

4. cvičení

Diskrétní a spojité náhodné veličiny

1. Vraťme se k příkladu 3 z minulých cvičení. Náhodná veličina X nabývá hodnot s pravděpodobnostmi uvedenými v tabulce. Určete distribuční a kvantilovou funkci této náhodné veličiny.

i	1	2	3	4
$P[X = i]$	0,2	0,3	0,3	0,2

2. V rodině jsou čtyři děti. Určete rozdělení a střední hodnotu náhodné veličiny udávající počet dcer a načrtněte jeho distribuční funkci, víte-li, že pravděpodobnost narození chlapce je $p = 0,52$.
3. Náhodná veličina X má rozdělení dané hustotou

$$f(x) = \begin{cases} ax, & x \in (0, 1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu a , distribuční funkci náhodné veličiny X a střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X .

4. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} c \sin(x), & \text{pro } 0 < x < \pi, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete konstantu c .
- (b) Určete distribuční funkci F_X .
- (c) Spočítejte $P[X \in (\pi/4, \pi/2)]$, $P[X > \pi/6]$, $P[X \in \{\pi/4, \pi/2, \pi/8\}]$.
- (d) Určete kvantilovou funkci F_X^{-1} .
- (e) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X .
5. Náhodná veličina X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} c(1 - |x|), & x \in (-1, 1), \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

- (a) Určete konstantu c .
- (b) Určete distribuční funkci F_X a načrtněte její graf.
- (c) Spočítejte $P[X \in (-3/10, 7/10)]$, $P[X < 2/5]$.
- (d) Určete střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X .
6. Náhodná veličina X má distribuční funkci F_X .

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1 - e^{-x-1}, & x \geq -1, \\ &= 0, & \text{jinak.} \end{aligned}$$

Načrtněte distribuční funkci, určete hustotu f a načrtněte kvantilovou funkci F_X^{-1} .

7. Určete konstantu c tak, aby f byla hustota, a střední hodnotu této náhodné veličiny.
- (a) $f(x) = cx^{-a}$ pro $x > 1$ a $f(x) = 0$ jinak,
- (b) $g(x) = \frac{c}{1 + (x - a)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Pro které konstanty a, c je f (resp. g) hustota? Určete střední hodnotu odpovídající rozdělení s touto hustotou.

8. Dva hráči házejí postupně (pravidelnou šestistěnnou) kostkou. Začíná hráč A, který vyhraje, padne-li mu jednička (a pak již hra končí). Pokud hráči A nepadla jednička, hází hráč B, který vyhraje, pokud mu padne dvojka nebo trojka. Tím končí první kolo. Pokud v prvním kole nevyhrál ani hráč B, začíná se druhé kolo a hází opět hráč A, atd...
- Určete pravděpodobnost, že hráč A vyhraje v k -tém kole.
 - Určete pravděpodobnost, že hráč A vyhraje.
 - Určete pravděpodobnost, že hráč B hodí právě k -krát.
 - Určete střední hodnotu počtu všech hodů.

Opakování z přednášky

Diskrétní rozdělení: Nabývá-li náhodná veličina X s kladnou pravděpodobností **nejvýše spočetně** mnoha (tj. konečně nebo spočetně) hodnot x_1, x_2, \dots , říkáme, že má **diskrétní rozdělení**.

- Rozdělení X je charakterizováno pravděpodobnostmi $p_k = P(X = x_k)$, $k = 1, 2, \dots$ a platí $\sum_k p_k = 1$.
- Distribuční funkce** diskrétní náhodné veličiny

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} p_k, \quad x \in \mathbb{R}$$

je po částech konstantní, skokovitá se skoky o velikosti p_k v bodech x_k .

- Kvantilová funkce** $F_X^{-1}(u) = \inf\{x : F_X(x) \geq u\}$ je skokovitá, neklesající a zleva spojitá.

Spojité rozdělení: Nechť pro náhodnou veličinu X s distribuční funkcí F existuje funkce $f \geq 0$ taková, že

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Pak říkáme, že X má **spojité rozdělení**. Funkce f se nazývá **hustota**.

Vlastnosti:

- Spojité náhodná veličina nabývá **nespočetně mnoha** hodnot z nějakého podintervalu \mathbb{R} .
- Rozdělení** veličiny X je charakterizováno hustotou f . Pro každou $B \in \mathcal{B}$ je pak $P(X \in B) = \int_B f(x) dx$. Speciálně:
 - $1 = P(X \in \mathbb{R}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$,
 - distribuční funkci je spojitá a lze ji spočítat jako $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$,
 - pro libovolné $a \in \mathbb{R}$ je $P(X = a) = \int_{\{a\}} f(t) dt = 0$,
 - je-li $a < b$, pak

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

- Střední hodnota X se spočte jako

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$$

(existuje-li).

Střední hodnota veličiny $Y = h(X)$ se spočte jako $Eh(X) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)f(x) dx$ (existuje-li).

- Kvantilová funkce $F^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě veličiny X je inverzní funkce k distribuční funkci F . Medián veličiny X je taková hodnota \hat{x} , že $P(X \leq \hat{x}) = P(X \geq \hat{x}) = 1/2$, tj. spočteme jej jako $\hat{x} = F^{-1}(1/2)$.