8. cvičení
Náhodné vektory, podmíněné rozdělení

1. Hustota náhodného vektoru $\mathbf{Z} = (X, Y)^\mathsf{T}$ je
$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x\,y, & \text{je-li } x > 0, y > 0, x + y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu c.
   (b) Určete marginální hustotu X a Y. Jsou X a Y nezávislé?
   (c) Určete $\mathsf{P}(X > Y)$.
   (d) Určete $\mathsf{Cov}\,(X, Y)$ a varianční matici $\mathsf{Var}\,(Z)$.
   (e) Určete $\mathsf{E}\left(\frac{1}{XY}\right)$.
   (f) Určete podmíněnou hustotu Y, je-li dáno $X = x$.
   (g) Určete $\mathsf{E}\,(Y \mid X)$ a nakreslete si $\mathsf{E}\,(Y \mid X = x)$ jako funkci x.
   (h) Ověřte, že $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}\,(Y \mid X)\big) = \mathsf{E}\,Y$.
   (i) Určete $\mathsf{Var}\,(Y|X)$.
2. Hustota náhodného vektoru $(X, Y)^\mathsf{T}$ je
$$f(x,y) = \begin{cases} c\,y, & \text{je-li } 1 < x < 2, x > y, y > 0. \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   (a) Určete konstantu c.
   (b) Určete $\mathsf{E}\,(Y \mid X)$ a nakreslete si $\mathsf{E}\,(Y \mid X = x)$ jako funkci x.
   (c) Určete $\mathsf{E}\left(Y X^3\right)$ a $\mathsf{E}\left(Y X^3 \,\middle|\, X\right)$.
3. Hustota náhodného vektoru $\mathbf{Z} = (X, Y)^\mathsf{T}$ je
$$f(x,y) = \begin{cases} c(x - y) & \text{pro } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y \le x, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$
   Určete $\mathsf{Var}\,(\mathbf{Z})$ a $\mathsf{P}(X + Y < 1)$.
4. Nechť má náhodný vektor $(X,\,Y)^\mathsf{T}$ rozdělení s hustotou
$$f(x,\,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\exp\Big(-\dfrac{y}{x}\Big), & 1 \le x \le 2,\ y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$
   Určete $\mathsf{E}\,(Y \mid X)$, $\mathsf{Var}\,(Y \mid X)$ a $\mathsf{Var}\,Y$.
5. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné veličiny s distribuční funkcí $F(x)$. Najděte distribuční funkci veličin
   (a) $X_* = \min_{i=1,\ldots,n}\{X_i\}$.
   (b) $X^* = \max_{i=1,\ldots,n}\{X_i\}$.
   (c) Nechť jsou navíc $X_1, \ldots, X_n$ spojité s hustotou $f(x)$. Najděte hustotu X_* a X^*.
   (d) Nechť hustota X_i je $f(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{I}_{x \in (0,\infty)}$ (exponenciální). Určete střední hodnotu X_*.

Opakování z přednášky

Pro jednoduchost zápisu zde budeme uvažovat pouze dvourozměrný vektor $\mathbf{Z} = (X, Y)^{\mathsf{T}}$. Nechť $f_{XY}(x, y)$ je jeho sdružená hustota. Obecnější znění vět a přesná formulace předpokladů viz přednáška.

Výpočet pravděpodobnosti Pro B borelovskou podmnožinu $\mathbb{R}^2$ platí

$$\mathsf{P}\big(\mathbf{Z} \in B\big) = \mathsf{P}\big((X, Y)^{\mathsf{T}} \in B\big) = \iint_B f_{XY}(x, y)\, dx\, dy,$$

Výpočet střední hodnoty transformace náhodného vektoru Pro libovolnou měřitelnou funkci $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ platí

$$\mathsf{E}\, h(X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) f_{XY}(x, y)\, dx\, dy,$$

pokud integrál na pravé straně existuje.

Podmíněná hustota: Podmíněnou hustotu náhodné veličiny Y pro dané X

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_X(x)},$$

kde $f_X(x)$ je marginální hustota X.

Podmíněná hustota:

$$\mathsf{E}\,(\, Y \mid X = x\,) = \int y\, f_{Y|X}(y|x)\, dy.$$

Vlastnosti podmíněné střední hodnoty: Nechť $h_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jsou měřitelné funkce. Potom platí

1. $\mathsf{E}\,(\, a \mid X\,) = a$ pro libovolné $a \in \mathbb{R}$.
2. $\mathsf{E}\big(\mathsf{E}\,(\, Y \mid X\,)\big) = \mathsf{E}\, Y$.
3. $\mathsf{E}\,(\, a_1\, h_1(X, Y) + a_2 h_2(X, Y) \mid X\,) = a_1\, \mathsf{E}\,(\, h_1(X, Y) \mid X\,) + a_2\, \mathsf{E}\,(\, h_2(X, Y) \mid X\,)$ pro libovolné $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.
4. $\mathsf{E}\,(\, \psi(X) h_1(X, Y) \mid X\,) = \psi(X)\, \mathsf{E}\,(\, h_1(X, Y) \mid X\,)$.

Rozklad nepodmíněného rozptylu:

- $\mathsf{Var}\,(Y) = \mathsf{E}\,\big(\mathsf{Var}\,(\, Y \mid X\,)\big) + \mathsf{Var}\,\big(\mathsf{E}\,(\, Y \mid X\,)\big)$.