykrátí

Poznámka 4.8. Pro permutace pořadí bodů platí rovnosti

$$(B, A, C, D) = (A, B, D, C) = (A, B, C, D)^{-1}$$

$$(A, C, B, D) = (D, B, C, A) = 1 - (A, B, C, D)$$

Obecně tedy pro 24 permutací získáváme až 6 hodnot dvojpoměru k, $1-k$, k^{-1}, $1-k^{-1}$, $(1-k)^{-1}$, $1-(1-k)^{-1}$. Pro harmonickou čtveřici jen tři: -1, 2, $\frac{1}{2}$.

Definice 4.9. Mějme dva projektivní prostory $\mathbb{P}^m = \mathbb{P}(V^{m+1})$ a $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad stejným tělesem T a nějakou podmnožinu $A \subset \mathbb{P}^m$. O zobrazení

$$F : A \to \mathbb{P}^n$$

řekneme, že je projektivní, jestliže existuje lineární zobrazení $\bar{F} : V^{m+1} \to V^{n+1}$ tak, že pro každé $\mathbf{v} \in V^{m+1}$ takové, že $LO\{\mathbf{v}\} \in A$ platí

$$F(LO\{\mathbf{v}\}) = LO\{\bar{F}(\mathbf{v})\}.$$

Pokud chci uvažovat i jiná $\bar{F}$ než prostá

pak $A \subset \mathbb{P}(V^{m+1} \setminus \ker \bar{F})$

Věta 4.11. Projektivní zobrazení $F : \mathbf{P}^n \to \mathbf{P}^n$ z projektivního prostoru do sebe jsou bijektivní právě tehdy, když odpovídající lineární zobrazení $\bar{F}$ jsou bijektivní. Tato zobrazení F nazveme *projektivní transformace* nebo též *projektivita*. Všechny projektivní transformace daného prostoru tvoří grupu vzhledem ke skládání, která se nazývá *projektivní grupa*.

Dk: — snadné cvičení z LA

projektivní transformace tak zvanou projektivní grupu $PGL(n) = \mathrm{GL}(n+1)/T^*$, kde T^* označuje multiplikativní grupu nenulových skalárů. □

$T = \mathbb{R}$

$F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$

$\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mu} \underset{v}{\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}} = \underset{u}{\overset{f(A)}{\begin{pmatrix} 14 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}}$$

Věta 4.12. Projektivní transformace zachovávají dvojpoměr. Jestliže je tedy F projektivní transformace, pak

$$(A, B, C, D) = (F(A), F(B), F(C), F(D)).$$

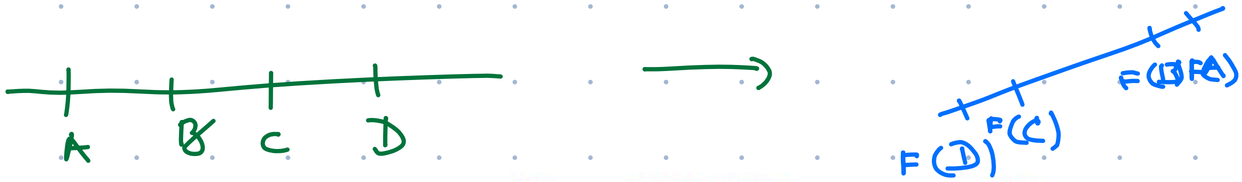
Důkaz. Nechť $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ jsou vektoroví reprezentanti bodů A, B, C, D a dále nechť

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b} \\ \mathbf{d} &= \alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \bar{F}(\mathbf{c}) &= \bar{F}(\alpha_1 \mathbf{a} + \beta_1 \mathbf{b}) = \alpha_1 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_1 \bar{F}(\mathbf{b}) \\ \bar{F}(\mathbf{d}) &= \bar{F}(\alpha_2 \mathbf{a} + \beta_2 \mathbf{b}) = \alpha_2 \bar{F}(\mathbf{a}) + \beta_2 \bar{F}(\mathbf{b}), \end{aligned}$$

kde $\bar{F}$ je lineární zobrazení příslušné F. Vektory $\bar{F}(\mathbf{a}), \bar{F}(\mathbf{b}), \bar{F}(\mathbf{c})$ a $\bar{F}(\mathbf{d})$ reprezentují body $F(A), F(B), F(C)$ a $F(D)$. Vidíme, že F zachovává koeficienty lineární kombinace, a proto se dvojpoměr nezmění. □



Věta 4.13. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje projektivní soustava souřadnic taková, že

$$\begin{aligned} X_1 &= (1, 0, \dots, 0, 0)^T \\ X_2 &= (0, 1, \dots, 0, 0)^T \\ &\vdots \\ X_n &= (0, 0, \dots, 1, 0)^T \\ X_{n+1} &= (0, 0, \dots, 0, 1)^T \\ X_{n+2} &= (1, 1, \dots, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

Dk $X_i = LO\{\vec{x}_i\}$ $\vec{x}_i \neq \vec{0}$

1 POKUS $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{n+1})$ LN

↓ SOUŘ

$X_1 = (1, 0, \dots)$

$X_2 = (0, 1, \dots)$

$X_{n+1} = (0, 0, \dots, 1)$

$X_{n+2} = (c_1, c_2, \dots, c_{n+1})$

$c_i \neq 0$

2. pokus $\mathcal{B}_2 = (c_1\vec{x}_1, c_2\vec{x}_2, \dots, c_{n+1}\vec{x}_{n+1})$

$= (c_1^{-1}, 0, \dots, 0) = (1, 0, \dots, 0)$

$= (0, c_2^{-1}, 0, \dots)$

$\vdots$

$= (0, \dots, c_{n+1}^{-1})$

$= (1, 1, \dots, 1)$ □

Důsledek 4.14. V projektivním prostoru $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T mějme dáno $n+2$ bodů $X_1, \dots, X_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině, a také $n+2$ bodů $Y_1, \dots, Y_{n+2}$ z nichž žádných $n+1$ neleží v jedné nadrovině. Pak existuje právě jedno projektivní zobrazení $F : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$, pro které platí

$$F(X_i) = Y_i, \qquad i = 1, \dots, n+2$$

Dk. $X_i = LO\{\vec{x}_i\}$ def. $\bar{F}$

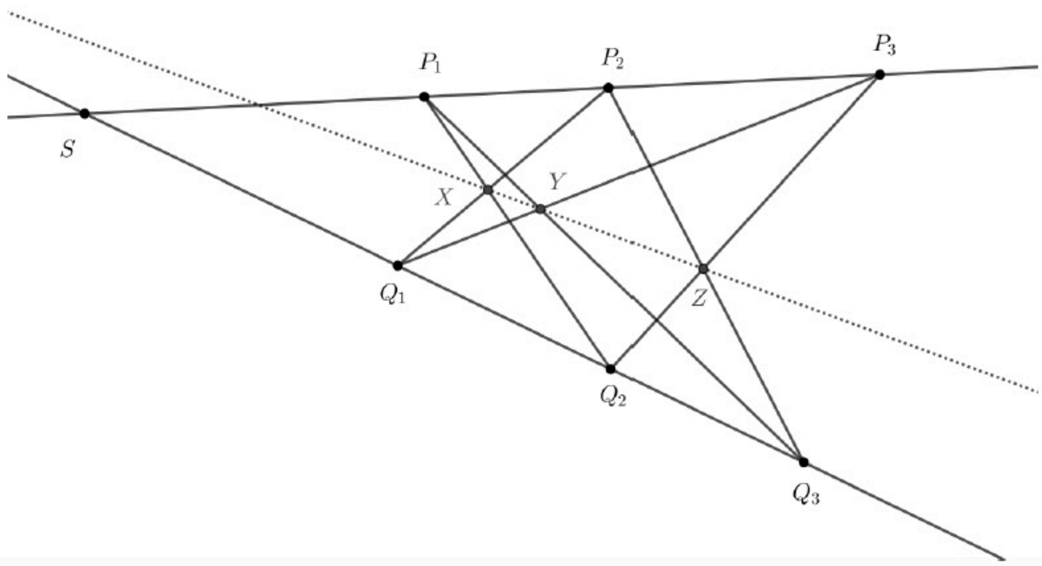
$Y_i = LO\{\vec{w}_i\}$ $\bar{F}(\vec{x}_i) = c_i \vec{w}_i$ $i = 1, \dots, n+1$ tak, aby

$\bar{F}(\vec{x}_{n+2}) = \vec{w}_{n+2}$.

Věta 4.15 (Pappova věta). V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme dvě přímky p, q, které se protínají v bodě S. Na přímce p mějme body P_1, P_2, P_3 různé navzájem a různé od S. Podobně na přímce Na přímce q mějme body Q_1, Q_2, Q_3 různé navzájem a různé od S. Pak platí, že body

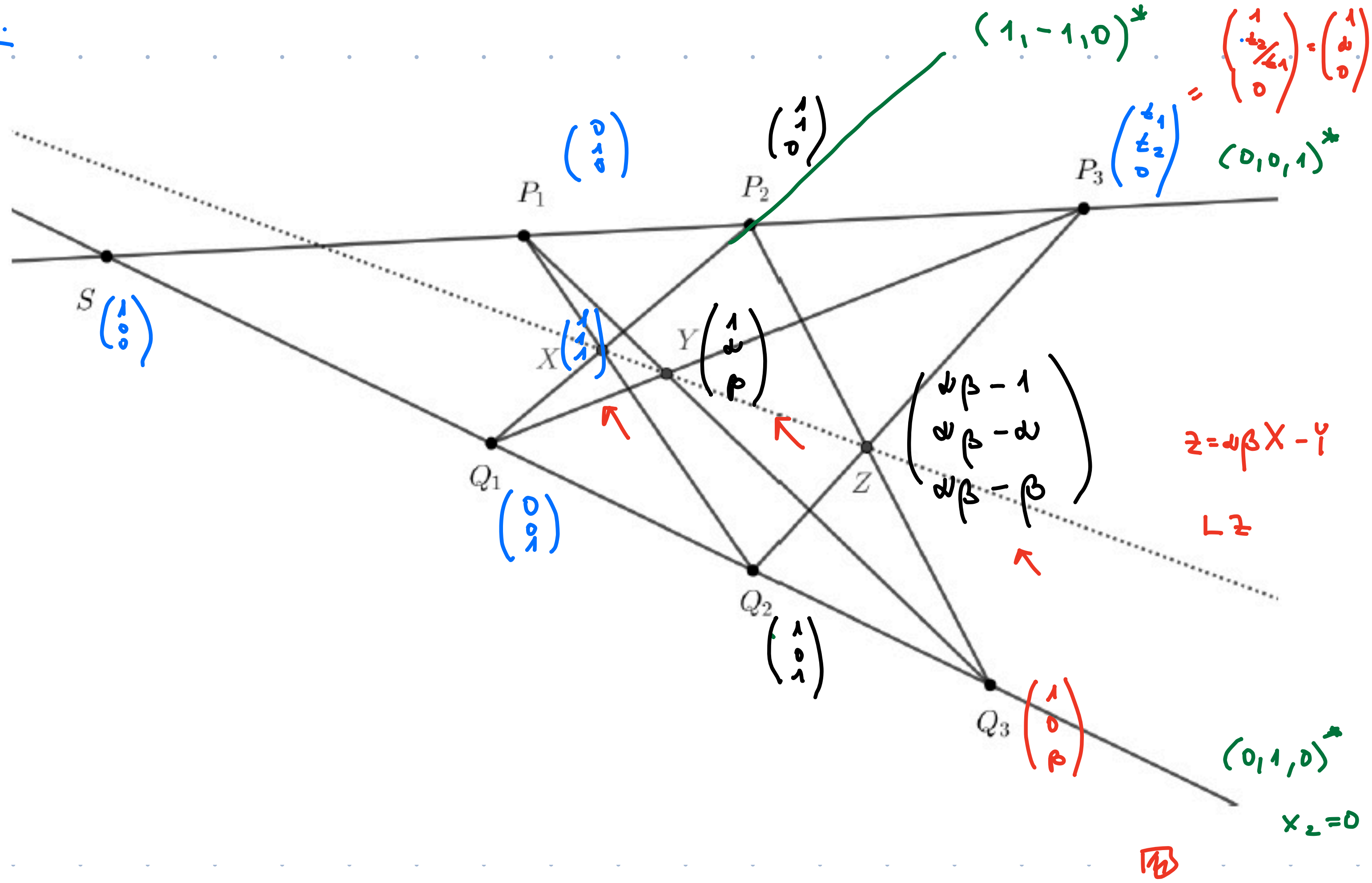
$$X := \overleftrightarrow{P_1Q_2} \cap \overleftrightarrow{P_2Q_1}, \quad Y := \overleftrightarrow{P_1Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_1}, \quad Z := \overleftrightarrow{P_2Q_3} \cap \overleftrightarrow{P_3Q_2}$$

leží na přímce.



$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $LO\{(0,0,1)\}$

Dk.



Definice 4.16. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a kvadratickou formu q na V^{n+1}. Neprázdnou množinu

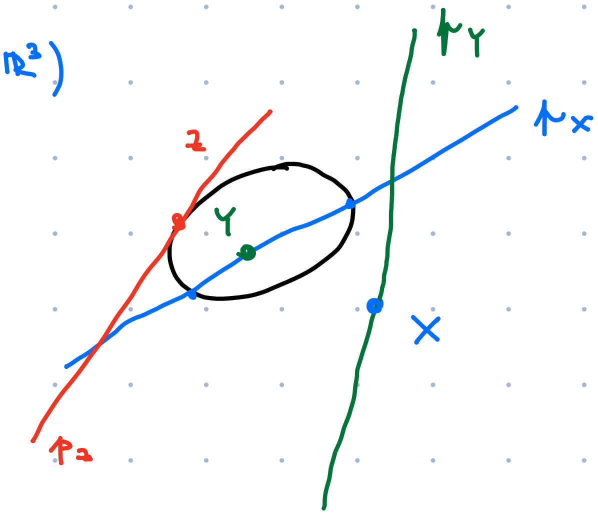
$q(t \cdot \vec{v}) = t^2 q(\vec{v})$

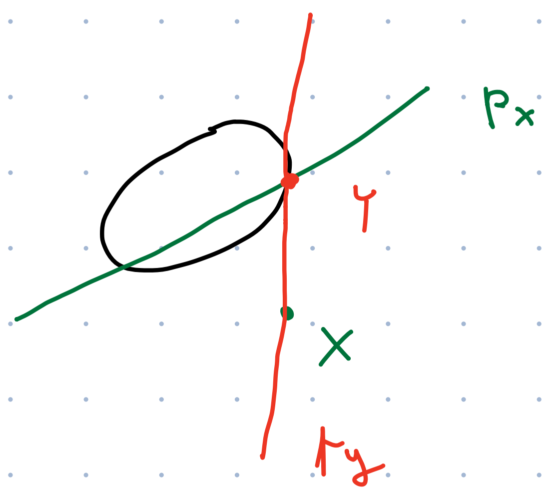
$$Q = \{LO\{\mathbf{v}\} : \mathbf{v} \in V^{k+1}, q(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}\} \subset \mathbb{P}(V^{n+1})$$

nazveme projektivní kvadrikou. Tuto kvadriku nazýváme *regulární*, jestliže je forma q regulární, tedy má hodnost $n+1$. Kvadriky v projektivní rovině nazýváme též kuželosečky.

Definice 4.17. Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T, char$T \neq 2$ a v něm kvadriku Q danou kvadratickou formou q a nechť b je příslušná symetrická bilineární forma, tedy $q(\mathbf{v}) = b(\mathbf{v}, \mathbf{v})$. Řekneme, že dva body $X = LO(\mathbf{v})$, $Y = LO(\mathbf{w})$ jsou *polárně sdružené*, jestliže $b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$





Definice a lemma 4.18 (O polaritě)**.** Mějme projektivní prostor $\mathbb{P}(V^{n+1})$ nad tělesem T a v něm regulární kvadriku Q. Pak

1. Body sdružené s libovolným bodem $X \in \mathbb{P}(V^{n+1})$ tvoří nadrovinu, kterou nazveme *polára* k X a označíme p_X.
2. Naopak každá nadrovina je polárou k právě jednomu bodu, který se nazývá jejím *pólem*.
3. Pro libovolné dva body X, Y platí
$$X \in p_Y \Leftrightarrow Y \in p_X.$$
4. Bod je X sdružen sám se sebou (neboli leží na své poláře p_X) právě tehdy, když leží na Q.
$$X \in p_X \Leftrightarrow X \in Q.$$
V tomto případě p_X nazýváme tečnou nadrovinou ke Q v bodě X.

Dk. $q(\vec{v}) = b(\vec{v},\vec{v})$ ... matice $B = \begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$ "$b(x,y)$"

X a Y jsou polárně sdružené $\boxed{(x^T)\ B}\begin{pmatrix} y \end{pmatrix} = 0$

1) $(p_1, \dots, p_{n+1})^T \neq \vec{0}$ rovnice p_X

2) $\forall\ (p_1, \dots, p_{n+1})^T\ \exists!\ X$

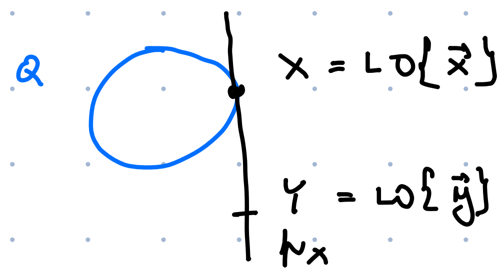
3) Symetrie B

4) $X \in p_X \Leftrightarrow X^T B X = 0 \Leftrightarrow X \in Q$

$\mathbb{P}_2$

Lemma 4.19 (Vysvětlení definice tečny)**.** Nechť Q je regulární projektivní kuželosečka v reálné projektivní rovině a $X \in Q$ její bod. Pak tečna p_X má s Q v bodě X dvojnásobný průsečík a žádný jiný průsečík s kuželosečkou nemá.

Dk



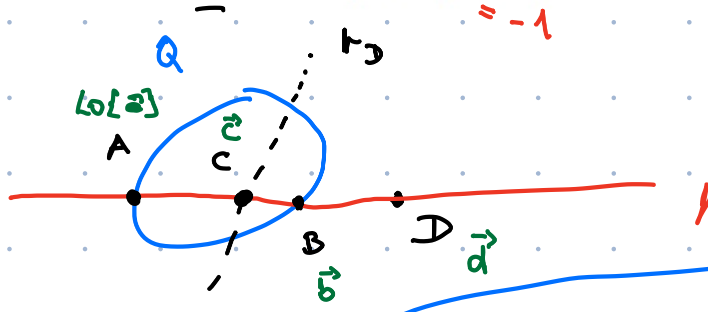
$q(\vec{v}) = b(\vec{v},\vec{v})$

$p_X: s \cdot \vec{x} + t\vec{y}$ param. vyjádření

$p_X \cap Q: \ b(s\cdot\vec{x} + t\vec{y}, s\cdot\vec{x} + t\vec{y}) = s^2 \underbrace{b(\vec{x},\vec{x})}_{\substack{= 0 \\ x \in Q}} + 2st\, \underbrace{b(\vec{x},\vec{y})}_{\substack{= 0 \\ y \in p_X}} + \underbrace{t^2\, b(\vec{y},\vec{y})}_{\substack{t = 0 \\ \text{dvoj. kořen}}}$ ∎

Věta 4.20. V projektivní rovině $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ mějme regulární kuželosečku Q. Nechť přímka p protíná Q ve dvou různých bodech A, B. Nechť $C \in p$ různé od A, B a nechť $D \in p$ je polárně sdružen s C. Pak (A, B, C, D) tvoří harmonickou čtveřici.

$= -1$



$\vec{c} = \alpha_1 \vec{a} + \beta_1 \vec{b}$

$\vec{d} = \alpha_2 \vec{a} + \beta_2 \vec{b}$

bil. forma b

$$\underbrace{b(\vec{c}, \vec{d})}_{=0} = \alpha_1\alpha_2 \underbrace{b(\vec{a}, \vec{a})}_{=0} + \underbrace{(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)}_{\neq 0} b(\vec{a}, \vec{b}) + \beta_1\beta_2 \underbrace{(\vec{b}, \vec{b})}_{=0}$$

$$\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_2} = -1 \qquad \blacksquare$$

Věta 4.21. Každá regulární kuželosečka v reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je projektivní transformací kuželosečky dané rovnicí

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \qquad K \quad \text{(kan. kvadrika)}$$

Každá regulární kvadrika v reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je projektivní transformací právě jedné z kvadrik

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 &= 0 && \text{(nepřímková kvadrika)} && + + + - \\ x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 &= 0 && \text{(přímková kvadrika).} && + + - - \end{aligned}$$

Důkaz $\quad Q \ldots q \ldots b \ldots B$ matice

$+++$ prázdná mn.

$++-$

$+--$ $\approx$

$---$

$$(x_1 x_2 x_3) P^T B \boxed{P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$K \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad P \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in Q \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K$$

proj. transformace.

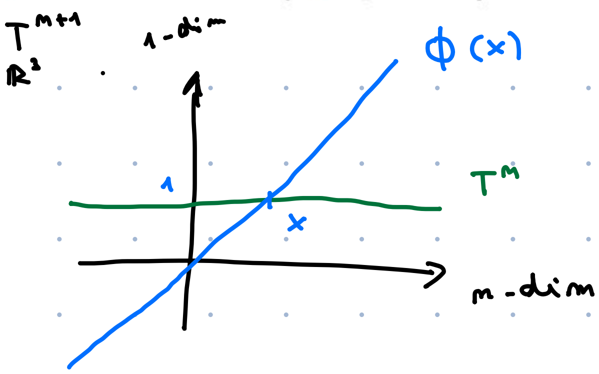
Definice 5.1. Pro libovolné těleso zobrazení $\Phi : T^n \to \mathbb{P}(T^{n+1})$ dané předpisem

$$\underline{\Phi(x_1, \dots, x_n)} = LO\{(x_1, \dots, x_n, 1)\}$$

nazývá me *kanonické vnoření* aritmetického afinního prostoru do aritmetického projektivního prostoru stejné dimenze. $\mathbb{P}(T^{n+1})$ se pak nazývá kanonickým projektivním rozšířením nebo též zúplněním afinního prostoru T^n.

Definice a lemma 5.2. Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n, pak $\mathbb{P}^n = \Phi(T^n) \cup \mathbb{P}^{n-1}$, kde $\mathbb{P}^{n-1}$ je nadrovina s homogenní rovnicí $x_{n+1} = 0$, tedy se souřadnicemi $(0, \dots, 0, 1)^*$. Tato nadrovina se nazývá nevlastní nadrovina, označuje se p_∞ a její body se nazývají nevlastní body.

Jestliže $A \subset T^n$ je afinní podprostor dimenze k pak je jeho obraz $\Phi(A)$ obsažen právě v jednom projektivním podprostoru $\mathbb{A} \subset \mathbb{P}^n$ dimenze k. O $\mathbb{A}$ hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění podprostoru A a o A hovoříme jako o afinní verzi $\mathbb{A}$. Nevlastní body $\mathbb{A}$ považujeme i za nevlastní body A.



$x \in \mathbb{R}^2 \qquad\qquad \Phi(x) \in \mathbb{P}^2$

$[2,1] \xrightarrow{\Phi} (2,1,1)$

$[2,-3] \xleftarrow{\Phi^{-1}} (6,-9,3) = (2,-3,1)$

$\Phi^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right]$

$x_3 \neq 0 \qquad x \qquad y$

$\mathbb{P}_2 = \mathbb{R}_2 \cup \mathbb{P}_1$

Příklad 5.5 (Počítání v afinní a projektivní rovině)**.** Uvažujme afinní rovinu $\mathbb{R}^2$ s kanonickými afinními souřadnicemi $[x, y]$ a její kanonické projektivní rozšíření $\mathbb{P}^2$ s kanonickými homogenními souřadnicemi (x_1, x_2, x_3).

1. Nalezněte projektivní bod, který odpovídá afinnímu bodu $A = [3, -1]$, přesněji tedy nalezněte $\Phi(A)$.
   $(3,-1,1)$

2. Nalezněte afinní bod, který odpovídá projektivnímu bodu $B = (-6, 9, 3)$, přesněji tedy nalezněte $\Phi^{-1}(B)$.
   $[-2,3]$

3. Nalezněte projektivní rozšíření afinní přímky $2x + 3y + 4 = 0$ a určete všechny její nevlastní body.

4. Nalezněte afinní verzi přímky s duálními souřadnicemi $(2, -1, 5)^*$. $2x - y + 5 = 0$

5. Rozhodněte, zda-li afinní body $A = [1, 2]$, $B[4, -4]$ a $C[3, -2]$ leží na přímce. Určete obecnou rovnici této přímky.
   $\iff \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

6. Nalezněte bod $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$, kde A, B jsou jako v předchozím bodě a $D = [3, 5]$, $E = [1, 7]$. $\vec{n} = (2,-3)$

3 $2x + 3y + 4 = 0$ $\qquad (x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{g} \left[\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}\right]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \hat{x} \quad \hat{y}$

$$2\frac{x_1}{x_3} + 3\frac{x_2}{x_3} + 4 = 0 \quad | \cdot x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \qquad (2, 3, 4)^T$$

nevlastní body $x_3 = 0$ $\qquad 2x_1 + 3x_2 = 0$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ nevlastní bod

směrový vektor přímky.

5+6 $\overleftrightarrow{AB}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -12 & -3 \end{pmatrix}$ řeš. $(2 \; 1 \; -4)^T$

E $(2, -3, 0)$

$\overleftrightarrow{DE}$ $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -16 & -2 \end{pmatrix}$ řeš. $(1 \; 1 \; -8)^T$

$\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{DE}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -8 \\ 0 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ řeš. $(-4 \; 12 \; 1)$

$[-4, 12]$

Věta 5.3. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ má každá afinní přímka p v $\mathbb{R}^2$ se směrovým vektorem $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ právě jeden nevlastní bod $(v_x, v_y, 0)$. Tento bod budeme rovněž nazývat *směr* p.

$c \in \mathbb{R}$

Dk

$$v_y x - v_x y + c = 0$$

$$v_y \frac{x_1}{x_3} - v_x \frac{x_2}{x_3} + c = 0 \quad | \cdot x_3$$

$$v_y x_1 - v_x x_2 + c x_3 = 0 \qquad x_3 = 0$$

$$(v_y, -v_x, c)^* \cap (0,0,1)^*$$

p_∞

$$\begin{pmatrix} v_y & -v_x & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

násobky $(v_x, v_y, 0)$

SMĚR p

Věta 5.6. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ uvažujme různé body A, B, C, D ležící na jedné přímce. Pak pro dvojpoměry a dělící poměry platí

1. Jestliže jsou všechny tyto body vlastní, pak
$$(A,B,C,D) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}.$$

2. Jestliže D je nevlastní,pak
$$(A,B,C,D) = -\frac{AC}{CB}.$$

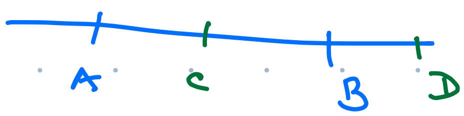
3. Speciálně, pokud je (A,B,C,D) harmonická čtveřice a bod D je nevlastní, pak C je středem AB.

Dk 2 ⇒ 3 TRIV

①

$$\begin{array}{rcl} A & = & \underbrace{[a_x, a_y]}_{\in \mathbb{R}_2} \sim \underbrace{(a_x, a_y, 1)}_{\in \mathbb{P}_2} =: \mathbf{a} \\ B & = & [b_x, b_y] \sim (b_x, b_y, 1) =: \mathbf{b} \\ C & = & [c_x, c_y] \sim (c_x, c_y, 1) =: \mathbf{c} \quad \vec{c} \\ D & = & [d_x, d_y] \sim (d_x, d_y, 1) =: \mathbf{d} \end{array}$$

Na $\overleftrightarrow{AB}$ zvolím bar. soustavu souřadnic (A,B)



$C = c_1 A + c_2 B \qquad c_1 + c_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{AC}{CB} = \frac{c_2}{c_1}$

$D = d_1 A + d_1 B \qquad d_1 + d_2 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{AD}{DB} = \frac{d_2}{d_1}$

Ale zároveň

$\Rightarrow \quad \vec{c} = c_1 \vec{a} + c_2 \vec{b}$

$\quad\;\; \vec{d} = d_1 \vec{a} + d_2 \vec{b} \qquad \overset{\text{def.}}{\Rightarrow} \quad (A,B,C,D) = \frac{c_2 \cdot d_1}{c_1 d_2} = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}$

② D je nevlastní, tedy podle 5.3

$$D = (\underbrace{b_x - a_x, b_y - a_y}_{\vec{d}}, 0)$$

$\Rightarrow \quad \vec{d} = \underset{d_2}{1}\vec{b} - \underset{\beta_2}{1}\vec{a} \qquad (A,B,C,D) = -\frac{c_2}{c_1} = -\frac{AC}{CB}.$

↙ Dk pouze pro $T=\mathbb{R}$, $n=2$

Věta 5.7. Uvažujme kanonicky projektivně rozšířený afinní prostor T^n. Projektivní transformace uvažovaná na vlastních bodech mají tvar lineárních lomených zobrazení. Afinity tvoří podgrupu projektivních transformací a jsou to právě ta zobrazení, které vlastní body zobrazují na vlastní body a nevlastní body na nevlastní body.

Dk

↙ OBECNÝ TVAR

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_{F} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23} \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \frac{a_{11}x+a_{12}y+a_{13}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}} \\ \frac{a_{21}x+a_{22}y+a_{23}}{a_{31}x+a_{32}y+a_{33}} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇑ matice proj zobrazení

↑ pouze pro x, y:

$a_{31}x + a_{32}y + a_{33} \neq 0$

$= 0$

rovnice vlastních bodů s nevlastním obrazem

$$\left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \nwarrow \text{ afinní zobrazení}$$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}$$

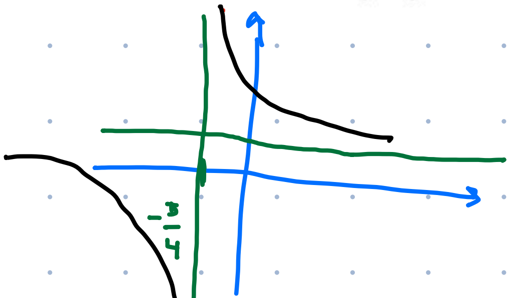
Má-li být obraz všech vlastních bodů vlastní $\Leftrightarrow$

$a_{31} = a_{32} = 0 \qquad a_{33} \neq 0$ (kvůli bijekci)

Příklad 5.8. Zkoumejte lineární lomená zobrazení, například

$$f(x) = \frac{2x+3}{4x+5},$$

z hlediska analýzy a z hlediska projektivních zobrazení na přímce.



$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = \frac{2(4x+5) - 4(2x+3)}{(4x+5)^2} = \frac{-2}{(4x+5)^2}$$

F projektivní verze f

$$\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+3\\4x+5\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\frac{2x+3}{4x+5}\\1\end{pmatrix}$$

Benefit

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \left[\tfrac{1}{2}\right]$$

"∞"

$$\begin{pmatrix}-\frac{5}{4}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

∞

Definice 5.9 (Afinní pojmy pro kvadriky)**.** Nechť $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(T^{n+1})$ je kanonickým projektivním rozšířením afinního prostoru T^n, pak

1. O množině $\tilde{Q} \subset T^n$ řekneme, že je to regulární afinní kvadrika, jestliže to je množina vlastních bodů regulární kvadriky Q v $\mathbb{P}^n$. O Q hovoříme jako o projektivním rozšíření nebo též projektivním zúplnění $\tilde{Q}$ a o $\tilde{Q}$ hovoříme jako o afinní verzi Q. Nevlastní body Q považujeme i za nevlastní body $\tilde{Q}$.

2. Tečné nadroviny ke $\tilde{Q}$ definujeme jako afinní verze tečných nadrovin ke Q ve vlastních bodech.

3. Jestliže je pól nevlastní nadroviny p_∞ vlastním bodem, pak jej nazýváme středem kvadriky $\tilde{Q}$.

4. Jestliže má kvadrika v nevlastním bodě tečnou nadrovinu, která není nevlastní, nazýváme tuto nadrovinu asymptotickou k $\tilde{Q}$.

Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme stejným písmenem označovat afinní objekt (nadrovinu, kvadriku, prostor) a jeho projektivní zúplnění.

Definice 5.10 (Afinní klasifikace kuželoseček)**.** V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme regulární kuželosečku Q. Řekneme o ní, že to je *elipsa*, jestliže nemá žádný nevlastní bod, *parabola*, jestliže má právě jeden nevlastní bod a *hyperbola*, jestliže má dva nevlastní body, jiné možnosti nejsou. Těmto názvům říkáme *afinní typ* kuželosečky. O dvou vlastních přímkách řekneme, že mají sdružené směry, jestliže jsou jejich nevlastní body polárně sdružené vůči Q.

Věta 5.12. Elipsa a hyperbola mají střed, parabola střed nemá. Hyperbola má dvě různé asymptoty, parabola ani elipsa asymptoty nemají. Pro elipsu jsou vždy dva různé směry po dvou sdružené. Pro hyperbolu jsou směry asymptot sdružené vždy samy se sebou a ostatní směry jsou po dvou sdružené. Pro parabolu existuje jeden směr (její nevlastní bod), který je sdružen sám se sebou i se všemi ostatními směry.

Definice 5.13 (Eukleidovské pojmy pro kuželosečky). V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ s kanonickým skalárním součinem mějme regulární kuželosečku Q. Směr (nevlastní bod) nazýváme hlavní, jestliže existuje směr sdružený, který je na něj kolmý. Osu kuželosečky definujeme jako poláru hlavního směru, pokud tato polára není nevlastní přímkou. Vrcholy kuželosečky definujeme jako vlastní průsečíky os s kuželosečkou. Úsečka spojující střed a vrchol se nazývá poloosa.

Příklad 5.11. Všechny pojmy si postupně vyzkoušejme na afinní kuželosečce

$$x^2 + 2xy - 2y + 2 = 0.$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^2 + 2\frac{x_1}{x_3}\frac{x_2}{x_3} - 2\frac{x_2}{x_3} + 2 = 0 \quad \Big|\cdot x_3^2$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2 = 0$$

$(s, t, 0)$ ← pomocí p_∞

$$\begin{array}{c} X \\ (1\ 0\ 0) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (1, 1, 0)^* \; p_X$$

$A = (0,1,0)$ $\quad = (1, 0, -1)^*$ $\; p_A$

$$p_S = p_\infty = (0,0,1)^*$$

$X = (1,0,0) \in p_\infty$

$Y = (0,1,0) \in p_\infty$

$$S: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$S = (1\ -1\ 1)$ .... $[1, -1]$

Nevl. body

$$s^2 + 2st = 0$$

$$s(s + 2t)$$

$Q \cap p_\infty$

OBECNĚ $\alpha \cdot s^2 + \beta st + \gamma t^2 = 0$
HOMOGENNÍ KV. ROV

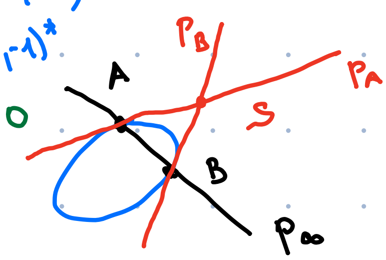
$\Rightarrow$ Hyperbola

$A = (0,1,0)$ $\qquad B = (2,-1,0)$

$p_A = (1,0,-1)^*$ $\qquad p_B = (1,2,1)^*$

Proj. obrázek

$x - 1 = 0$

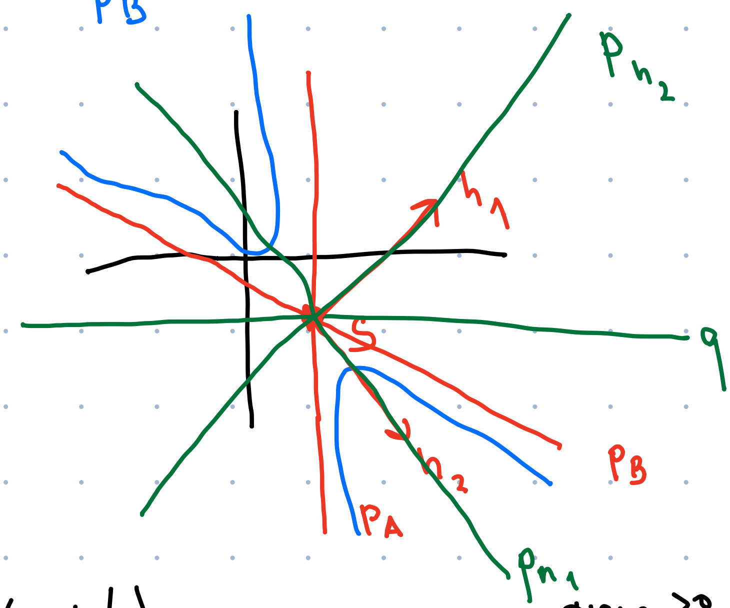


$x + 2y + 1 = 0$

$(2,-1,0)$
B

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} : = (1,2,1)^*$$

p_B



$q = y = -1$
$(0,1,1)^*$

$$q: \; s\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s+t \\ -s \\ s \end{pmatrix}$$

DISKR >0
<0

$Q \cap q$:

$$(s+t, -s, s)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s+t \\ -s \\ s \end{pmatrix} = \dots\dots$$

Hlavní směry:

$$(s,t,0)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(s+t, s, -t)\begin{pmatrix} t \\ -s \\ 0 \end{pmatrix} = st + t^2 - s^2 =$$

$$= t^2 + st - s^2 \qquad | : s^2$$

$$D = 5$$

$$\frac{t}{s} = (t:s) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$h_1 = (2, -1+\sqrt{5}, 0)$$

$$h_2 = (2, -1-\sqrt{5}, 0)$$

Věta 5.12. Elipsa a hyperbola mají střed, parabola střed nemá. Hyperbola má dvě různé asymptoty, parabola ani elipsa asymptoty nemají. Pro elipsu jsou vždy dva různé směry po dvou sdružené. Pro hyperbolu jsou směry asymptot sdružené vždy samy se sebou a ostatní směry jsou po dvou sdružené. Pro parabolu existuje jeden směr (její nevlastní bod), který je sdružen sám se sebou i se všemi ostatními směry.

Dk. Matice kuželosečky Q

$Q \cap p_\infty$:

$$(s, t, 0) \overbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}}^{B} \begin{pmatrix} s \\ t \\ 0 \end{pmatrix} = b_{11} \cdot s^2 + 2 b_{12} \cdot st + b_{22} \cdot t^2 = 0$$

$b_{12} = b_{21}$

$$D = 4b_{12}^2 - 4 b_{11} \cdot b_{22} = -4 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{array}{ll} > 0 & \text{HYP} \\ = 0 & \text{PAR} \\ < 0 & \text{ELI} \end{array}$$

Jaký je pól nevlastní přímky?

NEVLASTNÍ

$$(\alpha, \beta, 0) \cdot B = (0, 0, 1)^*$$

$$(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = (0, 0)$$

$\Updownarrow$ SINGULÁRNÍ

$\Updownarrow$

PARABOLA

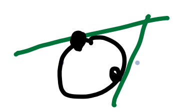
VLASTNÍ (JINAK)

EL. HYP.

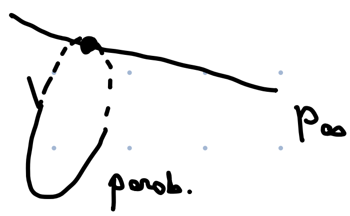
ASYMPTOTY = VLASTNÍ TEČNY V NEVL. BODECH

EL $\emptyset$

HYP 2 asymptoty



PAR. 1 nevl. bod $\rightsquigarrow$ tečna nevlastní (NE ASYM)



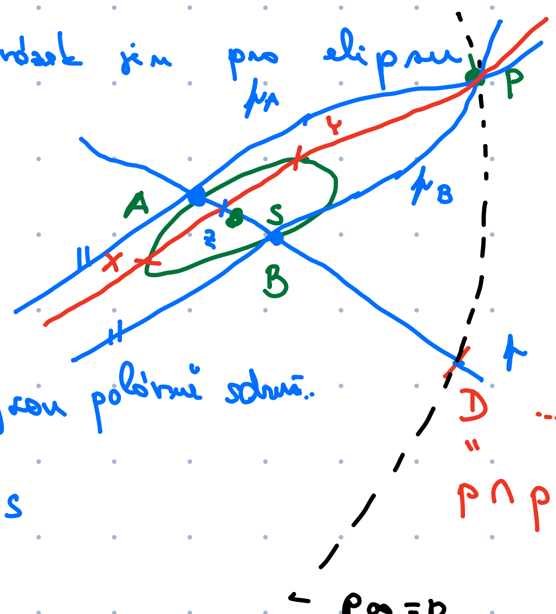
Věta 5.14. Pro kružnici je každý bod jejím vrcholem. Elipsa, která není zároveň kružnicí má čtyři vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Hyperbola má dva vrcholy a dvě vzájemně kolmé osy, které procházejí středem. Parabola má jeden vrchol a jednu osu, která prochází vrcholem a nevlastním bodem paraboly. Tečna ke kuželosečce v jejím vrcholu má vždy hlavní směr.

Věta 5.15. Nechť přímka p prochází středem S kuželosečky Q (elipsy nebo hyperboly) a protíná kuželosečku ve dvou různých bodech A, B. Pak S je středem úsečky AB. Tečny ke Q v bodech A, B jsou rovnoběžné a mají směr sdružený se směrem p. Jestliže má přímka se směrem sdruženým k p s kuželosečkou Q dva průsečíky X, Y, pak přímka p půlí úsečku XY.

Dk. Obrázek jen pro elipsu

Lemma 4.20 / Věta 5.6

$(A, B, S, D) = -1$
$\Updownarrow$ S je středem AB.



S a D jsou polárně sdruž.

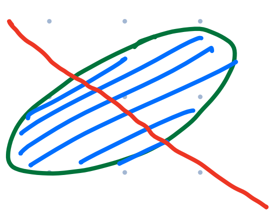
$p_\infty = p_S$

D ... nevlastní bod
$= p \cap p_\infty$

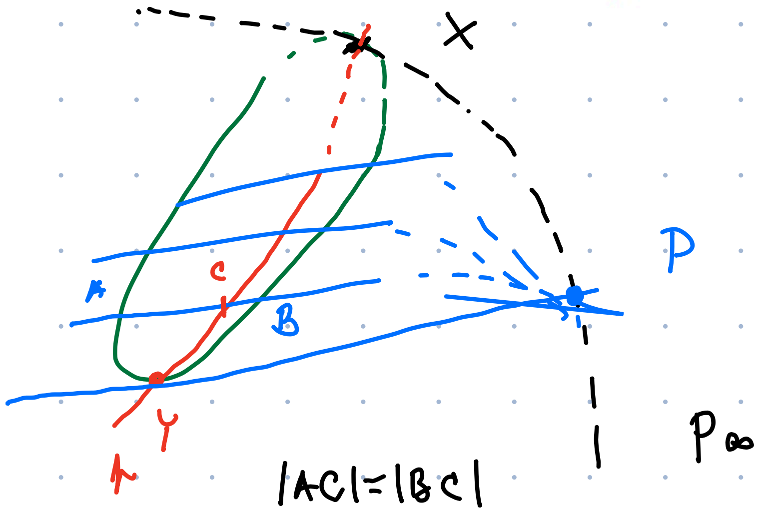
P je pólem p a je nevlastní

P a D jsou sdružený

$(X, Y, Z, P) = -1 \Rightarrow Z$ je střed XY

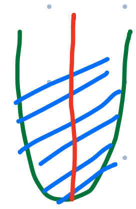


Věta 5.16. Nechť vlastní přímka p prochází jediným nevlastním bodem X paraboly a protíná ji v dalším (vlastním) bodě Y. Nechť přímka rovnoběžná s tečnou v bodě Y protíná parabolu ve dvou bodech A, B. Pak přímka p půlí úsečku AB.

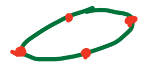


$|AC| = |BC|$

$(A, B, C, P) = -1$



Poznámka 5.17 (Meta-věta o projektivních, afinních a eukleidovských pojmech)**.** Projektivní zobrazení zachovávají (správně zobrazují) projektivní pojmy, afinní zobrazení zachovávají afinní pojmy a shodnosti zachovávají eukleidovské (na skalárním součinu závisející) pojmy.



Věta 5.18 (Příklad afinně zachovaného pojmu)**.** V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ mějme elipsu Q se středem S. Jestliže F je afinita, pak $F(Q)$ je opět elipsa a $F(S)$ je jejím středem.

Dk.

Q ... bilineární forma b

$F(Q)$ kde F je afinní zobrazení

$F(p_\infty) = p_\infty$

bilineární forma $\bar{b}(X, Y) = b(F^{-1}(X), F^{-1}(Y))$

S je střed Q ... $\forall X \in p_\infty : b(Q, X) = 0$

$\Rightarrow \forall Y \in p_\infty : \bar{b}(F(S), Y) = b(S, \underset{\in p_\infty}{F^{-1}(Y)}) = 0.$

tady $F(S)$ je středem $F(Q)$.

Věta 5.19. V projektivně rozšířené rovině $\mathbb{R}^2$ platí, že

$$\left(\begin{array}{c|c} A & \mu \\ \hline 0\ 0 & 1 \end{array}\right)$$

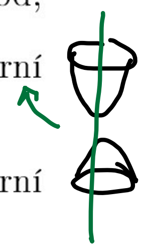
1. každá elipsa je afinní transformací elipsy $x^2 + y^2 - 1 = 0$,
2. každá parabola je afinní transformací paraboly $x^2 - y = 0$,
3. každá hyperbola je afinní transformací hyperboly $xy - 1 = 0$.

V důsledku jsou tedy každé dvě kuželosečky stejného afinního typu mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

Definice a lemma 5.20 (Projektivní a afinní klasifikace kvadrik v prostoru)**.** V projektivně rozšířeném prostoru $\mathbb{R}^3$ definujeme tyto afinní typy regulárních kvadrik

nepřímkové kvadr.

1. *elipsoid* jako nepřímkovou kvadriku, která nemá žádný nevlastní bod,
2. *eliptický paraboloid*, jako nepřímkovou kvadriku, která má právě jeden nevlastní bod,
3. *dvojdílný hyperboloid* jako nepřímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku



přímk. kvadr.

4. *jednodílný hyperboloid*, jako přímkovou kvadriku, jejíž nevlastní body tvoří regulární kuželosečku

5. *hyperbolický paraboloid*, jako přímkovou kvadriku jejíž nevlastní body tvoří dvě přímky.

Každé dvě kvadriky stejného afinního typu jsou mezi sebou zobrazitelné afinní transformací.

Důkaz. Afinní klasifikace plyne z výčtu všech možností polohy nevlastní roviny (sečná, tečná, mimo) vůči kvadrice. Přímková kvadrika nemůže mít neprázdný průnik s žádnou rovinou, proto je tříd jen 5. Existenci transformací dokazovat nebudeme.

V rovině

DOBLE

57 kartiček

57 symbolů

každá 8 symbolů

... na 8 kartičkách

$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{Z}_7^3)$

49 vl. bodů + 8 nevlastních.