

Cvičení k přednášce Geometrie 1

verze 18. prosince 2025

Tento dokument obsahuje dvanáct sad úloh k jednotlivým cvičením z předmětu Geometrie 1. V závěrečné části dokumentu (za všemi zadáními) jsou uvedeny výsledky, návody a případně i kompletní postupy řešení úloh. Úlohy označené **(Z)** jsou považovány za základní, v početní části zkuškové písemky lze očekávat úlohy srovnatelné obtížnosti. Ostatní úlohy jsou ale také velmi důležité, protože pomáhají pochopit přednášenou látku a rozvíjet geometrické porozumění matematice.

1 Shodná zobrazení v rovině

Úloha 1.1. (Z) Pro následující zobrazení z $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rozhodněte, zda se jedná o shodnost. Jestliže ano, určete její typ, nalezněte její samodružné prvky (body, směry, přímky) a inverzní zobrazení. Složte některá zobrazení mezi sebou.

a) $x' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 1, y' = -\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 2$

b) $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20, y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$

c) $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + 1, y' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2$

d) $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y$

e) $x' = -x + 1, y' = -y + 2$

f) $x' = x + 3, y' = -y$

Úloha 1.2. (Z) Pomocí zobrazení z úlohy 1.1, a) zobrazte

a) bod $[2, -3]$

b) přímku $[1, 1] + t(1, 2)$

c) přímku $x + y - 3 = 0$

d) parabolu $y - x^2 = 0$

Úloha 1.3. (Z) Nalezněte rovnici otočení v rovině se středem $[1, 3]$ o úhel α .

Úloha 1.4. (Z) Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : x - y - 3 = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 1.5. (Z) Napište rovnici shodnosti, která vznikne složením osových souměrností po řadě s osami: $o_1 : 2x + 3y + 4 = 0$ a $o_2 : 2x + 3y = 0$ a určete typ shodnosti.

Úloha 1.6. (Z) Popište všechny shodnosti v rovině, které zobrazí bod $\mathbf{X} = [2, 5]$ na bod $\mathbf{X}' = [-6, 3]$.

Úloha 1.7. (Z) Nalezněte všechny shodnosti v $\mathbb{R}^2$, pro které je přímka $3x + 4y - 1 = 0$ samodružná a zároveň její bod $[3, -2]$ je samodružný.

Úloha 1.8. Určete reálné parametry p, q tak, aby existovala shodnost f v $\mathbb{R}^2$ taková, že $f : [3, 0] \mapsto [1, 4]$, $f : [1, 2] \mapsto [3, p]$, $f : [-1, 2] \mapsto [1 + p, -q]$. Tuto shodnost analyzujte.

Úloha 1.9. Nalezněte všechny shodnosti, které zachovávají čtverec s vrcholy $[0, 0]$, $[1, -1]$, $[2, 0]$ a $[1, 1]$. Popište grupu, kterou tvoří.

Úloha 1.10. Konstrukčně i početně nalezněte všechny pětiúhelníky (ne nutně konvexní), jestliže jsou zadány (popořadě) středy jeho stran $S_1 = [3, -2]$, $S_2 = [6, 0]$, $S_3 = [3, 2]$, $S_4 = [-2, 1]$, $S_5 = [-1, -2]$.

Úloha 1.11. Nalezněte shodnost v rovině, která zobrazí kuželosečku s implicitní rovnicí $20x - 9x^2 - 15y - 24xy - 16y^2 = 0$ na kuželosečku, která nemá smíšený člen xy . Rozhodněte, o jakou kuželosečku se jedná.

Úloha 1.12. Nalezněte shodnost v rovině, kterou lze složit ze tří osových souměrností, ale ne z menšího počtu. Dokažte!

2 Shodná zobrazení v prostoru

Úloha 2.1. (Z) Vypočtete součin $q_1 q_2$ jednak přímo z definice a druhak geometricky pomocí formule s vektorovým a skalárním součinem. Rovněž k těmto kvaternionům nalezněte kvaterniony inverzní.

$$\begin{aligned}q_1 &= 2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{k} \\q_2 &= 1 + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}\end{aligned}$$

Úloha 2.2. (Z) Nalezněte otočení vektoru $(0, 0, 1)$ kolem vektoru $(1, 2, 2)$ o úhel $\frac{2\pi}{3}$ v kladném směru. Pokuste se úlohu vyřešit jak pomocí Rodriguesovy formule tak pomocí kvaternionů.

Úloha 2.3. (Z) Vyjádřete středovou souměrnost v $\mathbb{R}^3$ se středem $[1, 2, 3]$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Úloha 2.4. Nalezněte vyjádření rovinové souměrnosti v $\mathbb{R}^3$, která zobrazuje bod $[1, 0, -2]$ na bod $[3, 2, 0]$.

Úloha 2.5. Nalezněte vyjádření osové souměrnosti v prostoru podle přímky s parametrickým vyjádřením $[1, 0, -1] + t(1, 2, 3)$. Jedná se o přímou nebo nepřímou shodnost?

Úloha 2.6. Ověřte, že rovnice

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1, \\y' &= \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z + 2, \\z' &= \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z + 3,\end{aligned}$$

popisují přímou shodnost $\mathbb{R}^3$. Najděte samodružnou přímku tohoto zobrazení a vyjádřete je jako složení otočení kolem této přímky a posunutí v jejím směru (tedy jako šroubový pohyb). Jaká je velikost úhlu otočení a vektoru posunutí?

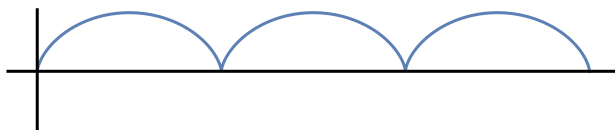
Úloha 2.7. Nalezněte všechny jednotkové kvaterniony, které odpovídají rotaci, která převádí vektor $(1, 0, 0)$ na vektor $(0, 1, 0)$.

3 Rovinné křivky

Úloha 3.1. (Z) V rovině mějme body $A = [2, 3]$, $B = [-2, -1]$.

1. Nalezněte regulární parametrizaci $\mathbf{c}(t)$ úsečky AB tak, aby $A = \mathbf{c}(0)$ a $B = \mathbf{c}(1)$.
2. Nalezněte parametrizaci této úsečky obloukem (tedy $\|\mathbf{c}'(t)\| = 1$) takovou, že $A = \mathbf{c}(5)$.
3. Nalezněte regulární parametrizaci této úsečky takovou, aby $A = \mathbf{c}(0)$ a $B = \mathbf{c}(1)$ a $\mathbf{c}(\frac{1}{3})$ byl její střed.
4. Nalezněte nějakou parametrizaci AB na, která bude hladká, prostá, ale v některém bodě nebude regulární ($\mathbf{c}'(t) = (0, 0)$ pro nějaké t .)

Úloha 3.2. Cykloida. Uvažujme kolo o poloměru a , které se valí konstantní rychlostí v po ose x doprava. Parametricky popište trajektorii bodu na kole, který v čase $t = 0$ nacházel v bodě $(0, 0)$. Vypočtěte znaménkovou křivost.



Úloha 3.3. (Z) Uvažujme orientovanou rovinnou křivku danou parametrizací $\mathbf{c}(t) = (t, t^3)$. V jejím bodě $t = 1$ vypočtěte znaménkovou křivost, tečný a orientovaný normálový vektor, tečnou a normálovou přímku a oskulační kružnici. V nějaké reparametrizaci zachovávající orientaci ověřte, že znaménková křivost v odpovídajícím bodě zůstává stejná.

Úloha 3.4. (Z) Nalezněte přímou shodnost, která pro křivku z Úlohy 3.3 zobrazí její bod $\mathbf{c}(1)$ do počátku souřadnic a její tečný vektor v tomto bodě na vektor $(1, 0)$. Ověřte, že znaménková křivost zobrazené křivky v odpovídajícím bodě bude stejná.

Úloha 3.5. (Z) V obecném bodě vyjádřete znaménkovou křivost křivky dané parametrizací $\mathbf{c}(t) = (t^3 - 3t, 3t^2)$. V bodě s extrémní křivostí sestrojte oskulační kružnici.

Úloha 3.6. Nalezněte nějakou parametrizaci elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ a studujte její znaménkovou křivost. Jaká jsou její minima a maxima?

Úloha 3.7. Ukažte, že v okolí bodu $(1, 1)$ lze hladce parametrizovat implicitně zadanou křivku

$$x^6 - 2xy + y^6 = 0$$

a v tomto bodě spočtěte její znaménkovou křivost (znaménko se mění podle zvolené orientace).

4 Prostorové křivky

Úloha 4.1. (Z) Je dána parametrizovaná křivka

$$\mathbf{c}(t) = \left[\frac{1}{5}t^5 + t^2 - 2t, -\frac{1}{2}t^4 + \frac{2}{3}t^3 + t^2, \frac{4}{3}t^3 - t^2 \right], \quad t \in (0, 2).$$

V bodě $t = 1$ nalezněte její křivost, torzi a Frenetův repér.

Úloha 4.2. (Z) Je dána prostorová křivka

$$\mathbf{c}(t) = [3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3], \quad t \in \mathbb{R}$$

spočtete její křivost a torzi v obecném bodě a určete Frenetův repér v bodě $\mathbf{c}(0)$.

Úloha 4.3. (Z) Parametrizujte následující křivky obloukem:

a) $\mathbf{c}(t) = [t, \sqrt{2} \ln t, t^{-1}]$ pro $t \in (0, \infty)$.

b) $\mathbf{c}(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \sin(\frac{t}{2})]$ pro $t \in \mathbb{R}$.

Úloha 4.4. (Z) Určete křivost a torzi v obecném bodě šroubovice

$$\mathbf{c}(t) = [R \cos(t), R \sin(t), at], \quad t \in \mathbb{R},$$

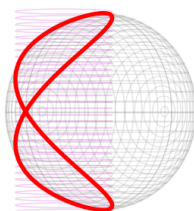
kde R, a jsou pevné reálné parametry. Určete úhel, který tečné vektory křivky svírají s osou z . Parametrizujte šroubovici obloukem.

Úloha 4.5. (Z) Spočtete rovnici oskulační roviny křivky:

$$\mathbf{c}(t) = [\cos^3 t, \sin^3 t, \cos(2t)], \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Úloha 4.6. Zjistěte zda křivka $\mathbf{c}(t) = \left[\frac{2t+1}{t-1}, \frac{t^2}{t-1}, t+2\right]$, $t \in (2, 10)$ leží v rovině, případně v jaké.

Úloha 4.7. Parametrizujte průnik sféry s válcovou plochou, která prochází středem sféry a má poloviční průměr. Nalezněte body s největší křivostí a v těchto bodech spočítejte křivost, torzi a Frenetův repér.



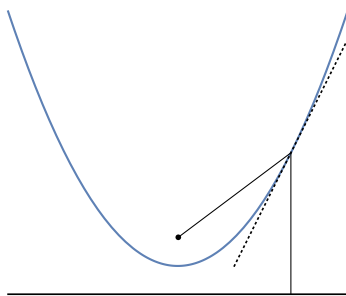
5 Další úlohy o křivkách

Toto cvičení je volné a opakovací. Je možno ho věnovat dodělávání úloh z minulých sérií nebo dalším zajímavým úlohám, například těm, které jsou zde uvedeny.

Úloha 5.1. Studujte logaritmickou spirálu $c(t) = e^t(\cos t, \sin t)$, $t \in \mathbb{R}$, zejména z hlediska její délkové funkce a jejích soběpodobností.

Úloha 5.2. Kissoida. Uvažujme kružnici k o poloměru r a nějakou její tečnu p . Označme jako S bod dotyku přímky p s kružnicí k a nechť bod A leží na kružnici k naproti bodu S . Pro polopřímku q , která vychází z bodu A a která se protíná s přímkou p , označme jako R bod průniku p a q , jako Q bod průniku k a q . Označme jako P bod na q , který splňuje $|A - P| = |Q - R|$. Najděte rovnici, která určuje množinu všech takových bodů P , a najděte parametrický popis této množiny (křivky).

Úloha 5.3. Uvažujme parabolu $[t, t^2]$, bod $F = [0, a]$ a přímku $p : y = -a$, $a \in \mathbb{R}$.



Určete a tak, aby měl každý bod paraboly stejnou vzdálenost od bodu F (ohniska) a přímky p (řídící přímky) a ukažte, že tečna k parabole pólí úhel příslušných průvodičů. Parametrizujte množinu bodů, které jsou obrazem ohniska v osově souměrnosti podle všech normálových přímek paraboly.

Úloha 5.4. Tractrix je křivka, kterou kopíruje předmět tažený na provázku. Ve výchozí situaci se předmět nachází v bodě $[1, 0]$ a člověk v počátku, tj. v bodě $[0, 0]$. Člověk se pohybuje konstantní rychlostí podél osy y a táhne předmět na provázku délky 1. Najděte nějakou parametrizaci tractrix.

Úloha 5.5. Dokažte, že prostorová křivka leží na nějaké sféře právě tehdy, když všechny její normálové roviny procházejí jedním bodem.

Úloha 5.6. Určete funkci $f(t)$, tak aby měla křivka $\mathbf{c}(t) = [R \cos t, R \sin t, f(t)]$, $t \in \mathbb{R}$ nulovou torzi.

Výsledky. Musí platit $f'(t) + f'''(t) = 0$, tedy $f(t) = a + b \cos t + c \sin t$ a jedná se o rovinné řezy válce, tedy o elipsy.

Úloha 5.7. Zobecněná šroubovice je křivka v prostoru, pro kterou existuje směr (osa), se kterým tečné vektory křivky svírají konstantní úhel. Dokažte, že křivka $\mathbf{c}(t)$ s nenulovou křivostí a torzí je zobecněnou šroubovicí právě tehdy, když je poměr $\frac{\kappa(t)}{\tau(t)}$ konstantní. V důsledku je tedy křivka z Úlohy 4.2 zobecněnou šroubovicí, nalezněte její osu.

6 Křivkový integrál

Úloha 6.1. (Z) Spočtete délku křivky $\mathbf{c}(t) = [t - \sin t, 1 - \cos t, 4 \cos \frac{t}{2}]$ na intervalu $t \in (0, 2\pi)$.

Úloha 6.2. (Z) Spočtete délku asteroidy $\mathbf{c}(t) = [a \cos^3 t, a \sin^3 t]$ na intervalu $t \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Úloha 6.3. (Z) Vypočtete křivkový integrál 1. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} |x| ds,$$

kde $\mathbf{c}$ je parabola $y = x^2$, $x \in (-1, 1)$.

Úloha 6.4. (Z) Vypočtete křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} (a - y) dx + x dy,$$

kde $\mathbf{c}(t)$ je cykloida $\mathbf{c}(t) = [a(t - \sin t), a(1 - \cos t)]$, $t \in (0, 2\pi)$.

Úloha 6.5. (Z) Určete obsah plochy ohraničené křivkou $\mathbf{c}(t) = [\sin t, \frac{t^2}{2}]$, kde $t \in (-\pi, \pi)$.

Úloha 6.6. Spočtete křivkový integrál 2. druhu

$$\int_{\mathbf{c}} \frac{-y^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} dx + \frac{x^2}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}} dy$$

kde $\mathbf{c}$ je křivka $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ od $[0, 1]$ do $[1, 0]$.

Úloha 6.7. Následující integrál 2. druhu spočtete přímo z definice a také pomocí Greenovy věty

$$\int_{\mathbf{c}} (x + y) dx - (x - y) dy,$$

kde $\mathbf{c}$ je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0, b > 0$.

Úloha 6.8. Jaký obsah má plocha, kterou může spást koza přivázaná na provazu o délce L k mohutnému stromu, který má kmen o kruhovém průřezu s poloměrem a , $L < \pi a$. Místo, kde je provaz přivázaný ke stromu se nehýbe.

Úloha 6.9. Vyjádřete obsah pravidelného n -úhelníku, který má předepsaný obvod ℓ . Studujte jak se tento obsah chová pro $n \rightarrow \infty$.

7 Afinity prostory

Úloha 7.1. (Z) Uvažujme dvě posloupnosti $S = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a $R = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ v $\mathbb{R}^2$.

- (a) Ověřte, že se jedná o souřadné soustavy afinního prostoru $\mathbb{R}^2$,
- (b) spočítejte souřadnice bodu $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ vzhledem ke kanonické souřadné soustavě a vzhledem k soustavě souřadnic S ,
- (c) najděte bod $\mathbf{C}$, pro který $[\mathbf{C}]_S = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$,
- (d) pro bod $\mathbf{A}$ afinního prostoru najděte $[\mathbf{A}]_S$, jestliže $[\mathbf{A}]_R = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,
- (e) obecněji, pro bod $\mathbf{A}$ afinního prostoru najděte $[\mathbf{A}]_S = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, jestliže $[\mathbf{A}]_R = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Úloha 7.2. (Z) Mějme afinní prostor $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$ s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^2$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Spočítejte afinní kombinaci bodů $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$,
- (b) rozhodněte, zda je bod $\mathbf{B}$ afinní kombinací bodů $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ a pokud ano, spočítejte ji,
- (c) ověřte, že je posloupnost $B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ barycentrická soustava souřadnic a určete barycentrické souřadnice $[\mathbf{B}]_B$ a $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_B$ (je to bod z B!).
- (d) rozhodněte, zda body $\mathbf{B}$ a $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ leží v trojúhelníku s vrcholy B ,
- (e) spočítejte těžiště trojúhelníku B .

Úloha 7.3. (Z) V eukleidovském prostoru $\mathbb{R}^3$ se standardním skalárním součinem uvažujme přímky $p = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a $q = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

- (a) Určete vzájemnou polohu přímek p a q ,
- (b) určete úhel přímek p a q ,
- (c) najděte přímku různoběžnou a zároveň kolmou k oběma přímkám p a q ,
- (d) spočítejte vzdálenost p a q .

Úloha 7.4. (Z) V afinním prostoru $\mathbb{Z}_5^4$ nad tělesem $\mathbb{Z}_5$ s vektorovým prostorem $\mathbb{Z}_5^4$ uvažujme tři podprostory

$$D_1 = \text{AO}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \quad D_3 = \{A \in \mathbb{Z}_5^4 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}\}.$$

- (a) Najděte soustavu souřadnic a barycentrickou soustavu souřadnic afinních prostorů D_1 , D_2 a D_3 .
- (b) určete parametrické vyjádření podprostorů D_1 a D_3 ,
- (c) určete rovnicové vyjádření podprostorů D_1 a D_2 ,
- (d) určete podprostory D_2 a D_3 jako afinní kombinace bodů.

Úloha 7.5. Uvažujme posloupnost bodů $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ a bod $\mathbf{B} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ v afinním prostoru nad tělesem $\mathbb{R}$ s vektorovým prostorem $\mathbb{R}^3$.

- (a) Ověřte, že je B barycentrická soustava souřadnic afinního prostoru a že body B tvoří (nedegenerovaný) čtyřstěn,
- (b) spočítejte barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{B}$ vzhledem k barycentrické soustavě souřadnic B a
- (c) najděte bod $\mathbf{C}$ s barycentrickými souřadnicemi $(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3})^T$ vzhledem k soustavě B ,
- (d) určete barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{B}$ vzhledem k soustavě $B' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ (využijte podobnost s B),
- (e) rozhodněte, zda bod $\mathbf{B}$ či $\mathbf{C}$ leží ve čtyřstěnu B .

Úloha 7.6. Uvažujme aritmetický afinní prostor $\mathbb{R}^4$ se zaměřením $\mathbb{R}^4$. Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \text{AO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right\},$$

kde a je pevné reálné číslo a D_2 je řešením soustavy (s jedinou rovnicí)

$$(2, 3, 4, 1) \cdot x = 10.$$

Ukažte, že D_2 je nadrovina a určete hodnotu a tak, aby D_1 a D_2 byly rovnoběžné.

Úloha 7.7. Uvažujme aritmetický afinní prostor $\mathbb{R}^4$ se zaměřením $\mathbb{R}^4$. Definujme jeho podprostory

$$D_1 = \text{AO}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}.$$

Pro oba podprostory určete jejich dimenzi a nalezněte jejich rovnicové vyjádření. Určete jejich vzájemnou polohu a v případě různoběžnosti i jejich průsečík.

8 Afinity zobrazení

Úloha 8.1. (Z) Určete rovnice afinního zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do sebe, ve kterém bod $\mathbf{M} = (0, 1)^T$ přechází do bodu $\mathbf{M}' = (-3, 3)^T$ a asociovaný homomorfismus zobrazuje vektory $\mathbf{u} = (1, 2)^T$ a $\mathbf{v} = (1, 0)^T$ po řadě na vektory $\mathbf{u}' = (-7, -2)^T$, $\mathbf{v}' = (1, -2)^T$.

Úloha 8.2. (Z) Určete afinní zobrazení f z $\mathbb{R}^2$ do sebe tak, že následující body zobrazí :

$$f([-1, 1]) = [6, 7], \quad f([1, -1]) = [4, 5], \quad f([2, 0]) = [7, 12].$$

Určete zda-li se jedná o afinitu a případně nalezněte zobrazení inverzní.

Úloha 8.3. (Z) Při afinním zobrazení $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadaném obrazy bodů a jejich vzory: $f((2, 1, -1)^T) = (1, 3)^T$, $f((1, 0, 2)^T) = (0, 2)^T$, $f((0, 1, 1)^T) = (1, -1)^T$, $f((1, 1, 1)^T) = (1, 1)^T$ určete obraz bodu $(3, 1, -2)^T \in \mathbb{R}^3$ a obraz vektoru $(3, 1, -2)^T$ při asociovaném homomorfismu $\bar{f}$.

Úloha 8.4. (Z) Lineární zobrazení $\bar{f}$ asociované s afinním zobrazením $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ má vzhledem k bázi B matici A . Navíc platí $f((1, 2)) = (5, -8)$. Určete $f((3, 4))$.

$$B = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right), \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 8.5. (Z) V afinní rovině $\mathbb{Z}_5^2$ jsou dány body $\mathbf{A} = (2, 3)^T$, $\mathbf{B} = (1, 4)^T$. Nalezněte rovnoběžku s přímkou $\mathbf{AB}$, která prochází bodem $\mathbf{C} = (2, 2)^T$ a popište ji parametricky i rovnicově.

Úloha 8.6. (Z) V $\mathbb{R}^2$ je dán trojúhelník ABC s vrcholy $\mathbf{A} = (2, 0)^T$, $\mathbf{B} = (-3, 0)^T$ a $\mathbf{C} = (3, -3)^T$. Ukažte, že body $\mathbf{P} = (-1, -1)^T$, $\mathbf{Q} = (1, 3)^T$, a $\mathbf{R} = (-\frac{1}{2}, 0)^T$ leží postupně na přímkách $\mathbf{BC}$, $\mathbf{CA}$ a $\mathbf{AB}$ a určete v jakém poměru je rozdělují. Rozhodněte, zda body $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ leží na přímce.

Úloha 8.7. Vyjádřete kolmou projekci π celého $\mathbb{R}^2$ na přímku $x + 2y + 3 = 0$ a ověřte, že $\pi \circ \pi = \pi$.

Úloha 8.8. Na reálné afinní přímce jsou dva různé body A, B . Definujme $S = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ a $T = \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B$. Vyjádřete dělicí poměry $\frac{AT}{TB}$, $\frac{TA}{AB}$, $\frac{ST}{TB}$. Vyjádřete bod S jako afinní kombinaci bodů A a T .

Úloha 8.9. V $\mathbb{R}^2$ je nějaký trojúhelník ABC a dále je S střed strany AB a bod T leží v jedné pětině strany AC . Označme si P průsečík přímek CS a BT . V jakém poměru dělí bod P úsečky CS a BT ? Jaký je poměr obsahů trojúhelníku ABC a PBC ?

Úloha 8.10. (Van Aubelova věta) V $\mathbb{R}^2$ je nějaký trojúhelník $\mathbf{ABC}$ a bod $\mathbf{X}$, který neleží na žádné ze stran trojúhelníka (ani po prodloužení do přímek). Označme si $\mathbf{P} = \mathbf{AX} \cap \mathbf{BC}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{BX} \cap \mathbf{CA}$ a $\mathbf{R} = \mathbf{CX} \cap \mathbf{AB}$. Dokažte, že platí

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XP}} = \frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}} + \frac{\mathbf{AQ}}{\mathbf{QC}}.$$

9 Projektivní prostor a zobrazení

Úloha 9.1. (Z) Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ a v ní body $\mathbf{A} = (1, 2, 3)^T$, $\mathbf{B} = (3, 2, 1)^T$, $\mathbf{C} = (1, 1, 1)^T$.

- Ukažte, že tyto body leží na projektivní přímce, najděte její parametrizaci a duální homogenní souřadnice.
- Nalezněte průsečík $\mathbf{D}$ přímky $\overleftrightarrow{\mathbf{AB}}$ s přímkou $(1, 2, -5)^*$ a vypočítejte dvojpoměr $\mu = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$.
- Vypočítejte dvojpoměr pro různé permutace, např. $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{C})$, $(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, $(\mathbf{C}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{D})$ a zamyslete se jak výsledky souvisejí s μ .
- Na přímce $\overleftrightarrow{\mathbf{AB}}$ nalezněte bod $\mathbf{E}$ tak, aby $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}) = -1$ (a tedy body tvořily harmonickou čtveřici).

Úloha 9.2. (Z)

- Určete kolik má bodů a kolik přímek projektivní rovina $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_p^3)$. Kolik na každé přímce leží bodů a kolik přímek prochází každým bodem?
- Uvažujme projektivní rovinu $\mathbb{P}(\mathbb{Z}_5^3)$ a v ní dva body $\mathbf{A} = (1, 2, 3)^T$ a $\mathbf{B} = (3, 1, 2)^T$. Vypište všechny body, které leží na přímce $\overleftrightarrow{\mathbf{AB}}$. Nalezněte její průsečík $\mathbf{P}$ s přímkou $\mathbf{p} = (1, 1, 0)^*$.
- Pro bod $\mathbf{X} = (3, 1, 1)^T$ určete, zda je definován dvojpoměr bodů $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{X})$, a pokud ano, tak jej vypočítejte.

Úloha 9.3. (Z) Nalezněte projektivní transformaci F přímky $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ na sebe, která splňuje

$$F(1, 0)^T = (1, 3)^T, \quad F(2, 3)^T = (4, 9)^T, \quad F(2, 1)^T = (2, 5)^T.$$

Dále určete vzor bodu $(3, 7)^T$ a určete dvojpoměr bodů a jejich obrazů (v pořadí, ve kterém jsou napsány v zadání). Hint: souřadnice fungují až na násobek.

Úloha 9.4. (Z)

V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána kuželosečka rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 - 3x_3^2 = 0.$$

- Ukažte, že se jedná o regulární reálnou kuželosečku.
- Nalezněte poláru p_X k bodu $\mathbf{X} = (3, 4, 1)$.
- Nalezněte tečny ke Q procházející bodem $\mathbf{X}$.

d) Ukažte, že bod $\mathbf{X}$ leží na přímce $r = (1, 1, -7)^*$. Vypočtete $\mathbf{Y} = r \cap p_X$ a oba průsečíky $r \cap Q$, které si označte $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.

e) Ukažte, že $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ tvoří harmonickou čtveřici.

Úloha 9.5. V reálném projektivním prostoru $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ je dána kvadrika rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$2x_1^2 + 4x_2x_1 - 2x_3x_1 + 3x_2^2 - 2x_4^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 - 2x_3x_4 = 0.$$

Ověřte, že tato kvadrika je regulární a rozhodněte, zda-li je přímková či nikoliv. Nalezněte tečnou rovinu v jejím bodě $(3, -2, 2, -1)$. Nalezněte průnik této tečné roviny s kvadrikou.

Úloha 9.6 (Projektivní transformace). Nalezněte projektivní transformaci F roviny $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ na sebe, která splňuje

$$F(1, 0, 0) = (1, 0, 2), \quad F(0, 1, 0) = (0, 1, -1), \quad F(0, 0, 1) = (1, 1, 2), \quad F(2, 1, 1) = (8, 1, 17).$$

Úloha 9.7. V reálné projektivní rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ je dána množina rovnicí v kanonických homogenních souřadnicích

$$Q : 5x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 5x_3^2 = 0.$$

Ukažte, že Q je regulární kuželosečka a nalezněte k ní tečnu v jejím bodě $(2, 0, 2)$. Nalezněte projektivní transformaci, která zobrazuje kanonickou kuželosečku $K : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ na Q .

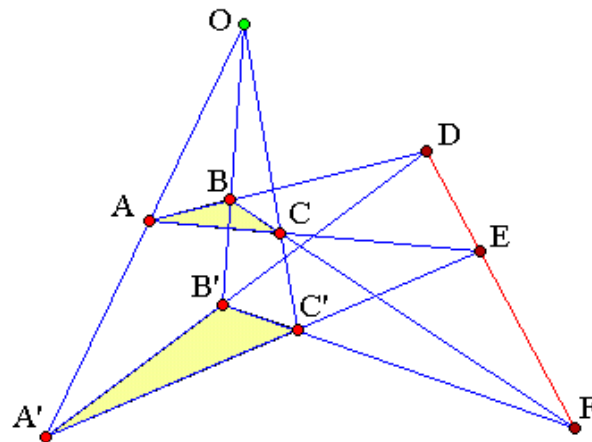
Úloha 9.8. V projektivní rovině na přímce $p : x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ najděte bod polárně sdružený s bodem $(1, 5, 1)$ vzhledem ke kuželosečce

$$k : -7x_1^2 + 6x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 + 14x_1x_3 - 6x_2x_3 = 0.$$

Úloha 9.9 (Desarguesova věta). V projektivní reálné rovině $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mějme šest různých bodů A, B, C, A', B', C' přičemž $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ se protínají v jednom bodě. Dokažte, že pakbody

$$D := \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \quad E := \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}, \quad F := \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$$

leží na přímce.



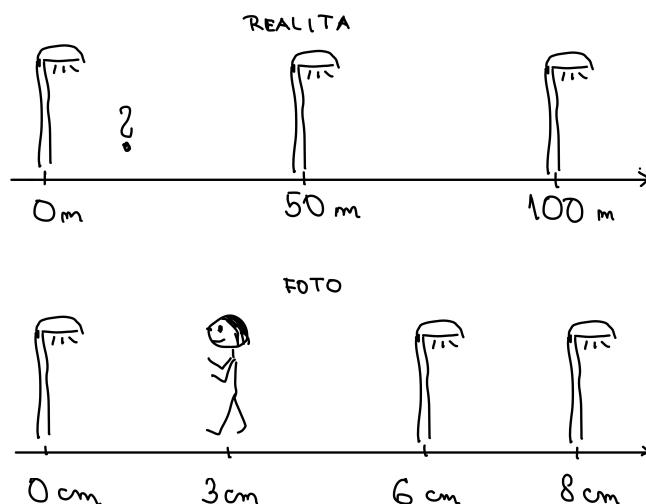
Přiměřeně si lámejte hlavu nad tím, že pokud tento obrázek interpretujeme jako zobrazení prostorové situace, kdy máme dva (žluté) řezy jehlanu rovinami, pak přímka DEF je průsečnicí těchto rovin a kolinearita bodů D, E, F je zřejmá.

10 Projektivní rozšíření afinního prostoru

Úloha 10.1. (Z) V $\mathbb{R}^2$ jsou dány body $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ a přímka p parametrizací $p(t) = \begin{pmatrix} -5 \\ -11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Nalezněte nevlastní body přímek $\overleftrightarrow{AB}$ a p a určete průsečík těchto přímek.

Úloha 10.2. (Z) V $\mathbb{R}^2$ jsou dány body $A = (1, 3)^T$, $B = (-1, 7)^T$. Nalezněte na úsečce AB bod X tak, aby pro dělicí poměr platilo $\frac{AX}{XB} = \frac{1}{4}$. Nalezněte nevlastní bod přímky $\overleftrightarrow{AB}$ a označte si ho Y . Vypočítejte dvojpoměr (A, B, X, Y) .

Úloha 10.3. (Z) Na fotografii (kterou považujeme za projektivně zobrazenou realitu) rovné ulice vidíme tři pouliční lampy a jednoho chodce. Víme, že rozestup lamp v realitě je rovnoměrný, a to 50 metrů. Na fotografii je vzdálenost prvních dvou lamp 6 centimetrů a vzdálenost druhé a třetí lampy 2 centimetry. Chodec je na fotografii přesně uprostřed mezi první a druhou lampou. Jak je od první lampy vzdálen v realitě?



Úloha 10.4. Nalezněte projektivní transformaci projektivně rozšířené afinní přímky $\mathbb{R}$, která zobrazuje $0 \rightarrow 0$, $1 \rightarrow 1$ a $\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2}$. Ukažte, že zúžené na $[0, 1]$ je toto zobrazení diffeomorfismem tohoto intervalu na sebe a je ho možné využít k řešení úlohy 3.1, bod 3.

Úloha 10.5. Nalezněte projektivní transformaci projektivně rozšířené afinní roviny, která body čtverce $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zobrazuje

a) po řadě na body rovnoběžníku $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) po řadě na body čtyřúhelníku $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Ukažte, že v prvním případě se jedná o afinitu a v druhém případě nikoliv.

11 Kuželosečky a kvadriky

Úloha 11.1. (Z) V $\mathbb{R}^2$ určete afinní typ kuželosečky $x^2 - 2xy + 4x - 6y + y^2 + 7 = 0$ a nelezněte tečnu jejím bodě $(1, 2)^T$.

Úloha 11.2. (Z) Určete poláru bodu $(2, 2)^T$ a pól přímky $x - y - 2 = 0$ vzhledem ke kuželosečce $x^2 + y^2 - 3xy + 1 = 0$. Dále určete směr sdružený se směrem $\mathbf{v} = (1, 2)$.

Úloha 11.3. (Z) V $\mathbb{R}^2$ určete tečny kuželosečky $x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y - 3 = 0$ rovnoběžné s přímkou $3x + 3y - 7 = 0$ včetně bodů dotyku.

Úloha 11.4. Určete osy kuželosečky

a) $k_1 : 5x^2 + 24xy + 75y^2 - 36x + 6y + 1 = 0$;

b) $k_2 : 7x^2 + 26xy + 7y^2 + 42x = 0$.

Úloha 11.5. (Z) Je dána afinní kuželosečka $\tilde{Q}$ s rovnicí

$$11x^2 + 4xy + 14y^2 - 4x - 28y - 16 = 0.$$

a) Ukažte, že $\tilde{Q}$ je regulární kuželosečka.

b) Určete její afinní typ.

c) Určete tečny k $\tilde{Q}$ z bodu $(-1, -1)$.

d) Nalezněte její střed a asymptoty $\tilde{Q}$, jestliže existují.

e) Nalezněte její osy a vrcholy

Úloha 11.6. Určete, pro které hodnoty $p \in \mathbb{R}$ je kuželosečka $x^2 + 2pxy + y^2 + 2y - 3 = 0$ parabolou. V těchto případech určete její osu a vrchol.

Úloha 11.7. Určete střed kuželosečky $Q : x^2 + y^2 - 4xy + 1 = 0$ a označte si jej S . Vyjádřete kuželosečku $F(Q)$, její střed a bod $F(S)$, kde

a) F je projektivní zobrazení dané v homogenních souřadnicích maticí $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) F je afinní zobrazení dané v homogenních souřadnicích maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Úloha 11.8. Určete afinní typ následujících kvadrik:

a) $2x^2 + 2y^2 - 5z^2 + 2xy - 2x - 2y - 4z + 2 = 0$;

b) $7x^2 + 6y^2 + 5z^2 - 4xy - 4yz - 6x - 24y + 18z + 30 = 0$;

c) $2x^2 + 2xy + y^2 - 2z^2 - 2z - 1 = 0$;

Hint: postačí určit signaturu matice kvadriky a její podmatice odpovídající průniku s nevlastní rovinou.

12 Möbiova grupa - !! předběžná verze !!

Úloha 12.1. V kruhové inverzi podle jednotkové kružnice (střed v počátku) určete obraz

- a) bodu $[2, 3]$,
- b) přímky $x + y - 3 = 0$
- c) kružnice se středem $[2, 3]$ a poloměrem 2.

Řešte konstrukčně i početně.

Výsledky.

- a) $[\frac{2}{13}, \frac{3}{13}]$
- b) kružnice se středem $[\frac{1}{6}, \frac{1}{6}]$ a poloměrem $\frac{\sqrt{2}}{6}$
- c) kružnice se středem $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}]$ a poloměrem $\frac{2}{9}$.

Úloha 12.2. Rozhodněte, zda body $0, -4, -2i, -1 - 3i$ leží na jedné kružnici v komplexní rovině.

Úloha 12.3. V Möbiově transformaci $f(z) = \frac{z+i}{z+1}$ zobrazte osy x a y a ukažte, že jejich obrazy jsou na sebe kolmé.

Výsledky, návody a řešení

1.1 Zapište zobrazení maticově jako $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ a rozhodněte, zda $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$. Pro samodružné body je třeba řešit soustavu $\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Samodružné směry jsou vlastní podprostory matice $\mathbf{A}$. Samodružná přímka nemusí být tvořena samodružnými body, ale její směr samodružný být musí. Její libovolný bod najdeme tak, že jej zobrazení posune o vektor, který je v samodružném směru zobrazení. Inverz a skládání viz vzorečky v seznamu vět z přednášky.

- a) otočení se středem v bodě $[-\frac{3}{2}, -2]$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{11}{5}$, $y' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + \frac{2}{5}$
- b) Zobrazení lze chápat jako složení osové souměrnosti podle přímky procházející počátkem a posunutí ve směru na ni kolmém (je třeba početně ověřit). Je to tedy osová souměrnost podle přímky neprocházející počátkem. Samodružná přímka $-5x + y + 52 = 0$ je osou symetrie, samodružné jsou i všechny kolmice na ni, samodružné směry jsou generovány vektory $(1, 5)$, $(5, -1)$, inverzní zobrazení je $x' = -\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y + 20$, $y' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - 4$.
- c) není shodné, protože matice není ortogonální.
- d) otočení, samodružný bod $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}]$, žádné samodružné směry, inverzní zobrazení $x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y + \frac{\sqrt{2}}{2}$
- e) středová souměrnost, samodružný bod $[\frac{1}{2}, 1]$, všechny směry samodružné s vlastním číslem -1 , inverzní zobrazení $x' = -x + 1$, $y' = -y + 2$.
- f) Jde o složení osové souměrnosti podle osy x a posunutí ve směru, který na ni není kolmý (dokonce přímo ve směru osy), je to tedy posunutá osová souměrnost. Žádný samodružný bod není, samodružné směry jsou generovány vektory $(1, 0)$, $(0, 1)$, samodružnou přímkou je x -ová souřadná osa (i když žádný její bod samodružný není). Inverzní zobrazení je $x' = x + 3$, $y' = -y$.

1.2 Přímkou v parametrickém tvaru lze zobrazit přímým dosazením (jakoby po bodech). Pro křivku zadanou implicitní rovnicí je třeba vyjádřit z výrazu $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$ předpis pro $\mathbf{X} = (x, y)^T$ a tedy využít inverzní zobrazení (promyslete).

- a) $[-\frac{1}{5}, -\frac{27}{5}]$,
- b) $[\frac{12}{5}, -\frac{11}{5}] + t(11, 2)$,
- c) $7x' - y' - 24 = 0$,
- d) $9x'^2 - 24x'y' + 16y'^2 - 86x' + 73y' + 111 = 0$.

1.3 Složte posunutí do počátku, otočení o α kolem počátku a posunutí zpět do bodu $[1, 3]$.
 $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha - \cos \alpha + 3 \sin \alpha + 1$, $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha - \sin \alpha - 3 \cos \alpha + 3$.

1.4 Pro řešení této a následující úlohy se hodí vzorec pro osovou souměrnost podle přímky s obecnou rovnicí $ax + by + c = 0$:

$$\mathbf{X}' = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \frac{-2c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Ten se dá odvodit z podmínky, že normálový vektor přímky je vlastním vektorem matice s vlastním číslem -1 a směrový vektor s vlastním číslem $+1$, tedy matice splňuje rovnost

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Tato rovnost také souvisí se změnou báze: definujeme-li bázi $\mathcal{B} = ((a, b)^T, (-b, a)^T)$, pak jistě platí $[A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Po vyřešení maticové rovnice se pak dá vzít libovolný bod $\mathbf{X}_0$ ležící na přímce, a z podmínky $\mathbf{X}_0 = \mathbf{A}\mathbf{X}_0 + \mathbf{p}$ dopočíst $\mathbf{p}$.

Složením dvou takto získaných nepřímých shodností vznikne přímá shodnost, osy jsou různoběžné, půjde tedy o otočení. Výsledkem je $x' = \frac{1}{13}(-12x - 5y + 15)$, $y' = \frac{1}{13}(5x - 12y - 55)$.

1.5 Opět půjde o přímou shodnost, osy jsou rovnoběžné, půjde tedy o posunutí. $x' = x + \frac{16}{13}$, $y' = y + \frac{24}{13}$.

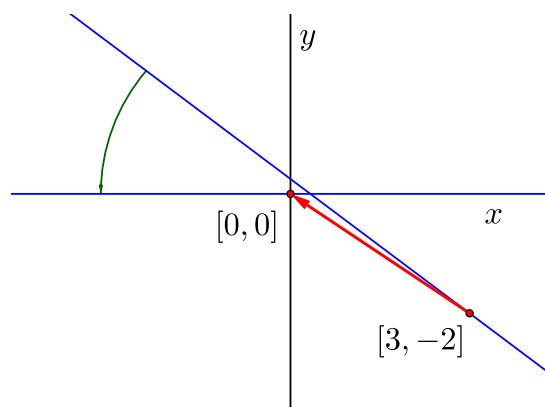
1.6 Úlohu můžeme řešit přímočaře tak, že rozlišíme dva případy, totiž když je shodnost přímá nebo nepřímá. V obou případech víme jak vypadá obecně matice $\mathbf{A}$ a příslušné posunutí $\mathbf{p}$ dopočítáme tak, aby $f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}'$.

Také lze využít grupy všech zobrazení, která mají počátek $[0, 0]$ jako samodružný bod, a tedy mají nulové posunutí, označme si tutu grupu jako G_0 . Jestliže f je posunutí o vektor $(-2, -5)$ a f' je posunutí o vektor $(-6, 3)$, pak řešením úlohy jsou právě zobrazení tvaru $f' \circ g \circ f$, kde $g \in G_0$ (dokažte).

$$\text{Přímé shodnosti: } \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \sin \alpha - 2 \cos \alpha - 6 \\ -2 \sin \alpha - 5 \cos \alpha + 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{nepřímé shodnosti: } \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \sin \alpha - 2 \cos \alpha - 6 \\ -2 \sin \alpha + 5 \cos \alpha + 3 \end{pmatrix}.$$

1.7 Použijeme analogický přístup jako v druhé části příkladu 1.6. Najdeme shodnost f , která zobrazí bod $[3, -2]$ na bod $[0, 0]$ a přímku ze zadání na přímku $y = 0$. Následně vyřešíme úlohu pro přímku $x = 0$ a samodružný bod $[0, 0]$. Nakonec vše vrátíme zpět inverzním zobrazením. Složením těchto tří zobrazení dostaneme chtěné shodnosti.



Obrázek 1: Zobrazení přímky a bodu na osu x a počátek

Hledáme složení otočení a posunutí, které zobrazí zadanou přímku na přímku $y = 0$. Takové otočení zobrazí normálový vektor $(4, -3)$ zadané přímky na vektor $(0, 5)$. Otočení má tudíž příslušnou matici

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Původní posunutí přímky mělo vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Otočení musíme na tento vektor také aplikovat, a dostaneme výsledné afinní zobrazení f :

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{18}{5} \end{pmatrix}.$$

Dopočítáme nyní inverzní zobrazení f^{-1} invertováním tohoto. To jde provést snadno díky typům skládaných zobrazení, ale raději obecně připomínáme, že pokud $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{p}$, pak $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}' - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}$. Dostaneme:

$$f^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Shodnosti g , které mají samodružnou osu x a bod $[0, 0]$, mají ortonormální matice a nulový vektor $\mathbf{p}$. Navíc první sloupec musí být vektor $(1, 0)$ nebo $(-1, 0)$. Takovým zobrazením odpovídají pouze 4 matice (tvořící grupu):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Složením zobrazení v pořadí $f^{-1} \circ g \circ f$ pak dostaneme hledané shodnosti:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{6}{25} \\ \frac{8}{25} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{7}{25} & \frac{24}{25} \\ \frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{144}{25} \\ -\frac{108}{25} \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

1.8 Aby f byla shodnost, musí platit $\|X - Y\| = \|f(X) - f(Y)\|$. Vyřešte rovnice pro p, q .

Jedna z možností je určit p, q ze vzdáleností vybraných bodů. Druhou možností je i s parametry zobrazení ve tvaru $\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Sestavíme soustavu rovnic a vyjde nám, že

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{2-p}{2} & \frac{4-p}{2} \\ \frac{p+q}{2} & \frac{2p+q-4}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-4+3p}{2} \\ \frac{8-3p-3q}{2} \end{pmatrix}$$

První řádek matice má normu 1 pro $p = 2$ nebo $p = 4$. Norma prvního sloupce pak bude 0 pro $q = 0$ resp. $q = -4$. Pouze první volba dává ortogonální matici, zobrazení pak je

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

To je posunutá osová souměrnost s osou $-x + y = 0$ a posunutím o vektor $(1, 1)$.

1.9 Grupa D_8 , identita, otočení se středem v bodě $[1, 0]$ o $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, osové symetrie s osami $y = 0, x - 1 = 0, -x + y + 1 = 0$ a $x + y - 1 = 0$.

$$\text{otočení o } \frac{\pi}{2}: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{otočení o } \pi: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{otočení o } \frac{3\pi}{2}: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{osová souměrnost s osou } y = 0: \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\text{osová souměrnost s osou o } x - 1 = 0: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{osová souměrnost s osou o } -x + y + 1 = 0: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{osová souměrnost s osou o } x + y - 1 = 0: \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.10 První vrchol pětiúhelníku dostaneme jako samodružný bod zobrazení složeného z pěti středových souměrností se středy S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 . Druhý vrchol získáme jako obraz prvního ve středové symetrii se středem S_1 atd.

Také je možné zapsat středy jako $S_1 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, $S_2 = \frac{1}{2}(A_2 + A_3)$ atd. a vyřešit příslušnou soustavu rovnic, tj. $A_1 = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5$ atd. Vyjde $A_1 = [1, -3]$, $A_2 = [5, -1]$, $A_3 = [7, 1]$, $A_4 = [-1, 3]$, $A_5 = [-3, -1]$.

1.11 Stačí uvažovat přímou shodnost tvaru $X' = AX + p$. Zobraďte kuželosečku pomocí tohoto zobrazení. Výsledná kuželosečka má koeficient 0 u smíšeného členu xy a navíc ji toto zobrazení může posunout tak, aby procházela počátkem, a tedy měla nulový i absolutní člen.

Zobrazení

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

převeďte rovnici na tvar $-y' - x'^2 = 0$. Je to tedy parabola, která vznikne z paraboly $y = -x^2$ otočením se středem v počátku o $\arctan(\frac{4}{3})$.

1.12 Složením tří (lichého počtu) osových souměrností vznikne vždy nepřímá shodnost. Nepřímé shodnosti jsou buď samy osové souměrnosti nebo posunuté osové souměrnosti.

Posunutá osová souměrnost je nepřímá shodnost, musí být tedy složena z jedné nebo tří osových souměrností a jedna to jistě není, protože nemá samodružné body.

2.1 Roznásobení podle definice:

$$q_1 q_2 = (2 + \mathbf{i} - 3\mathbf{k})(1 + 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) = 2 + 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 10\mathbf{k} + \mathbf{i} + 4\mathbf{i}^2 + 2\mathbf{ij} - 5\mathbf{ik} - 3\mathbf{k} - 12\mathbf{ki} - 6\mathbf{kj} + 15\mathbf{k}^2 = \\ = 2 + 9\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 13\mathbf{k} - 4 + 2\mathbf{k} + 5\mathbf{j} - 12\mathbf{j} + 6\mathbf{i} - 15 = -17 + 15\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

Výpočet geometricky pomocí formule se skalárním a vektorovým součinem

$$q_1 q_2 = (s_1 s_2 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1).$$

Nejprve si rozdělíme q_1 a q_2 na skalární a vektorovou část a vypočítáme skalární a vektorový součin vektorů $\mathbf{v}_1$ a $\mathbf{v}_2$.

$$q_1 = (2, (1, 0, -3)), q_2 = (1, (4, 2, -5)), \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 19, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = (6, -7, 2)$$

Poté dosadíme do formule.

$$q_1 q_2 = (2 \cdot 1 - 19, (6, -7, 2) + 2 \cdot (4, 2, -5) + 1 \cdot (1, 0, -3)) = (-17, (15, -3, -11)) = -17 + 15\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 11\mathbf{k}$$

2.2 Pomocí Rodriguesovy formule:

ϕ je úhel otočení, r je vektor, který otáčíme, a $n = \frac{1}{3}(1, 2, 2)$ je osa rotace (normovaná), tzn. $r' = (1 - \cos \frac{2\pi}{3})((0, 0, 1) \cdot (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}))(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) + \cos \frac{2\pi}{3}(0, 0, 1) + \sin \frac{2\pi}{3}((\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \times (0, 0, 1))$

Otočený vektor je $r' = \frac{1}{6} (2 + 2\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}, 1)$.

Pomocí kvaternionů:

Dosazením do Věty 1.17, kde α je polovina úhlu otočení, tzn. $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $q = (\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3} (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}))$. Zápis q pomocí kvaternionů a vyčíslení goniometrických funkcí vypadá následovně: $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{k}$. Obdobně provedeme zápis r vektoru, který otáčíme pomocí kvaternionů, $r = \mathbf{k}$.

$$R_q(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{k}\right) \mathbf{k} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} - \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{j} - \frac{2\sqrt{3}}{6}\mathbf{k}\right) = \frac{2+2\sqrt{3}}{6}\mathbf{i} + \frac{4-\sqrt{3}}{6}\mathbf{j} + \frac{1}{6}\mathbf{k}$$

Z toho vyplývá, že souřadnice otočeného vektoru jsou $\frac{1}{6} (2 + 2\sqrt{3}, 4 - \sqrt{3}, 1)$.

2.3 Každá středová souměrnost v prostoru musí mít matici $\mathbf{A} = -I_3$, její determinant je roven -1 a bude se tedy jednat o nepřímou shodnost. Posunutí $\mathbf{p}$ dopočítáme tak, aby zadaný střed byl samodružným bodem.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2.4 V prvním způsobu řešení této úlohy nejprve snadno nalezneme rovnici $x + y + z - 2 = 0$ roviny souměrnosti. Dále vedeme obecným bodem $\mathbf{X} = (x_1, y_1, z_1)$ přímkou kolmou na tuto rovinu, která má tvar $\mathbf{X} + t(1, 1, 1)^T$, spočítáme pro jaké t protíná rovinu souměrnosti a dosadíme t dvojnásobné, čímž získáme obraz $\mathbf{X}'$.

Úlohu můžeme řešit také tak, že uvážíme bázi $\mathcal{B} = (n, v_1, v_2)$, kde $n = (1, 1, 1)$ je normálový vektor roviny souměrnosti s vlastním číslem -1 a vektory $v_1 = (0, 1, -1)$, $v_2 = (-1, 0, 1)$ jsou libovolné lineárně nezávislé vektory z této roviny s vlastním číslem 1 .

Pak pro matici zobrazení musí platit, že $[A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vyjádření této matice v kanonické bázi získáme pomocí matic přechodu

$$[A]_{\mathcal{K}}^{\mathcal{K}} = [I_2]_{\mathcal{K}}^{\mathcal{B}} [A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} [I_2]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{K}}.$$

Správné posunutí $\mathbf{p}$ pak určíme tak, aby obrazem $[1, 0, -2]$ byl bod $[3, 2, 0]$. Rovinová souměrnost je tedy nepřímá shodnost s předpisem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

2.5 Úlohu vyřešíme na základě geometrických vlastností osové souměrnosti.

Zadanou přímku označíme o .

Bodem $X = [x, y, z]$, který bude naším vzorem, povedeme přímku p , $p \perp o$

Bude nás zajímat obraz bodu X , který pojmenujeme X' .

Nechť $p \cap o = P$, neboli bod P bude ortogonální projekcí bodu X , $P = A + t_0(1, 2, 3)$.

$$t_0 = \frac{x+2y+3z+2}{14}$$

Z vlastností osové souměrnosti víme, že $X' \in p$, $P = \frac{X+X'}{2}$ tedy $X' = 2P - X$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1+t_0) + x \\ 2(0+2t_0) + y \\ 2(-1+3t_0) + z \end{pmatrix}$$

Po dosazení a upravení získáme :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{7} & \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{4}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

Zadaná shodnost je přímá ($\det(A) = 1$).

2.6 Shodnost je přímá ($\det A = 1$). Směr osy rotace je řešení $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ rovnice $(I - A)u = 0$. Pevné body rotace splňují $(I - A)X = p_\perp$, kde $p_\perp = p - (u \cdot p)u = (-1, 2, 1)$, a jedno partikulární řešení je $X_0 = (0, \frac{1}{2}, 2)$. Samodružná přímka ℓ je tedy $X = X_0 + tu = (t, \frac{1}{2}, 2+t)$, $t \in \mathbb{R}$. Z $\text{tr}(A) = \frac{1}{3}$ plyne $\cos \varphi = \frac{\text{tr}(A)-1}{2} = -\frac{1}{3}$. Výsledná shodnost je šroubový pohyb, tzn. rotace o $\varphi = \arccos(-\frac{1}{3})$ kolem osy ℓ a posun o vektor $p_\parallel = (u \cdot p)u = (2, 0, 2)$ ve směru této osy.

2.7 Takovou rotaci o realizuje s nejmenším možným rotačním úhlem $\pi/2$ pomocí jednotkového kvaternionu $q_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{k}$ a s největším rotačním úhlem π pomocí $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}$. Všechny ostatní takové rotace jsou dány jednotkovými kvaterniony tvaru $q = (\cos \alpha)q_1 + (\sin \alpha)q_2$, které tvoří kružnici na $\mathbb{H}_1 \simeq \mathbb{S}^3$.

3.1

1. Parametrizaci úsečky se zmíněnou vlastností vždy najdeme ve formě

$$A + t(B - A) = (1 - t)A + tB, \quad t \in [0, 1],$$

kde operace provádíme po složkách. Tato parametrizace má výhodu, že $\|\mathbf{c}'(t)\|$ je konstantní a pro volbu $t = 1/2$ dostaneme střed úsečky. Navíc pokud mají body A , B po řadě hmotnost A_m , B_m , volbou $t = \frac{B_m}{A_m + B_m}$ dostaneme těžiště úsečky AB .

Vypočítáme tedy:

$$(1 - t) \cdot (2, 3)^T + t \cdot (-2, -1)^T = (2 - 4t, 3 - 4t)^T, \quad t \in [0, 1].$$

2. Mohli bychom postupovat z definice, ale jednodušší je využít předchozího příkladu. Již umíme najít parametrizaci, kde $A = \mathbf{c}(0)$. Taková parametrizace je

$$(2 - 4t, 3 - 4t)^T, \quad t \in [0, 1].$$

Také máme zařízeno, že $\|\mathbf{c}'(t)\|$ je konstantní. Potřebujeme však dále, aby $\|\mathbf{c}'(t) = 1\|$. Délka úsečky AB je $4\sqrt{2}$, proto náš parametr musí proběhnout interval stejné délky. Prozatím probíhá interval délky 1, tudíž stačí dosadit $t = \frac{u}{4\sqrt{2}}$, $u \in [0, 4\sqrt{2}]$ a dostaneme

$$(2 - \frac{s}{\sqrt{2}}, 3 - \frac{s}{\sqrt{2}})^T, \quad s \in [0, 4\sqrt{2}]$$

Tento výsledek následně přeparametrizujeme (posunutím) pro splnění podmínky $A = \mathbf{c}(5)$. dosazením $u = s - 5$ $s \in [5, 5 + 4\sqrt{2}]$. Tak získáme výsledek

$$(2 - \frac{s-5}{\sqrt{2}}, 3 - \frac{s-5}{\sqrt{2}})^T, \quad s \in [5, 5 + 4\sqrt{2}]$$

3. Ve výsledné parametrizaci jistě nebude $\|\mathbf{c}'(t)\|$ konstantní. Požadovaných vlastností dosáhneme reparametrizací $t = \Phi(s)$, přičemž $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$ a $\Phi(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}$. Můžeme ji hledat například ve tvaru $t = as^2 + bs + c$, kde dostaneme $c = 0$, $b = \frac{7}{4}$, $a = -\frac{3}{4}$.

Výsledná parametrizace pak bude mít tvar :

$$(3s^2 - 7s + 2, 3s^2 - 7s + 3)^T, \quad s \in [0, 1].$$

4. Jednoduché řešení najdeme v parametrizaci z bodu 1 nahrazením $t := t^3$. Tedy $(2 - 4t^3, 3 - 4t^3)^T$, $t \in [0, 1]$. Tato parametrizace podmínky splňuje, ale není regulární pro $t = 0$.

Lze však najít i parametrizace, které nejsou regulární v libovolném jiném bodě, či i v nekonečně mnoha jiných bodech. následující parametrizace například není regulární pro $t = \frac{1}{2}$:

$$\left(2 - 16t \cdot (t - \frac{1}{2})^2; 3 - 16t \cdot (t - \frac{1}{2})^2\right)^T, \quad t \in [0, 1].$$

O parametrizaci přímky se jedná, neboť obě souřadnice mají mezi sebou vždy konstantní rozdíl pro libovolnou hodnotu parametru. Derivací snadno ověříme, že parametrizace není regulární pro $t = \frac{1}{2}$ a dosazením $t = 0$ a $t = 1$ pak zjistíme, že opravdu dostaneme krajní body úsečky AB .

3.2 Například $\mathbf{c}(t) = (a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$, $\kappa_z(t) = \frac{-\sqrt{2}}{4a\sqrt{1 - \cos t}}$, křivka není regulární pro $t = 2k\pi$.

3.3 K výpočtům budeme potřebovat $c'(t) = (1, 3t^2) \Rightarrow c'(1) = (1, 3)$, $c''(t) = (0, 6t) \Rightarrow c''(1) = (0, 6)$.

Znaménková křivost v bodě $t = 1$: $\kappa_z(1) = \frac{\det(c'(1)|c''(1))}{||c'(1)||^3} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}{\sqrt{1+3^2}^3} = \frac{3}{5\sqrt{10}}$

Tečný vektor v bodě $t = 1$: $t(1) = \frac{c'(1)}{||c'(1)||} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)^T$

Orientovaný normálový vektor v bodě $t = 1$: $n_*(1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t(1) = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)^T$

Tečná přímka v bodě $t = 1$: $-3x + y + c = 0 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow -3x + y + 2 = 0$

Normálová přímka v bodě $t = 1$: $x + 3y + c = 0 \Rightarrow c = -4 \Rightarrow x + 3y - 4 = 0$

Oskulační kružnice v bodě $t = 1$: $R(1) = \frac{1}{|\kappa_z(1)|} = \frac{5\sqrt{10}}{3}$, $S(1) = c(1) + \frac{1}{\kappa_z(1)}n_*(1) = (1, 1) + \frac{5\sqrt{10}}{3} \frac{1}{\sqrt{10}}(-3, 1)^T = [-4; \frac{8}{3}]$

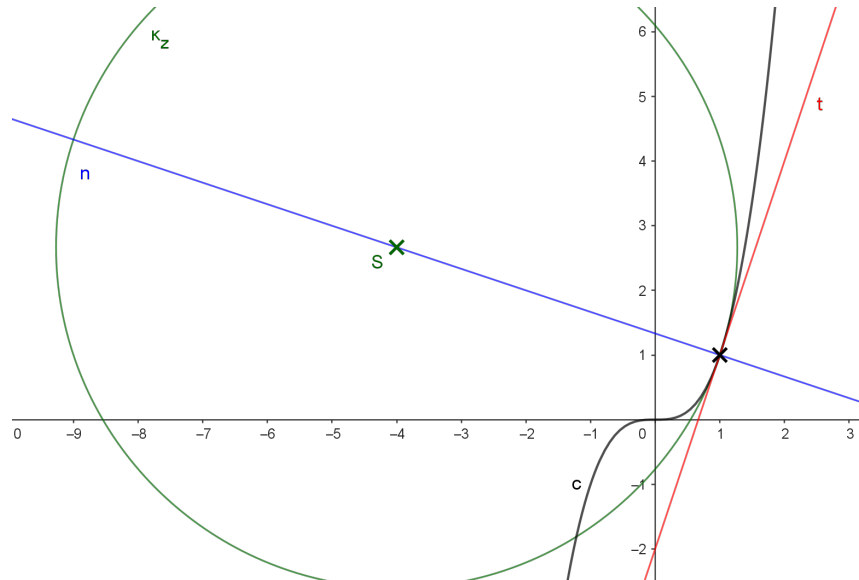
Reparametrizace: $t = \tan s$; $s \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$

$c(s) = (\tan s, \tan^3 s)$

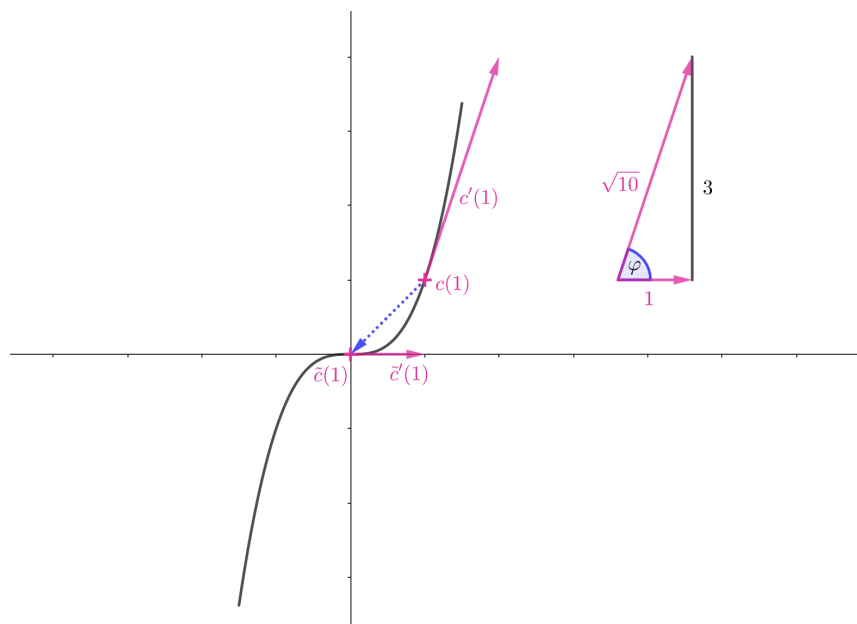
$c'(s) = (\frac{1}{\cos^2 s}, 3\frac{\tan^2 s}{\cos^2 s}) \Rightarrow c'(\frac{\pi}{4}) = (2, 6)$

$c''(s) = (2\frac{\tan s}{\cos^2 s}, 6\frac{\tan s}{\cos^4 s} + 6\frac{\tan^3 s}{\cos^2 s}) \Rightarrow c''(\frac{\pi}{4}) = (4, 36)$

$\kappa_z(\frac{\pi}{4}) = \frac{\det(c'(\frac{\pi}{4})|c''(\frac{\pi}{4}))}{||c'(\frac{\pi}{4})||^3} = \frac{\det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+6^2}^3} = \frac{3}{5\sqrt{10}}$



3.4



Obrázek 2: Křivka zadaná parametrizací $c(t) = (t, t^3)$

Zobrazenou křivku, v dané shodnosti, označme $\tilde{c}(t)$.

$$c'(t) = (1, 3t^2)$$

$$c'(1) = (1, 3) \rightarrow \tilde{c}'(1) = (1, 0)$$

$$c(1) = (1, 1) \rightarrow \tilde{c}(1) = (0, 0)$$

1. způsob:

Víme, že

$$\tilde{c}(t) = Ac(t) + \vec{p} \quad \text{a} \quad \tilde{c}'(t) = Ac'(t)$$

a také, že tvar matice přímé shodnosti A vypadá následovně:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Jedná se o přímou shodnost, tudíž platí, že $AA^T = I_2$ a $\det A = 1$. Dosadíme a vypočítáme koeficienty a, b .

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Z druhé rovnice získáváme prvky matice $A = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, následně z první rovnice vypočteme vektor posunutí $\vec{p}$.

2. způsob: Pomocí složení dvou shodných zobrazení.

Jedná se o složení otočení a posunutí. Z $\triangle$ na obrázku 2 je snadno odvoditelná matice otočení $R_\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Vektor posunutí určíme jako $\tilde{c}(1) - c(1)$, což se rovná $(-1, -1)$.

Nyní už jen stačí složit

otočení: $R_\varphi X$,

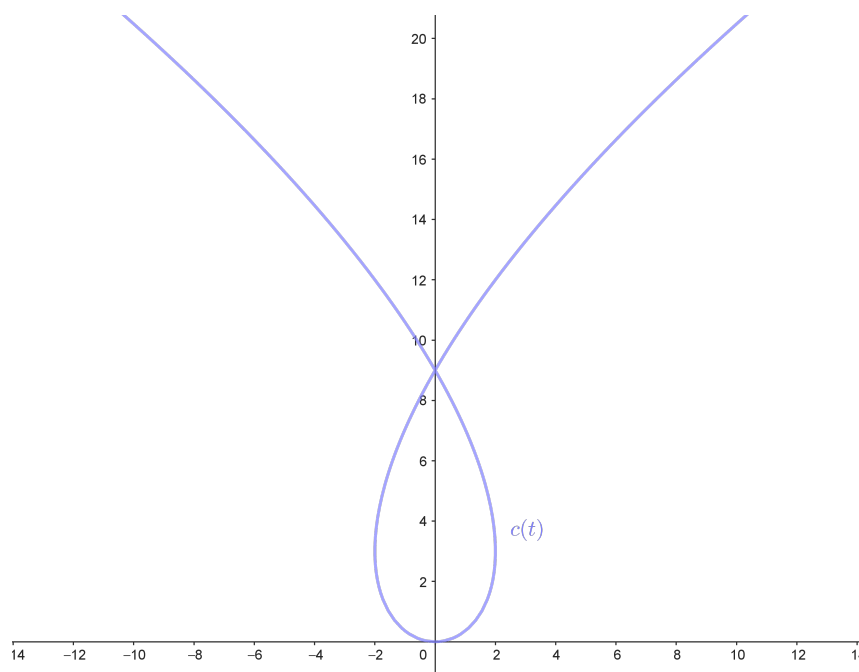
posunutí: $X + \vec{p}$,

což pro náš konkrétní příklad vychází následovně:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Znaménkovou křivost ověříme pomocí znalosti $\tilde{c}'(t) = Ac'(t)$ a $\tilde{c}''(t) = Ac''(t)$, které pak dosadíme do předpisu pro $t = 1$: $\kappa_z(1) = \frac{\det(c'(1)|c''(1))}{\|c'(1)\|^3}$. Opět získáváme, že $\kappa_z(1) = \frac{3}{5\sqrt{10}}$.

3.5



Obrázek 3: Křivka zadaná parametrizací $c(t) = (t^3 - 3t, 3t^2)$

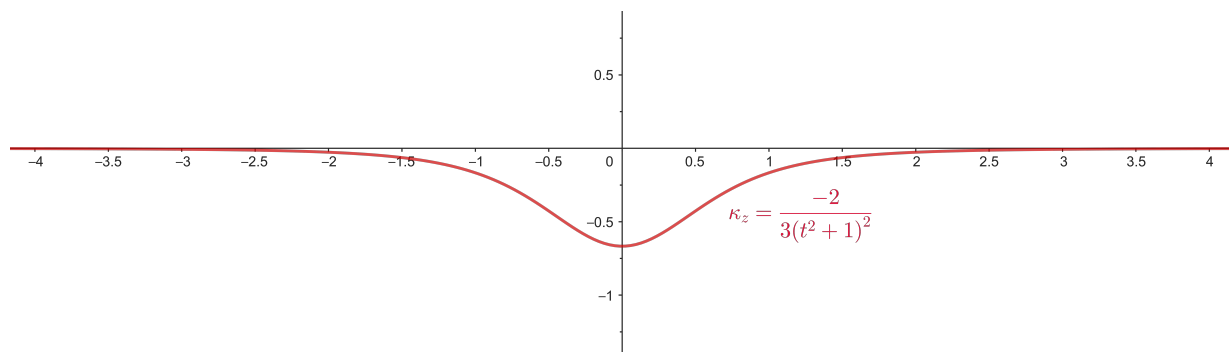
Pro výpočet znaménkové křivosti $\kappa_z(t) = \frac{\det(c'(t)|c''(t))}{\|c'(t)\|^3}$ nejprve vypočteme $c'(t) = (3t^2 - 3, 6t)$,

$c''(t) = (6t, 6)$ a $\|c'(t)\| = \sqrt{(3t^2 - 3)^2 + 36t^2} = \sqrt{9t^4 - 18t^2 + 9 + 36t^2} = 3\sqrt{(t^2 + 1)^2} = 3(t^2 + 1)$.

Následně vypočítáme determinant: $\det(c'(t)|c''(t)) = \begin{vmatrix} 3t^2 - 3 & 6t \\ 6t & 6 \end{vmatrix} = 18(t^2 - 1) - 36t^2 =$

$$-18t^2 - 18 = -18(t^2 + 1)$$

Z toho tedy dostaneme: $\kappa_z(t) = \frac{-18(t^2+1)}{27(t^2+1)^3} = -\frac{2}{3(t^2+1)^2}$.



Obrázek 4: Graf funkce $\kappa_z(t) = -\frac{2}{3(t^2+1)^2}$

Snadno dojdeme k závěru (na obrázku 4 si to můžeme potvrdit), že funkce nabývá minima pro $t = 0$. V tomto bodě chceme sestavit osculační kružnici.

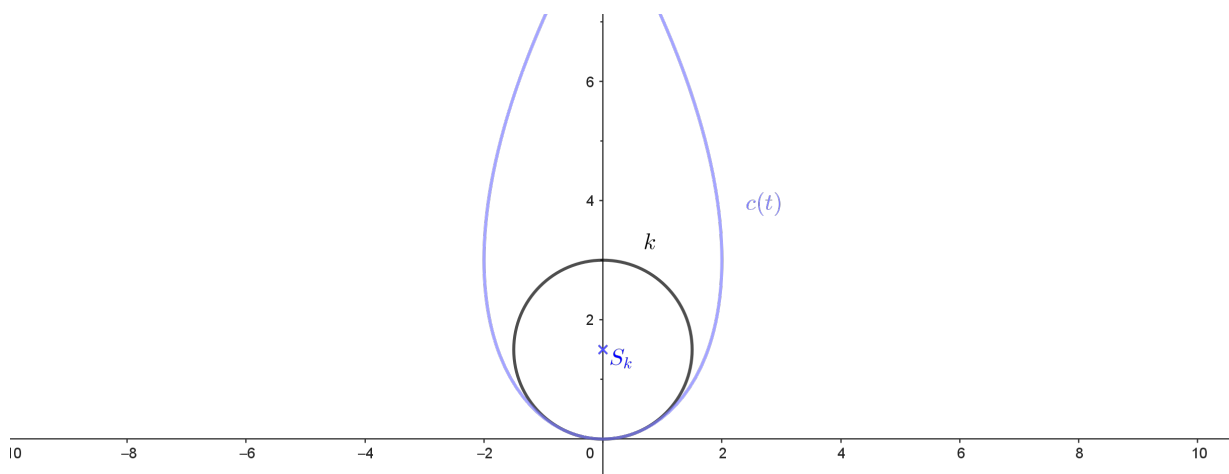
Poloměr osculační kružnice pro $t = 0$ vypočítáme jako: $R(0) = \frac{1}{|\kappa_z(0)|} = \frac{3}{2}$.

Pro výpočet středu osculační kružnice $S(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa_z(t)} \cdot n_*(t)$ musíme nejprve najít jednotkový tečný vektor $t(t)$ a k němu následně orientovaný normálový vektor $n_*(t)$ pro $t = 0$.

$$t(0) = \frac{c'(0)}{\|c'(0)\|} = (-1, 0) \rightarrow n_*(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (0, -1)$$

Z toho dostáváme střed osculační kružnice v bodě 0:

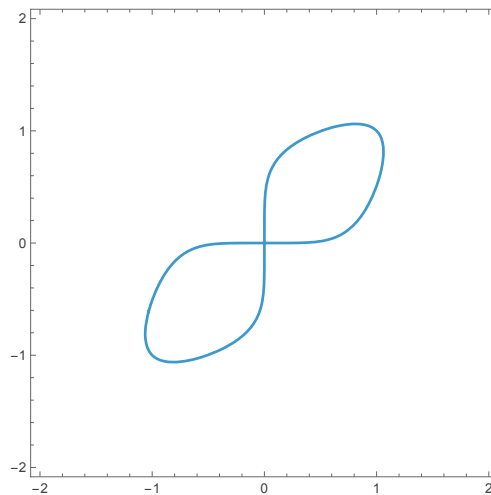
$$S(0) = c(0) + \frac{1}{\kappa_z(0)} \cdot n_*(0) = [0, 0] - (0, -\frac{3}{2}) = [0, \frac{3}{2}]$$



Obrázek 5: Křivka $c(t)$ s osculační kružnicí v bodě $t = 0$

3.6 Maxima křivosti $\frac{3}{4}$ v hlavních vrcholech, minima $\frac{2}{9}$ ve vedlejších.

3.7 Věta o implicitních funkcích a implicitním derivování podle zvolené orientace vyjde $\kappa_z = \pm 4\sqrt{2}$.



4.1 První až třetí derivace křivky $c(t)$:

$$\begin{aligned}c'(t) &= (t^4 + 2t^2 - 2, -2t^3 + 2t^2 + 2t, 4t^2 - 2t), \\c''(t) &= (4t^3 + 2, -6t^2 + 4t + 2, 8t - 2), \\c'''(t) &= (12t^2, -12t + 4, 8).\end{aligned}$$

Pro $t = 1$:

$$\begin{aligned}c'(1) &= (1, 2, 2) \\c''(1) &= (6, 0, 6) \\c'''(1) &= (12, -8, 8).\end{aligned}$$

Nyní přejdeme k výpočtům:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(1) &= \frac{c'(1)}{\|c'(1)\|} = \frac{1}{3}(1, 2, 2) \\ \mathbf{b}(1) &= \frac{c'(1) \times c''(1)}{\|c'(1) \times c''(1)\|} = \frac{1}{3}(2, 1, -2) \\ \mathbf{n}(1) &= \mathbf{b}(1) \times \mathbf{t}(1) = \frac{1}{3}(2, -2, 1) \\ \kappa(1) &= \frac{\|c'(1) \times c''(1)\|}{\|c'(1)\|^3} = \frac{2}{3} \\ \tau(1) &= \frac{\det(c'(1)|c''(1)|c'''(1))}{\|c'(1) \times c''(1)\|^2} = 0\end{aligned}$$

4.2 K výpočtům budeme potřebovat $c'(t) = (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) \Rightarrow c'(0) = (3, 0, 3)$, $c''(t) = (-6t, 6, 6t) \Rightarrow c''(0) = (0, 6, 0)$, $c'''(t) = (-6, 0, 6)$.

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} = \frac{\|(18t^2 - 18, -36t, 18 + 18t^2)\|}{\sqrt{18 + 36t^2 + 18t^4}^3} = \frac{1}{3(t^2 + 1)^2} \\ \tau(t) &= \frac{\det(c'(t)|c''(t)|c'''(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2} = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 - 3t^2 & -6t & -6 \\ 6t & 6 & 0 \\ 3 + 3t^2 & 6t & 6 \end{pmatrix}}{\|(18t^2 - 18, -36t, 18 + 18t^2)\|^2} = \frac{216}{648t^4 + 1296t^2 + 648} = \frac{1}{3(t^2 + 1)^2}\end{aligned}$$

Frenetův repér v bodě $c(0)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(0) &= \frac{c'(0)}{\|c'(0)\|} = \frac{(3, 0, 3)}{\|(3, 0, 3)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \mathbf{n}(0) &= \mathbf{b}(0) \times \mathbf{t}(0) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (0, 1, 0), \\ \mathbf{b}(0) &= \frac{c'(0) \times c''(0)}{\|c'(0) \times c''(0)\|} = \frac{(3, 0, 3) \times (0, 6, 0)}{\|(3, 0, 3) \times (0, 6, 0)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

4.3

Při parametrizaci obloukem budeme postupovat u obou křivek stejně.

a) Vypočítáme $\|c'(t)\|$, $c'(t) = [1, \frac{\sqrt{2}}{t}, -t^{-2}]$, $\|c'(t)\| = \sqrt{1 + (\frac{\sqrt{2}}{t})^2 + (-t^{-2})^2} = \sqrt{\frac{(t^2 + 1)^2}{t^4}} = \frac{t^2 + 1}{t^2} = 1 + t^{-2}$

Zintegrujeme $\|c'(t)\|$.

$s(t) = \int \|c'(t)\| dt = \int 1 + t^{-2} dt = t - \frac{1}{t} + c$ pro $c = 0$ a $t = 1$ je $s = t - \frac{1}{t}$

Vypočítáme inverzní funkci.

$s = t - \frac{1}{t} \Leftrightarrow st = t^2 - 1 \Leftrightarrow t^2 - st - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2}$. Bereme pouze kladnou hodnotu ($t > 0$), kterou dosadíme do původní křivky, čímž získáme parametrizaci obloukem :
 $c(s) = [\frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2}, \sqrt{2} \ln \frac{s + \sqrt{s^2 + 4}}{2}, \frac{2}{s + \sqrt{s^2 + 4}}]$.

b) Vypočítáme $\|c'(t)\|$, $c'(t) = [1 - \cos t, \sin t, \frac{4}{2} \cos \frac{t}{2}]$, $\|c'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2 + (2 \cos \frac{t}{2})^2} = \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{2 - 2 \cos^2 \frac{t}{2} + 2 \sin^2 \frac{t}{2} + 4 \cos^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{4} = 2$

Zintegrujeme $\|c'(t)\|$. $s(t) = \int \|c'(t)\| dt = \int 2 dt = 2t + c$ pro $c = 0$ a $t = 1$ je $s = 2t$

$s = 2t \Leftrightarrow t = \frac{s}{2}$ Inverzní funkci dosadíme do původní rovnice, čímž získáme parametrizaci obloukem : $c(s) = [\frac{s}{2} - \sin \frac{s}{2}, 1 - \cos \frac{s}{2}, 4 \sin \frac{s}{4}]$.

4.4 Vzorce pro křivost a torzi: $\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}$, $\tau(t) = \frac{\det(c'(t)|c''(t)|c'''(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2}$

Nejprve vypočteme jednotlivé derivace a jejich vektorové součiny.

$$c'(t) = (-R \sin t, R \cos t, a), \|c'(t)\| = \sqrt{R^2 + a^2}, c''(t) = (-R \cos t, -R \sin t, 0),$$

$$c'(t) \times c''(t) = (aR \sin t, -aR \cos t, R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t) = (aR \sin t, -aR \cos t, R^2),$$

$$\|c'(t) \times c''(t)\| = \sqrt{a^2 R^2 + R^4} = R \sqrt{a^2 + R^2}.$$

Křivost je tedy: $\kappa(t) = \frac{R \sqrt{a^2 + R^2}}{\sqrt{(a^2 + R^2)^3}} = \frac{R}{a^2 + R^2}$. Dále potřebujeme: $c'''(t) = (R \sin t, -R \cos t, 0)$

$$\text{a } \det(c'(t)|c''(t)|c'''(t)) = \begin{vmatrix} -R \sin t & -R \cos t & R \sin t \\ R \cos t & -R \sin t & -R \cos t \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix} = a(R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t) = aR^2.$$

Z toho tedy výsledná torze: $\tau(t) = \frac{aR^2}{R^2(a^2 + R^2)} = \frac{a}{a^2 + R^2}$. Vidíme, že křivost a torze jsou konstantní, čili nezávisí na t .

Nyní určíme úhel, který svírají tečné vektory s osou z . Díky posunutí tečného vektoru do libovolného bodu osy z (nebo osy z do bodu dotyku) můžeme úhel (označíme ho např. α) snadno vypočítat z pravoúhlého trojúhelníku viz obr. 7. Tedy: $\tan \alpha = \frac{R}{a} \Rightarrow \alpha = \arctan \frac{R}{a}$. Pro parametrizaci obloukem potřebujeme vypočítat integrál:

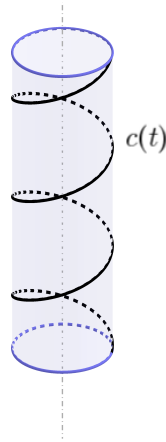
$$s(t) = \int_0^t \|c'(t)\| du = \int_0^t \sqrt{R^2 + a^2} du = t \sqrt{R^2 + a^2}, \text{ což je naše hledaná reparametrizace.}$$

Můžeme ověřit dosazením do $c(t)$: $s(t) = t \sqrt{R^2 + a^2} \rightarrow t(s) = \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}$

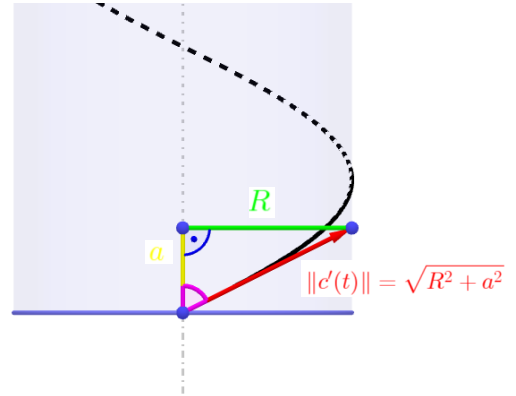
$$\rightarrow d(s) = (R \cos(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}), R \sin(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}), a \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}})$$

$$\Rightarrow d'(s) = (-\frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \sin(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}), \frac{R}{\sqrt{R^2 + a^2}} \cos(\frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}), \frac{a}{\sqrt{R^2 + a^2}})$$

$$\text{Následně vypočítáme } \|d'(s)\| = \frac{\sqrt{R^2(\sin^2 \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}} + \cos^2 \frac{s}{\sqrt{R^2 + a^2}}) + a^2}}{\sqrt{R^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{R^2 + a^2}}{\sqrt{R^2 + a^2}} = 1, \text{ což jsme chtěli.}$$



Obrázek 6: Šroubovice $c(t)$



Obrázek 7: Úhel mezi tečným vektorem a osou z

4.5 Spočtete rovnici oskulační roviny křivky:

$$\mathbf{c}(t) = [\cos^3 t, \sin^3 t, \cos(2t)], \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Oskulační rovina je rovina, ve které se nachází tečný a normálový vektor, resp. vektor druhé derivace. Tyto snadno spočítáme,

$$\mathbf{c}'(t) = [-3 \cos^2 t \cdot \sin t, 3 \sin^2 t \cdot \cos t, -2 \sin(2t)],$$

$$\mathbf{c}''(t) = [6 \sin^2(t) \cos(t) - 3 \cos^3(t), 6 \sin(t) \cos^2(t) - 3 \sin^3(t), -4 \cos(2t)].$$

Parametrický tvar rovnice roviny v závislosti na parametru nyní snadno získáme ve tvaru

$$[x, y, z] = \mathbf{c}(t) + \alpha \cdot \mathbf{c}'(t) + \beta \cdot \mathbf{c}''(t), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Parametrický tvar rovnice můžeme považovat za soustavu tří rovnic o pěti neznámých, kde eliminací α, β dostaneme obecnou rovnici roviny. Drobnou úpravou potom řešíme

$$\begin{pmatrix} -3 \cos^2 t \cdot \sin t & 6 \sin^2(t) \cos(t) - 3 \cos^3(t) \\ 3 \sin^2 t \cdot \cos t & 6 \sin(t) \cos^2(t) - 3 \sin^3(t) \\ -2 \sin(2t) & -4 \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \cos^3 t \\ y - \sin^3 t \\ z - \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Postupně upravujeme. V prvních dvou řádcích si všimneme vzorců pro $\sin(2t)$ a $\cos(2t)$. Řádky vynásobíme čtyřmi, aby se nám následně dobře používal třetí řádek

$$\begin{pmatrix} -6 \cos t \cdot \sin(2t) & 12 \cos(t)(2 \sin^2(t) - \cos^2(t)) \\ 6 \sin t \cdot \sin(2t) & 12 \sin(t)(2 \cos^2(t) - \sin^2(t)) \\ -2 \sin(2t) & -4 \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 4 \cos^3 t \\ 4y - 4 \sin^3 t \\ z - \cos(2t) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -6 \cos t \cdot \sin(2t) & 12 \cos(t)(\sin^2(t) - \cos(2t)) \\ 6 \sin t \cdot \sin(2t) & 12 \sin(t)(\cos(2t) + \cos^2(t)) \\ -2 \sin(2t) & -4 \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 4 \cos^3 t \\ 4y - 4 \sin^3 t \\ z - \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Poslední řádek vynásobíme $3 \cos(t)$ resp. $3 \sin(t)$ a odečteme resp. přičteme jej k prvnímu a druhému řádku.

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 \cos(t)(\sin^2(t) - \cos(2t)) + 12 \cos(t) \cos(2t) \\ 0 & 12 \sin(t)(\cos(2t) + \cos^2(t)) - 12 \sin(t) \cos(2t) \\ -2 \sin(2t) & -4 \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4x - 4 \cos^3 t + (-3z + 3 \cos(2t)) \cos(t) \\ 4y - 4 \sin^3 t + (3z - 3 \cos(2t)) \sin(t) \\ z - \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Druhý sloupec levé matice se hezky upraví po vytknutí $12 \cos(t)$ resp. $12 \sin(t)$. Pro přehlednost dále odstraníme poslední řádek a první sloupec levé matice - již je nebudeme potřebovat - a dostaneme

$$\begin{pmatrix} 12 \cos(t) \sin^2(t) \\ 12 \sin(t) \cos^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 4 \cos^3 t + (-3z + 3 \cos(2t)) \cos t \\ 4y - 4 \sin^3 t + (3z - 3 \cos(2t)) \sin t \end{pmatrix}.$$

Vynásobením řádků $\sin(t)$ resp. $\cos(t)$ a odečtením druhého od prvního nám zůstane jediná rovnice

$$0 = \cos t(4x - 4 \cos^3 t + (-3z + 3 \cos(2t)) \cos t) - \sin t(4y - 4 \sin^3 t + (3z - 3 \cos(2t)) \sin t),$$

kteřou roznásobením, přeuspořádáním a vytknutím $\cos(2t)$ upravíme na

$$0 = 4(\cos t)x - 4(\sin t)y - 3z - 4(\cos^4 t - \sin^4 t) + 3 \cos(2t)(\cos^2 t + \sin^2 t).$$

Vzpomeneme že $(\cos^4 t - \sin^4 t) = (\cos^2 t - \sin^2 t)(\cos^2 t + \sin^2 t)$ a získáme

$$0 = 4(\cos t)x - 4(\sin t)y - 3z - 4 \cos(2t) + 3 \cos(2t).$$

Obecná rovnice oskulační roviny v závislosti na parametru je tedy

$$4(\cos t)x - 4(\sin t)y - 3z - \cos 2t = 0.$$

Alternativně je možné obecnou rovnici oskulační roviny získat i jako

$$(\mathbf{c}'(t) \times \mathbf{c}''(t)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{c}(t)) = 0$$

První závorka zaručuje, že normálový vektor roviny je násobkem binormálového vektoru $\mathbf{b}(t)$ křivky v daném bodě, druhá závorka je nulová právě pro $\mathbf{x} = \mathbf{c}(t)$.

4.6 Leží v rovině $x - 3y + 3z = 5$.

4.7

6.1 Délku křivky spočítáme jako $\int_c 1 ds = \int_0^{2\pi} 1 \cdot \|c'(t)\| dt$. Derivace křivky:

$$c'(t) = (1 - \cos t, \sin t, -2 \sin t)$$

Norma derivace:

$$\begin{aligned} \|c'(t)\| &= \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t + 4 \sin^2 \frac{t}{2}} = \sqrt{2 - 2 \cos t + 4 \sin^2 \frac{t}{2}} = \\ &= \sqrt{8 \sin^2 \frac{t}{2}} = 2\sqrt{2} \left| \sin \frac{t}{2} \right| \end{aligned}$$

Jelikož $t \in (0, 2\pi)$, funkce $\left| \sin \frac{t}{2} \right|$ je na tomto intervalu kladná a absolutní hodnotu nemusíme psát. Délka křivky je tedy:

$$\int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \sin \frac{t}{2} dt = \left| \frac{u=\frac{t}{2}}{2du=dt} \right| = 4\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin u du = \left[4\sqrt{2}(-\cos u) \right]_0^{\pi} = 4\sqrt{2}(-(-1) - (-1)) = 8\sqrt{2}$$

6.2 Délku křivky spočítáme jako $\int_c 1 ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \|c'(t)\| dt$, stejně jako v příkladu 6.1
 $c'(t) = (-3a \sin t \cos^2 t, 3a \cos t \sin^2 t)$

$$\|c'(t)\| = \sqrt{9a^2 \sin^2 t \cos^4 t + 9a^2 \cos^2 t \sin^4 t} = 3|a| |\sin t| |\cos t| \cdot \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}$$

Funkce $\sin t, \cos t$ jsou opět pro $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ kladné, nepíšeme absolutní hodnotu. Délka křivky je

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|a| \sin t \cos t dt = \left| \frac{z=\sin t}{dz=\cos t dt} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3|a| z dz = \left[\frac{3a \sin^2 t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3|a|}{2}$$

6.3 Křivkový integrál 1. druhu definujeme jako $\int_c f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(c(t)) \|c'(t)\| dt$. Nejprve parabolu parametrizujeme $c(t) = (t, t^2)$; $t \in (-1, 1)$. K výpočtu budeme ještě potřebovat $c'(t) = (1, 2t)$.

$$\int_c |x| ds = \int_{-1}^1 |t| \sqrt{1 + 4t^2} dt = 2 \cdot \int_0^1 t \sqrt{1 + 4t^2} dt = 2 \cdot \left[\frac{1}{12} (1 + 4t^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}$$

6.4 Pro body na $c(t)$ platí

$$x = a(t - \sin t) \quad \text{a} \quad y = a(1 - \cos t),$$

takže

$$dx = (a - a \cos t)dt \quad \text{a} \quad dy = a \sin(t)dt,$$

proto po dosazení počítáme

$$\int_{\mathbf{c}} (a - y)dx + xdy = \int_0^{2\pi} (a - a(1 - \cos t))(a - a \cos t) + a(t - \sin t)a \sin(t)dt.$$

Úpravami pak postupně dostáváme

$$\int_0^{2\pi} a^2 \cos t - a^2 \cos^2 t + a^2 t \sin t - a^2 \sin^2(t)dt = a^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos t + t \sin t - 1dt.$$

Integrál nyní dopočítáme. Díky periodě $\cos t$ je

$$\int_0^{2\pi} \cos(t)dt = 0,$$

pomocí per partes snadno zjistíme, že

$$\int t \sin(t)dt = \sin t - t \cos t, \quad \text{a tedy} \quad \int_0^{2\pi} t \sin(t)dt = -2\pi.$$

Nakonec pak

$$\int_0^{2\pi} -1dt = -2\pi.$$

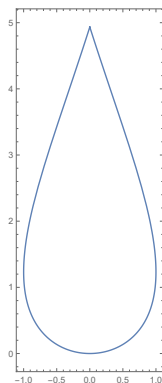
Dostáváme tudíž výsledek

$$\int_{\mathbf{c}} (a - y)dx + xdy = -4\pi a^2.$$

6.5 Stačí dosadit do předpisu pro obsah plochy $\int_{\alpha}^{\beta} c_x(t)c'_y(t)dt$, kde $\alpha = -\pi, \beta = \pi, c_x(t) = \sin t$ a $c_y(t) = \frac{t^2}{2} \Rightarrow c'_y(t) = t$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} c_x(t)c'_y(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin t dt = [-t \cos t]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \cos t dt = [-t \cos t + \sin t]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$$

Využitím per partes (druhé rovná se) získáváme obsah dané plochy, který je roven 2π .



6.6 $-\frac{3\pi}{16}$ parametrizace $\mathbf{c}(t) = [\sin^3 t, \cos^3 t]$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

6.7 $-2\pi ab$

6.8 $\frac{L^3}{3a} + \frac{\pi L^2}{2}$

6.9 $A = \frac{\ell^2}{4n \tan \frac{\pi}{n}}$, blíží se monotonně zdola k $\frac{\ell^2}{4\pi}$.

7.1

(a) Stačí ověřit, zda dvojice $M = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ a dvojice $N = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ tvoří báze vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$, což zjevně platí.

(b) Pro kanonickou soustavu souřadnic:

$$\begin{aligned} K = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow t = 0, s = 2 \\ &\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vzhledem k soustavě souřadnic S :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]_S = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(c) \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(d) 1. způsob řešení - kombinace (b) + (c):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow [\mathbf{A}]_S = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} &= t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \\ &\Rightarrow [\mathbf{A}]_S = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. způsob řešení - věta 3.5:

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_S &= [Id]_M^N [\mathbf{A}]_R + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_S \\ [Id]_M^N : \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow [Id]_M^N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_S &= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_M = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ [\mathbf{A}]_S &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}]_S &= [Id]_M^N [\mathbf{A}]_R + \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_S \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

7.2 Řešení. (a) Přímočaře spočítáme kombinaci

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(b) Ptáme se, zda existují hodnoty x a y , pro které

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = (1 - x - y) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tedy řešíme vektorovou rovnici

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 2 - 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 1 - 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Počítáme soustavu rovnic s maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

jejíž řešení $x = 1$, $y = -3$ jsme spočítali v 7.1(b). Našli jsme afinní kombinaci

$$\mathbf{B} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Posloupnost B obsahuje 3 body. Zbývá proto ověřit, že každý bod afinního prostoru dostaneme (jednoznačně) jako afinní kombinaci bodů posloupnosti B , což je (dle tvrzení z přednášky) ekvivalentní tomu, že je posloupnost vektorů

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

lineárně nezávislá. To zřejmě platí, navíc jsme to ověřili už v 7.1.

Barycentrické souřadnice $(3, 1, -3)^T$ bodu $\mathbf{B}$ jsme určili v úloze (b) a barycentrické souřadnice $(0, 1, 0)^T$ jednoho z bodů $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ barycentrické souřadné soustavy B určíme bez počítání.

(d) Protože bod leží v trojúhelníku určeném body barycentrické souřadné soustavy B , právě když všechny jeho barycentrické souřadnice vzhledem k B leží v intervalu $(0, 1)$, stačí nám tyto souřadnice zjistit. Pro bod $\mathbf{B}$ už je máme určeny v (c), tudíž vidíme, že $\mathbf{B}$ v trojúhelníku neleží.

Nyní podobně jako v (b) vyřešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{5}{2} - 2 \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} - 1 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} \end{array} \right),$$

odkud vidíme, že barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{C}$ jsou $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})^T$, z čehož plyne, že bod $\mathbf{C}$ leží uvnitř trojúhelníku B .

(e) Protože nalezení těžiště není ničím jiným než výpočtem afinní kombinace se všemi koeficienty stejnými, máme

$$t_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

7.3

(a) Afinní přímky p a q zřejmě nejsou rovnoběžné, stačí nám tedy například zjistit, zda existuje řešení rovnice

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

což je ekvivalentní vektorové podmínce, zda $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Snadno spočítáme, že nehomogenní soustava $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 10 \end{array}\right)$ nemá řešení, a proto jsou přímky p a q mimoběžné.

(b) Přímky svírají úhel φ , který je určen směry jejich zaměření $\mathbf{v}_P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{v}_Q = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{v}_P \cdot \mathbf{v}_Q|}{\|\mathbf{v}_P\| \cdot \|\mathbf{v}_Q\|} = \frac{3}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{18}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(c) Nejprve spočítáme vektor kolmý k oběma vektorům $\mathbf{v}_P$ a $\mathbf{v}_Q$ a tím získáme zaměření hledané přímky. Snadno zjistíme (například vyřešením homogenní soustavy s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ tvořenou řádkovými vektory $\mathbf{v}_P^T$ a $\mathbf{v}_Q^T$), že hledaným zaměřením je

podprostor $\text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$. Nyní potřebujeme najít průsečíky hledané kolmé přímky s mimoběžkami p a q , což lze formulovat jako řešení rovnice

$$\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) - \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ta vede na nehomogenní soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

jejímž jediným řešením je $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Všimněme si, že podmínka $z = 1$ říká,

že se jednalo o mimoběžky (zjevně nejsou rovnoběžné a to, že se protínají je ekvivalentní podmínce $z = 0$). Tedy průsečík hledané kolmé příčky s přímkou p je právě bod $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ a průsečík s přímkou q je právě bod $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Hledanou kolmou příčku můžeme zapsat ve tvaru $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \text{LO}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$.

- (d) Výše jsme už našli průsečíky přímek p a q s kolmou příčkou, nejkratší vzdálenost přímek p a q je přitom rovna právě vzdálenosti těchto dvou průsečíků. Navíc z vektorové rovnice v úloze (c) vidíme, že tato vzdálenost je rovna právě velikosti vektoru $z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Tedy vzdálenost přímek p a q je $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{11}$.

7.4

- (a) Barycentrickou soustavu vidíme hned ze zadání, $B_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

Pro D_1 zvolíme jeden z bodů, např.: $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, a zbylé vezmeme jako koncové body vektorů, které mají počáteční bod v námi zvoleném bodě, tzn.:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Vektory jsou LN, tím pádem je můžeme považovat za bázi příslušného prostoru.

Získáváme soustavu souřadnic $S_1 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

Pro D_2 vypadají souřadnice následovně:

$$S_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \wedge \quad B_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Pro D_3 nejprve musíme nalézt jedno řešení nehomogenní soustavy a poté množinu všech řešení homogenní soustavy.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

je řešením nehomogenní soustavy. Báze řešení homogenní soustavy je: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soustavy vypadají následovně:

$$S_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \wedge \quad B_3 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(b) Pro získání parametrického vyjádření vyjdeme ze soustavy souřadnic S z cvičení (a).

$$\text{Či-li } D_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + LO \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \text{ a pro } D_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + LO \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) Lineární obal můžeme brát jako množinu všech řešení homogenních souřadnic, tudíž hledáme matici, která splňuje dané řešení. Pro D_1 :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Námi hledaná matice je $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obecné vyjádření pomocí rovnice je ve tvaru

$Ax = b$, dosazením bodu $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ získáváme pravou stranu. Rovnicové vyjádření D_1

vypadá následovně:

$$D_1 = \left\{ A \in \mathbb{Z}_5^4 \mid \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Pro D_2 postupujeme obdobně, hledáme řešení homogenní soustavy, tentokrát s maticí $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Obdržíme tři vektory, které zapíšeme do řádků matice a následně

dopočítáme pravou stranu dosazením do $Ax = b$ za x bod $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Rovnicový tvar pro

D_2 :

$$D_2 = \left\{ A \in \mathbb{Z}_5^4 \mid \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (d) Pro určení podprostorů jako afinní kombinace bodů využijeme barycentrické soustavy souřadnic, které jsme získali ve cvičení (a). Pro D_2 a D_3 platí, že

$$D_2 = AO\{B_2\} \quad \wedge \quad D_3 = AO\{B_3\}.$$

7.5

$$(b) [\mathbf{B}]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (c) \mathbf{C} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad (d) [\mathbf{B}]_{B'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

- (e) bod $\mathbf{B}$ neleží a bod $\mathbf{C}$ leží ve čtyřstěnu B .

7.6 Nadrovina v $\mathbb{R}^4$ je podle definice libovolný podprostor dimenze 3, což množina řešení splňuje. Rovnoběžnost nastane pouze pro $a = -8$.

7.7

Oba mají dimenzi 2. Rovnicová vyjádření mají tvar

$$D_1 : \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 & 10 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 14 \end{array} \right), \quad D_2 : \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 3 & 4 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 0 & 2 & 61 \end{array} \right), \quad \text{průsečík: } \begin{pmatrix} \frac{19}{2} \\ -\frac{9}{2} \\ \frac{11}{2} \\ -\frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

8.1 Rovnice afinního zobrazení má tvar $f(\mathbf{X}) = A\mathbf{X} + \mathbf{p}$. Nalezení matice A je elementární úloha z lineární algebry (matice zobrazení, když jsou zadány obrazy nějaké báze).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}' = A \cdot \mathbf{M} + \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{M}' - A \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matici A a vektor $\mathbf{p}$ jsme našli. Řešení můžeme zapsat:

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

případně:

$$\begin{aligned} x' &= x - 4y + 1 \\ y' &= -2x + 3 \end{aligned}$$

Podrobnější elementární řešení: Pokud $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, pak:

$$A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}' \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a + 2b = -7 \\ c + 2d = -2 \end{matrix}$$

$$A \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}' \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ c = -2 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 2b = -8 \Rightarrow b = -4; d = 0 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}' = A \cdot \mathbf{M} + \mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{M}' - A \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

8.2 Nalezení matice zobrazení f je možno udělat podobně jako v úloze 8.1, protože rozdílové vektory vzorů se musí maticí zobrazit na rozdílové vektory obrazů.

Níže si rozepíšeme podrobnější elementární řešení. Budeme pracovat se zobrazením f :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Nejdříve popíšeme po řadě zadané body jako $\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ a zjistíme, jak zobrazí f rozdílové vektory.

$$\mathbf{W} - \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 2 - (-1) \\ 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ se zobrazí na } \begin{pmatrix} 7 - 6 \\ 12 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\mathbf{W} - \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 0 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ se zobrazí na } \begin{pmatrix} 7 - 4 \\ 12 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Při dosazení do $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ získáme soustavu rovnic.

$$1 = -3a - b$$

$$5 = 3c - d$$

$$3 = a + b$$

$$7 = c + d$$

Po vyřešení soustavy rovnic zjistíme, že

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Pro získání e, f stačí dosadit jen jeden bod a vyjde nám, že

$f : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Je možné příklad řešit dosazením bodů a ne vektorů. Poté ale vznikne šest rovnic s šesti neznámými. Stejným způsobem zjistíme f^{-1} , kde musíme pouze zaměnit vzory a obrazy a výsledkem bude

$$f^{-1} : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -9/2 \end{pmatrix}$$

Vzhledem k tomu, že je matice regulární, jedná se o afinitu.

8.3

1. Určení obrazu bodu a vektoru pomocí afinní kombinace bodů a lineární kombinace vektorů

Protože afinní zobrazení zachovává afinní kombinaci bodů, můžeme obraz bodu najít tímto způsobem. Vyjádříme si bod $\mathbf{X} = (3, 1, -2)^T$ pomocí ostatních bodů. Označíme body $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pak bod $\mathbf{X}$ můžeme zapsat jako:

$$\mathbf{X} = \lambda_1 \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{B} + \lambda_3 \mathbf{C} + \lambda_4 \mathbf{D},$$

navíc ještě

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 1.$$

Můžeme si λ_1 vyjádřit jako $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4$, zbývá tedy vypočítat pouze 3 neznámé.

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{A} + \lambda_2(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + \lambda_3(\mathbf{C} - \mathbf{A}) + \lambda_4(\mathbf{D} - \mathbf{A}) \\ \mathbf{X} - \mathbf{A} &= \lambda_2(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + \lambda_3(\mathbf{C} - \mathbf{A}) + \lambda_4(\mathbf{D} - \mathbf{A}) \\ (1, 0, -1)^T &= \lambda_2(-1, -1, 3)^T + \lambda_3(-2, 0, 2)^T + \lambda_4(-1, 0, 2)^T \end{aligned}$$

Z toho dostáváme 3 rovnice o 3 neznámých:

$$\begin{aligned} 1 &= -\lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 \\ 0 &= -\lambda_2 \\ -1 &= 3\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 \end{aligned}$$

Dopočítáme, že $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$, $\lambda_4 = 0$ a nakonec $\lambda_1 = 1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{X}) &= \frac{3}{2}f(\mathbf{A}) - \frac{1}{2}f(\mathbf{C}) \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Obdobně vypočítáme i obraz vektoru $(3, 1, -2)^T$ jako lineární kombinaci vektorů.

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \alpha(\mathbf{B} - \mathbf{A}) + \beta(\mathbf{C} - \mathbf{A}) + \gamma(\mathbf{D} - \mathbf{A}) \\ (3, 1, -2)^T &= \alpha(-1, -1, 3)^T + \beta(-2, 0, 2)^T + \gamma(-1, 0, 2)^T \\ \rightarrow 3 &= -\alpha - 2\beta - \gamma \\ 1 &= -\alpha \\ -2 &= 3\alpha + 2\beta + 2\gamma\end{aligned}$$

Pak $\alpha = -1, \beta = -\frac{5}{2}, \gamma = 3$ a tedy

$$\begin{aligned}f(\mathbf{v}) &= -1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{5}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Určení obrazu bodu a vektoru pomocí sestavení matice zobrazení
Nejprve určíme obrazy tří vektorů pomocí zadaných bodů a jejich obrazů.

$$\begin{aligned}\bar{f}(\mathbf{v}_1) &= \bar{f} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \bar{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \bar{f}(\mathbf{v}_2) &= \bar{f} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \bar{f} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \bar{f}(\mathbf{v}_3) &= \bar{f} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \bar{f} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Hledáme matici A asociovaného homomorfismu $\bar{f}$, která splňuje $AB = C$, kde matice B obsahuje ve sloupcích vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ a matice C má ve sloupcích jejich obrazy. Z toho tedy vidíme, že matici asociovaného homomorfismu A nalezneme jako $A = CB^{-1}$.

$$\begin{aligned}B^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Protože platí $f(\mathbf{X}) = A\mathbf{X} + \mathbf{p}$ a $\bar{f}(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$, matice A je maticí homomorfismu f stejně tak jako maticí asociovaného homomorfismu $\bar{f}$. Dosazením libovolného bodu

získáme vektor posunutí $\mathbf{p}$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + p_1 \\ 3 + p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nakonec vypočítáme obraz bodu $(3, 1, -2)^T$ a vektoru $(3, 1, -2)^T$. Protože je vektor posunutí nulový, hodnoty pro obraz bodu a vektoru se budou shodovat.

$$f((3, 1, -2)^T) = (1, 5)^T$$

$$\bar{f}((3, 1, -2)^T) = (1, 5)^T$$

8.4 Prvně nalezneme matici $\tilde{A}$ asociovaného homomorfismu $\bar{f}$ vzhledem ke kanonické bázi. Označme $\tilde{B}$ matici, ve které se ve sloupcích nacházejí vektory báze B . Pak matici $\tilde{A}$ získáme jako $\tilde{A} = \tilde{B}A\tilde{B}^{-1}$.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 & 37 \\ -56 & 48 \end{pmatrix}$$

Víme, že platí $f(X) = \tilde{A}X + \mathbf{p}$ a $\bar{f}(\mathbf{v}) = \tilde{A}\mathbf{v}$. Tzn. námi vypočtená matice asociovaného homomorfismu $\bar{f}$ je také maticí homomorfismu f . Dosazením $f((1, 2)) = (5, -8)$ snadno dopočítáme vektor $\mathbf{p}$.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 & 37 \\ -56 & 48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ -48 \end{pmatrix}$$

Nyní již stačí určit obraz bodu $(3, 4)$ dosazením do předpisu $f(X) = \tilde{A}X + \mathbf{p}$ za proměnnou X .

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43 & 37 \\ -56 & 48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -26 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Získáváme, že $f((3, 4)) = (-7, -24)$.

8.5 Parametricky: $[2, 2] + s(4, 1)^T$, rovnicově: $x + y = 4$.

8.6

8.7

Vektor $\mathbf{n} = (1, 2)^T$ je normálový vektor zadané přímky a proto $\mathbf{u} = (-2, 1)^T$ je její směrový vektor. Projekce kanonického vektoru $\mathbf{e}_1$ na vektor $\mathbf{u}$ má tedy (užitím vlastností skalárního součinu) tvar

$$\frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{5} \cdot (4, -2)^T$$

Analogicky projekce vektoru $\mathbf{e}_2$ na vektor $\mathbf{u}$ vyjde $\frac{1}{5} \cdot (-2, 1)^T$, proto matice přidruženého homomorfismu afinní projekce bude mít tvar

$$\frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Na přímce leží bod $(-3, 0)^T$, ten tedy musí být v afinní projekci samodružný. Tento bod se příslušnou maticí asociovaného homomorfismu zobrazí do bodu $\frac{1}{5} \cdot (-12, 6)^T$. Vektor posunutí afinní projekce musí tedy mít tvar

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix},$$

dostaneme tedy řešení

$$\pi : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem ověříme, že $\pi \circ \pi = \pi$.

$$\mathbf{8.8} \quad \frac{AT}{TB} = 2, \quad \frac{TA}{AB} = -\frac{2}{3}, \quad \frac{ST}{TB} = \frac{1}{2}, \quad S = \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}T$$

8.9

8.10

Označme a, b, c barycentrické souřadnice bodu $\mathbf{X}$ v afinní bázi $(\mathbf{ABC})$. Pro přehlednost budeme vůči afinní bázi $(\mathbf{ABC})$ značením $\mathbf{Y} = (x, y, z)$ myslet, že bod $\mathbf{Y}$ má barycentrické souřadnice x, y, z až na násobek, tj. že platí

$$\mathbf{Y} = \frac{x}{x+y+z} \cdot \mathbf{A} + \frac{y}{x+y+z} \cdot \mathbf{B} + \frac{z}{x+y+z} \cdot \mathbf{C}.$$

Snadno určíme, že

$$\mathbf{P} = (0, b, c), \quad \mathbf{Q} = (a, 0, c), \quad \mathbf{R} = (a, b, 0),$$

proto

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XP}} = \frac{b+c}{a}, \quad \frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}} = \frac{b}{a}, \quad \frac{\mathbf{AQ}}{\mathbf{QC}} = \frac{c}{a},$$

takže

$$\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XP}} = \frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{\mathbf{AR}}{\mathbf{RB}} + \frac{\mathbf{AQ}}{\mathbf{QC}},$$

což jsme měli dokázat.

9.1

a) Parametrizace $\overleftrightarrow{\mathbf{AB}}$: např. $t_1(1, 2, 3) + t_2(3, 2, 1)$.

Leží-li bod na přímce, pak platí $\overleftrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{A} = 0$. Zároveň musí platit $\overleftrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{A} = 0$, $\overleftrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{B} = 0$, $\overleftrightarrow{\mathbf{AB}} \cdot \mathbf{C} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Můžeme také dvěma body proložit přímku a zjistit, jestli třetí na této přímce leží. Duální souřadnice $\overleftrightarrow{\mathbf{AB}} = (1, -2, 1)^*$.

b) Průnik dvou přímek se počítá stejně jako spojení dvou bodů a to řešením soustavy. Bod $\mathbf{D}$ vypočítáme jako průnik přímek $(1, -2, 1)^*$ a $(1, 2, -5)^*$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

Výsledný bod $\mathbf{D} = (4, 3, 2)$.

Dvojpoměr vypočítáme z definice.

$$c = \alpha_1 \cdot a + \beta_1 \cdot b$$

$$d = \alpha_2 \cdot a + \beta_2 \cdot b$$

$$\text{Tedy } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{4}, \alpha_2 = \frac{1}{4}, \beta_1 = \frac{1}{4}, \beta_2 = \frac{5}{4}.$$

$$\mu = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\alpha_2 \cdot \beta_1} = \frac{1}{5}$$

.

c) Označme $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \mu$

$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{C}) = \mu^{-1}$ z poznámky 4.8.

Stejně tak

$$(\mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \mu^{-1}$$

$$(\mathbf{CBAD}) = 1 - (1 - \mu)^{-1}$$

- d) Označme $\mathbf{E} = (e_1, e_2, e_3)^T$. $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = \frac{\alpha_1 \cdot \beta_2}{\alpha_2 \cdot \beta_1} = -1$. Z předchozí části už víme $\alpha_1 = \beta_2 = \frac{1}{4}$. $\frac{\frac{1}{4} \cdot \beta_2}{\alpha_2 \cdot \frac{1}{4}} = -1$, $\alpha_2 = -\beta_2$

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Tedy } \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \alpha_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{E} = (1, 0, -1)^T.$$

9.2

- a) Přímký i body jsou dány uspořádanými trojicemi čísel ze $\mathbb{Z}_p$ až na násobek, tudíž jich bude stejně. Bodem $(1, 0, 0)^T$ procházejí právě přímky

$$(0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), \dots, (0, 1, p-1), (0, 0, 1),$$

Tudíž celkem $p+1$ přímek. Z dualy projektivního prostoru a nezávislosti $\mathbb{Z}_p^3$ na volbě báze pak každým bodem prochází právě $p+1$ přímek a na každé přímce leží právě $p+1$ bodů. Skrze každý z $p+1$ různých bodů na pevně zvolené přímce pak vede $p+1$ přímek, kde právě jedna je pro všechny body společná. Rychlým použitím principu inkluze a exkluze zjistíme, že je to právě $(p+1)^2 - (p+1) + 1 = p^2 + p + 1$ přímek. Celkem má tedy rovina $p^2 + p + 1$ bodů a stejný počet přímek. Na každé přímce leží $p+1$ bodů a každým bodem prochází $p+1$ přímek.

- b) Všechny podprostory $LO(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ kromě samotného $LO(\mathbf{A})$ jsou generovány vektory tvaru $\mathbf{A} + t\mathbf{B}$, kde $t \in \mathbb{Z}_5$. Celkem tedy získáváme 6 bodů

$$\overleftrightarrow{\mathbf{AB}} = \{(1, 2, 3)^T, (4, 3, 0)^T, (2, 4, 2)^T, (0, 0, 4)^T, (3, 1, 1)^T, (3, 1, 2)^T\}.$$

Průsečík je pak snadným ověřením bod $\mathbf{P} = (0, 0, 4)^T$. Souřadnice bodů jsou homogenní (až na násobek číslem ze $\mathbb{Z}_5$).

- c) Všechny body leží na přímce $\mathbf{AB}$, takže dvojpoměr existuje. Máme postupně

$$\mathbf{P} = 2 \cdot \mathbf{A} + 1 \cdot \mathbf{B}, \quad \mathbf{X} = 1 \cdot \mathbf{A} - 1 \cdot \mathbf{B}$$

takže po dosazení do vzorce pro dvojpoměr dostaneme

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{X}) = \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot (-1)} = -\frac{1}{2} = 2,$$

takže $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}, \mathbf{X}) = 2$

9.3 Hledáme matici transformace: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Zadané body (označme je $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$), jsou reprezentovány homogenně (až na nenulový násobek) a totéž platí i pro jejich předepsané obrazy i pro matici hledaného zobrazení. Tato úloha by přímočarým způsobem vedla na soustavu 6 rovnic o 7 neznámých.

Výpočetně jednodušší je však vzít jiné vektorové zástupce zadaných bodů, aby platilo $\mathbf{A}' + \mathbf{B}' = \mathbf{C}'$, například volme $\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ a stejný vztah musí platit i mezi vhodnými zástupci předepsaných obrazů $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \end{pmatrix}$. Poté postačí nelézt matici A lineárního zobrazení tak, aby $A \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ a zároveň $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$. To je základní úloha z LA a řešením je matice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Zároveň ale můžeme vzít libovolný násobek této matice a proto není důvod ponechávat zlomky a jako řešení použijeme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Nyní nalezneme vzor bodu $F(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. K tomu potřebujeme vypočítat inverzní matici matice A .

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

Chceme vypočítat dvojpoměr $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, potřebujeme tedy nejprve vyjádřit body $\mathbf{C}$

a $\mathbf{D}$ pomocí bodů $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{C} &= \alpha_1 \mathbf{A} + \beta_1 \mathbf{B} \\
 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \alpha_1 + 2\beta_1 = 2 \\
 &3\beta_1 = 1 \\
 &\Rightarrow \alpha_1 = \frac{4}{3}, \beta_1 = \frac{1}{3} \\
 \mathbf{D} &= \alpha_2 \mathbf{A} + \beta_2 \mathbf{B} \\
 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 &\rightarrow \alpha_2 + 2\beta_2 = 1 \\
 &3\beta_2 = 1 \\
 &\Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{3}, \beta_2 = \frac{1}{3} \\
 (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) &= \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Nyní najdeme dvojpoměr bodů po transformaci.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}' &= A\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \mathbf{B}' &= A\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} & \mathbf{C}' &= \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} & \mathbf{D}' &= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{C}' &= \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \alpha'_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta'_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha'_1 = \frac{4}{3}, \beta'_1 = \frac{1}{3} \\
 \mathbf{D}' &= \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha'_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta'_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 18 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha'_2 = \frac{1}{3}, \beta'_2 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Všimneme si, že vyšly stejné koeficienty jako před transformací. Tedy:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) = (\mathbf{A}', \mathbf{B}', \mathbf{C}', \mathbf{D}') = \frac{1}{4}$$

9.4

a) Kvadratickou formu, kterou je kuželosečka reprezentována, zapíšeme pomocí matice:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pomocí Gaussovy eliminace snadno nahlédneme, že se jedná o regulární matici. Společně s podmínkou, že se nejedná o prázdnou množinu (jelikož kuželosečka náleží například bod $(\frac{1+\sqrt{33}}{2}, -1, 1)^T$); z toho vyplývá, že se jedná o regulární kuželosečku.

b) Polára p_X bodu $\mathbf{X}$:

$$(3, 4, 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \implies p_X : \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}^* \quad \vee \quad -3x_1 + x_2 + 6x_3 = 0$$

c) Tečny z bodu $\mathbf{X}$ ke kuželosečce získáme jako přímky procházející bodem $\mathbf{X}$ a vždy jedním z průsečíků poláry a kuželosečky Q .

$p_X \cap Q$:

$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 6x_3 = 0 &\implies x_2 = 3x_1 - 6x_3 \\ 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 - 3x_3^2 = 0 \end{aligned}$$

Po chvíli počítání dojdeme k rovnici o dvou neznámých.

$$-x_1^2 + 4x_1x_3 - 3x_3^2 = 0$$

Volbou $x_3 = 1$ získáváme

$$(x_1 - 1)(x_1 - 3) = 0.$$

Body průniku označme $\mathbf{T}, \mathbf{U}$. Z poslední rovnice vidíme, že $x_1 = 1, \tilde{x}_1 = 3$. Dopočítáním souřadnice x_2 z první rovnice získáváme souřadnice bodů $\mathbf{T}, \mathbf{U}$.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bod X nenáleží kuželosečce Q tudíž existují dvě různé tečny, označme $t_1 \Leftrightarrow \mathbf{TX}, t_2 \Leftrightarrow \mathbf{UX}$. Pomocí řešení soustavy nalezneme souřadnice daných tečen.

$$t_1 \Leftrightarrow \mathbf{TX} : \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 13 & -2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -\frac{7}{13} \\ \frac{2}{13} \\ 1 \end{pmatrix}^* \sim \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 13 \end{pmatrix}^*$$

V rovnicovém tvaru $t_1 : -7x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 0$.

$$t_2 \Leftrightarrow \mathbf{UX} : \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}^* \sim \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}^*$$

V rovnicovém tvaru $t_2 : -x_1 + 3x_3 = 0$.

d) • Bod $\mathbf{X} \in r$:

Zapišme r ve tvaru rovnice. Pokud bod $\mathbf{X}$ náleží dané přímce, bude rovnost splněna.

$$x_1 + x_2 - 7x_3 = 0, \text{ dosadíme bod } \mathbf{X} = (3, 4, 1)^T,$$

$$3 + 4 - 7 = 0.$$

- Průnik $\mathbf{Y}$ přímky r a poláry p_X ($\mathbf{Y} = r \cap p_X$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 4 & -15 \end{pmatrix}$$

Volbou za $x_3 = 1$ obdržíme průsečík přímek p_X a r :

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \frac{13}{4} \\ \frac{15}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 13 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

- Nyní vypočítáme průnik přímky r a kuželosečky Q (opět pomocí dvou rovnic, následnou volbu provedeme pro $x_2 = 1$).

$$x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \implies x_1 = 7x_3 - x_2$$

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3 - 3x_3^2 = 0$$

Po úpravách, volbě za $x_2 = 1$ a dopočítání jednotlivých souřadnic dosáhneme bodů průniku, které dle zadání označme $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{22}{27} \\ 1 \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 22 \\ 27 \\ 7 \end{pmatrix}$$

- e) Z definice ověříme, že body $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ tvoří harmonickou čtveřici. Pro jednoduchost vyjádření zvolme body $\mathbf{Y}, \mathbf{B}$, které vyjádříme pomocí ostatních bodů $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$. Z tohoto důvodu se z $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ stává dvojpoměr $(\mathbf{B}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{X})$. Pro tuto konkrétní permutaci bodů platí $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1 - (\mathbf{B}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{X})$. Zapišme tedy body $\mathbf{Y}, \mathbf{B}$ jako lineární kombinaci bodů $\mathbf{X}, \mathbf{A}$.

$$\mathbf{Y} = 3 \cdot \mathbf{X} + 1 \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{B} = 6 \cdot \mathbf{X} + 1 \cdot \mathbf{A}$$

Z toho vyplývá dvojpoměr

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1 - (\mathbf{B}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{X}) = 1 - \frac{6 \cdot 1}{3 \cdot 1} = 1 - 2 = -1,$$

hodnota dvojpoměru je rovna -1 , čili body $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ tvoří harmonickou čtveřici.

9.5

Výsledky. Jedná se o regulární přímkovou kvadriku. Tečná rovina má rovnici $x_2 - 2x_4 = 0$ a tedy duální souřadnice $(0, 1, 0, -2)^*$. Průnik je sjednocení dvou přímek, které je možno homogenně parametrizovat například jako

$$p_1 : t_1(3, -2, 2, -1) + t_2(-3, 2, 1, 1)$$

$$p_2 : t_1(3, -2, 2, -1) + t_2(1, 2, 2, 1)$$

9.6

Výsledky. Zobrazení je v homogenních souřadnicích dáno maticí

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(a jejím libovolným násobkem).

9.7

Výsledky. Matice kvadratické formy

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

má signaturu $(2, 1, 0)$. Rovnice tečny je $5x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$, její duální souřadnice tedy jsou $(5, 1, -5)^*$. Projektivních transformací je více, například ta daná maticí

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Musí platit $P^T \cdot B \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

11.1

Výsledky. $(62, 91, -51)$

9.9

10.1 Nevlastní bod přímky je její směrový vektor.

$$\mathbf{B} - \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s_p = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Po převedení do homogenních souřadnic: $P_{AB}^\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $P_p^\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Pro výpočet průsečíku si nejdříve přímky vypočítáme jako spojnice dvou projektivních bodů.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow s_{AB} = (1, -1, 1)^*$$

$$\begin{pmatrix} -5 & -11 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s_p = (2, 1, 21)^*$$

Nakonec protneme tyto dvě spojnice v průsečíku P

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 21 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} -22 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ nebo } P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -22 \\ -19 \\ 3 \end{pmatrix}$$

10.2 $\frac{\mathbf{AX}}{\mathbf{XB}} = \frac{1}{4}$ Tedy $\frac{1-x_1}{x_1+1} = \frac{1}{4}$ a $\frac{3-x_2}{x_2-7} = \frac{1}{4}$ Z čehož získáme $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = \frac{19}{5}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{19}{5} \end{pmatrix} = \frac{4}{5}\mathbf{A} + \frac{1}{5}\mathbf{B}$$

Nevlastní bod přímky $\mathbf{AB}$ je roven jejímu směrovému vektoru a jeho třetí souřadnicí x_3 bude 0. Úsečka leží na přímce $2x + y - 5 = 0$. Směrový vektor úsečky je tedy $(1, -2)$.

$$\mathbf{Y} = (1, -2, 0)^T$$

K vypočítání dvojpoměru potřebujeme α_1 , α_2 , β_1 , β_2 .

α_1 , β_1 už máme vypočtené z první části, kde jsme hledali jejich kombinaci pro vypočítání bodu $\mathbf{X}$.

$\mathbf{X} = \alpha_2 \cdot \mathbf{A} + \beta_2 \cdot \mathbf{B}$. Z čehož zjistíme, že $\alpha_2 = \frac{1}{2}$, $\beta_2 = -\frac{1}{2}$

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \frac{\alpha_2 \cdot \beta_1}{\alpha_1 \cdot \beta_2} = \frac{1/2 \cdot 1/5}{1/5 \cdot -1/2} = -\frac{1}{4}$$

10.3 Úlohu můžeme řešit třemi způsoby - pomocí dvojpoměru nebo pomocí projektivního zobrazení fotografie do reality. Na obrázku si lampy v realitě označíme po řadě zleva A, C, D a pozici, kde stojí chodec B . Obdobně, tedy po řadě zleva do prava, označíme i lampy na fotografii A', C', D' a chodce na fotografii B' . Vzdálenost chodce od první lampy v realitě označíme x .

1. způsob řešení:

$$\begin{aligned}
 (A, B, C, D) &= (A', B', C', D') \\
 \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA} &= \frac{A'C'}{C'B'} \cdot \frac{B'D'}{D'A'} \\
 \frac{50}{50-x} \cdot \frac{100-x}{100} &= \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{8} \\
 \frac{100-x}{100-2x} &= \frac{5}{4} \\
 400-4x &= 500-10x \\
 x &= \frac{100}{6} = \frac{50}{3} \approx 16,67.
 \end{aligned}$$

2. způsob řešení: Pomocí matice transformace jako v úloze 9.3, kde $F(1, 0)^T = (1, 0)^T$, $F(1, 6)^T = (1, 50)^T$ a $F(1, 8)^T = (1, 100)^T$.

3. způsob řešení: Projektivní zobrazení na přímce lze psát jako $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$. Víme, že $f(0) = 0$, $f(6) = 50$ a $f(8) = 100$.

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \frac{b}{d} \Rightarrow b = 0 \\
 f(6) &= \frac{6a}{6c+d} = 50 \Rightarrow a = 50c + \frac{25}{3}d \\
 f(8) &= \frac{8a}{8c+d} = 100 \Rightarrow a = 100c + \frac{25}{2}d \\
 50c + \frac{25}{3}d &= 100c + \frac{25}{2}d \Rightarrow d = -12c \Rightarrow a = -50c
 \end{aligned}$$

Za c zvolíme 1, takže $f(t) = \frac{-50t}{t-12}$.

$$f(3) = \frac{-50 \cdot 3}{3-12} = \frac{-150}{-9} = \frac{50}{3} \approx 16,67$$

10.4

Výsledky. $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, kořen jmenovatele je mimo $[0, 1]$, funkce je na tomto intervalu hladká a rostoucí.

11.1 Na kuželosečku zadanou rovnicí

$$x^2 - 2xy + 4x - 6y + y^2 + 7 = 0$$

aplikujeme homogenizaci. Po homogenizaci obdržíme kuželosečku, kterou zapíšeme pomocí její matice.

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + x_2^2 + 7x_3^2 = 0$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

Gaussovou eliminací snadno nahlédneme, že se jedná o regulární matici, a že se také nejedná o prázdnou množinu (náleží ji např. bod $(1, 2, 1)^T$ ze zadání).

Pro zjištění afinního typu kuželosečky stačí zjistit počet reálných nevlastních bodů. Čili řešíme případ průniku přímky a kuželosečky. Nevlastní přímka je zadána souřadnicemi $(0, 0, 1)^{*T}$ nebo rovnicí $z = 0$. Dosazením do rovnice kuželosečky $z = 0$ obdržíme

$$(x - 1)^2 = 0.$$

Z tohoto je zřejmé, že zadaná kuželosečka má právě jeden (dvojnásobný) průsečík s nevlastní přímkou (bod $(1, 1, 0)^T$), z čehož vyplývá, že se jedná o parabolu.

Tečnu v bodě $(1, 2, 1)^T$:

Dosazením souřadnic bodu do rovnice kuželosečky vyplývá, že daný bod je bodem kuželosečky. Pro nalezení tečny v tomto bodě využijeme předpis $\mathbf{X}^T K \mathbf{Y} = 0$, kde K je maticí kuželosečky a bod $\mathbf{Y}$ je bodem, ve kterém hledáme tečnu.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}^* \implies x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$

V kartézských souřadnicích je tečna dána rovnicí $x - 2y + 3 = 0$.

11.2 Sestavíme matici kuželosečky:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Polára bodu $(2, 2)^T$:

Bod převedeme do homogenních souřadnic: $\mathbf{P} = (2, 2, 1)^T$

→ polára bodu je daná vztahem $\mathbf{m}_P : (K\mathbf{P})^T (x_1, x_2, x_3)^T = 0$

$$KP = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{m}_P : x + y - 1 = 0$$

2. Pól přímky $x - y - 2 = 0$:

Koeficienty přímky: $\mathbf{k} = (1, -1, -2)^T$

⇒ pól přímky je bod: $\mathbf{X} = A^{-1}\mathbf{k}$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ pól v afinních souřadnicích: $(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})^T$

3. Směr sdružený k $\mathbf{v} = (1, 2)^T$:

Směru $\mathbf{v}$ odpovídá nevlastní bod $\mathbf{V} = (1, 2, 0)^T$

→ jeho polára je daná rovnicí $(K\mathbf{V})^T(x_1, x_2, x_3)^T = 0$

$$K\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ polára: $-2x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \rightarrow y = 4x \Rightarrow$ tato přímka prochází nevlastním bodem $(1, 4, 0)^T$

$\Rightarrow$ směr $(1, 4)^T$ je sdružený se směrem $(1, 2)^T$

sdružený směr $(1, 4)$.

11.3 Na kuželosečku i na přímku aplikujeme homogenizaci. Kuželosečka následně přejde ve tvar:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3 - 3x_3^2 = 0,$$

zapsáno maticí jako

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix}}_M$$

a přímka ve tvar:

$$3x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 0.$$

Pro nalezení tečen rovnoběžných s danou přímkou je třeba nejprve nalézt nevlastní bod dané přímky. Ten vypočítáme jako průnik nevlastní přímky ($x_3 = 0$) se zadanou přímkou. Dosazením $x_3 = 0$ do rovnice přímky obdržíme rovnici o dvou neznámých

$$3x_1 + 3x_2 = 0.$$

Tuto rovnici splňuje například bod $(1, -1, 0)^T$ označme si ho jako $\mathbf{N}$. K bodu $\mathbf{N}$ nyní dohledáme poláru pomocí vztahu $\mathbf{N}^T K \mathbf{X} = 0$.

$$(1, -1, 0) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^* \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}^* \implies x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Body dotyku (označme $\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}}$) námi hledaných tečen jsou body průniku právě vypočítané poláry a kuželosečky. Z rovnice poláry si můžeme snadno vyjádřit například neznámou x_1 a následně ji dosadit do rovnice kuželosečky. Ekvivalentně to znamená, že a řešíme rovnici

$$(x_2 + x_3, x_2, x_3)M \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

Po několika úpravách obdržíme jednu homogenní rovnici o dvou neznámých

$$x_2(3x_2 + 8x_3) = 0$$

Tato rovnice je splněna pro $x_2 = 0$ nebo $x_2 = -\frac{8}{3}x_3$. Z tohoto již snadno nahlédneme, že body dotyku budou mít například souřadnice $\mathbf{T} = (-5, -8, 3)^T$ a $\tilde{\mathbf{T}} = (1, 0, 1)^T$.

Tečny získáme jako přímky určené jednotlivými body dotyku $\mathbf{T}, \tilde{\mathbf{T}}$ a bodem $\mathbf{N}$.

Tečna $\leftrightarrow \mathbf{TN}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -5 & -8 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -13 & 3 \end{pmatrix}$$

Tato soustava například určuje souřadnice přímky (tečny) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}^*$, což můžeme v kartéz-

ských souřadnicích zapsat rovnicí $3x + 3y + 13 = 0$ s bodem dotyku $\mathbf{T} = (-\frac{5}{3}, -\frac{8}{3})^T$.

Tečna $\leftrightarrow \tilde{\mathbf{T}}\mathbf{N}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tato soustava například určuje souřadnice přímky (tečny) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}^*$, což můžeme v kartéz-

ských souřadnicích zapsat rovnicí $-x - y + 1 = 0$ s bodem dotyku $\tilde{\mathbf{T}} = (1, 0)^T$.

11.4

a) Maticí zadané kuželosečky je $B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -18 \\ 12 & 75 & 3 \\ -18 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Kolmé sdružené směry nalezneme přímo řešením rovnice $(s, t, 0)B(-t, s, 0)^T = 0$, nebo také jako vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ 12 & 7 \end{pmatrix}$, jedná se o směry $(-6, 1)$ a $(1, 6)$.

Osy určíme jako jejich poláry, případně elementárněji s využitím středu následovně. Osy budou tím pádem ve tvaru $-6x + y + a = 0$ a $x + 6y + b = 0$

Střed můžeme zjistit pomocí řešení $S = \begin{pmatrix} 5 & 12 & -18 \\ 12 & 75 & 3 \\ -18 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Po dosazení středu $S = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ získáme obě osy.

$$o_1 : x + 6y = 0, \quad o_2 : 6x - y - 37 = 0$$

b) Maticí zadané kuželosečky je $B = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 21 \\ 13 & 7 & 0 \\ 21 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Kolmé sdružené směry zjistíme jako v příkladě a) a dostaneme. $(1, -1)$ a $(1, 1)$.
Osy budou tím pádem ve tvaru $x - y + c = 0$ a $x + y + d = 0$

$$\text{Střed zjistíme podobně jako v a) } S = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 21 \\ 13 & 7 & 0 \\ 21 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Po dosazení středu $S = \begin{pmatrix} \frac{49}{40} \\ \frac{91}{40} \end{pmatrix}$ získáme obě osy.

$$o_1 : x + y + \frac{21}{20} \text{ neboli } 20x + 20y + 21 = 0, \quad o_2 : x - y - \frac{7}{2} \text{ neboli } 2x - 2y - 7 = 0.$$

11.5

a) $\tilde{Q}$ má následující matici kuželosečky

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix},$$

stačí ověřit lineární nezávislost řádků a nalézt bod ležící na kuželosečce. (Alternativně můžeme ověřit, že kvadratická forma daná touto maticí je indefinitní.) Řádkovými úpravami snadno přejdeme do tvaru, kde je lineární nezávislost vidět

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -30 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -30 \\ 75 & 0 & -30 \end{pmatrix},$$

Na kuželosečce leží bod $[\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}]$, matice je regulární, a proto je kuželosečka regulární.

b) Rovnici kuželosečky nejprve homogenizujeme na tvar

$$11x_1^2 + 4x_1x_2 + 14x_2^2 - 4x_1x_3 - 28x_2x_3 - 16x_3^2 = 0$$

a následně spočítáme počet průsečíků s nevlastní přímkou. Nevlastní přímka má rovnici $x_3 = 0$, dostáváme tedy dosazením rovnici

$$11x_1^2 + 4x_1x_2 + 14x_2^2 = 0.$$

Položme např. $x_2 = 1$ a počet průsečíků zjistíme výpočtem diskriminantu vzniklé kvadratické rovnice

$$11x_1^2 + 4x_1 + 14 = 0.$$

Alternativně vypočítáme diskriminant kvadratických členů přímo, jedná se o determinant hlavní podmatice 2×2 matice kuželosečky. Dostaneme

$$4^2 - 4 \cdot 11 \cdot 14 = -600,$$

tudíž kuželosečka nemá nevlastní bod a proto se jedná o elipsu.

- c) Vypočítáme nejprve rovnici poláry k elipse $\tilde{Q}$ z bodu $[-1, -1]$. V homogenních souřadnicích počítáme s bodem $(-1, -1, 1)^T$. Tento dosadíme do poloviny bilineární formy a vypočítáme:

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Polára v daném bodě má tedy tvar

$$0 = -11x_1 - 2x_1 - 2x_2 - 14x_2 - 2x_1 + 2x_3 - 14x_2 + 14x_3 - 16x_3 = -15x_1 - 30x_2.$$

Úpravou má rovnice poláry tvar

$$x_1 + 2x_2 = 0$$

Nyní vypočítáme průsečík s kuželosečkou vyřešením soustavy a zjistíme, že body dotyku tečen k $\tilde{Q}$ z bodu $(-1, -1, 1)^T$ jsou $(-8, 4, 5)^T$ a $(4, -2, 5)^T$. Snadno dopočítáme rovnice přímků procházející zadaným bodem a body dotyku, vyjdou rovnice tečen

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \quad x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0.$$

- d) Asymptoty neexistují, protože na kuželosečce neleží žádné nevlastní body. Střed S kuželosečky je pólem nevlastní přímky, která má rovnici $x_3 = 0$. Tento pól tedy získáme vyřešením soustavy

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a vyjdou nám souřadnice středu $\mathbf{S} = (0, 1, 1)^T$.

- e) V bázi, jejíž vektory odpovídají směrům os, je hlavní podmatice 2×2 matice kuželosečky diagonální. Hledáme tedy vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$$

Alternativně bychom mohli hledat polárně sdružené směry, které jsou na sebe kolmé. Tyto směry jsou reprezentovány body na nevlastní přímce s poslední souřadnicí nulovou, mohli bychom tedy řešit rovnici

$$(s, t, 0) \cdot \begin{pmatrix} 11 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & -14 \\ -2 & -14 & -16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

V obou případech vyjdou vektory $(1, 2)^T$ a $(-2, 1)^T$. Společně se znalostí středu snadno dopočítáme, že osy mají rovnice

$$-x - 2y + 2 = 0 \quad a \quad -2x + y - 1 = 0.$$

Nyní vypočítáme průsečíky s elipsou pro nalezení souřadnic vrcholů. Pomocí jejich vzdálenosti můžeme poznat, která osa je hlavní a která vedlejší.

Souřadnice vrcholů vyjdou:

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{15}}{5}, 1 + \frac{\sqrt{15}}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{15}}{5}, 1 - \frac{\sqrt{15}}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{10}}{5}, 1 + \frac{2\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{10}}{5}, 1 - \frac{2\sqrt{10}}{5} \end{pmatrix}$$

První dvojice jsou hlavní vrcholy a druhá dvojice jsou vrcholy vedlejší, odpovídající první a druhé rovnici osy elipsy.

11.6

Výsledky. Pro $p = 1$ má osa směr $(1, -1)$ a vrchol je bod $[-\frac{15}{8}, \frac{11}{8}]$. Pro $p = -1$ má osa směr $(1, 1)$ a vrchol je bod $[\frac{15}{8}, \frac{11}{8}]$.

11.7

Výsledky. $S = [0, 0]$

a) $F(Q) : x^2 - 4xy + 2y^2 - 2y + 1 = 0$, má střed $[-1, -\frac{1}{2}]$, $F(S) = [0, 0]$.

b) $F(Q) : x^2 - 8xy - 14x + 13y^2 + 50y + 47 = 0$, má střed $[3, -1] = F(S)$.

11.8

Výsledky. a) dvojdílný hyperboloid b) elipsoid c) jednodílný hyperboloid