Hledejme u ve tvaru $u = \tilde{u}_0 + w$, kde $w \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Definujme operátor $\tilde{S} : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^\star$ předpisem

$$\tilde{S}w = \tilde{T}(\tilde{u}_0 + w).$$

Ztotožníme–li $\tilde{S}$ s operátorem $S : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)$ a s $f \in (W^{1,2}(\Omega))^\star$ pomocí Rieszovy věty (viz. (6.69) — (6.70)) a užijeme–li lemma 6.1.39 a větu 6.1.38 dostáváme existenci a jednoznačnost úlohy

$$Sw = g \quad \text{v } (W^{1,2}(\Omega))^\star,$$

což dává tvrzení. Abychom dokázali (6.73), bereme nejdříve v (6.74) za $\varphi = u - \tilde{u}_0$ a pak k této rovnici přičteme $-\langle \tilde{T}(\tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0 \rangle$. Dostaneme

$$\langle \tilde{T}(u) - \tilde{T}(\tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0 \rangle = \langle f, u - \tilde{u}_0 \rangle - \langle \tilde{T}(\tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0 \rangle.$$

S využitím silné monotónie $\tilde{T}$ a lineárního růstu $a_i, i = 0, \ldots, d$, dostaneme

$$\|u - \tilde{u}_0\|_{1,2}^2 \leq C \left[\|f\|_{(W_0^{1,2}(\Omega))^\star} + \|\tilde{u}_0\|_{1,2} \right] \|u - \tilde{u}_0\|_{1,2}.$$

Protože $u = u - \tilde{u}_0 + \tilde{u}_0$, (6.73) je dokázáno. □

6.2 Evoluční rovnice

V této části se budeme zabývat rovnicemi parabolického a hyperbolického typu. Protože tyto rovnice často popisují vývoj nějaké veličiny v čase, říká se jim též rovnice evoluční.

Nechť Ω je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^d$ s hranicí $\partial\Omega$. Pro $T > 0$ označme časový interval $I \equiv (0, T)$ a množinu $Q_T \equiv I \times \Omega$ nazveme časoprostorový válec.

Pro dané funkce $a_{ij}, b_i, c : Q_T \to \mathbb{R} (i, j \in \{1, \ldots, d\})$ označíme symbolem $\mathcal{L}$ obecný lineární operátor 2. řádu

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c \tag{6.75}$$

Jestliže

$$(\exists C_1 > 0) \left(\forall \xi \in \mathbb{R}^d \right) (\text{s.v. } (t, x) \in Q_T) \left(a_{ij}(t, x) \xi_i \xi_j \geq C_1 |\xi|^2 \right) \tag{A1}$$

pak operátor $\mathcal{L}$ daný vzorcem (6.75) je eliptický (v souladu s předchozí kapitolou). Podmínka eliptičnosti může být zapsána i vektorovým způsobem $\left(\text{označíme } \mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^d\right)$:

$$\begin{aligned} &\text{Existuje } C_1 > 0 \text{ tak, že pro všechna } \xi \in \mathbb{R}^d \text{ a skoro všechna} \\ &(t, x) \in Q_T \text{ platí} \quad \xi^T \cdot \mathbb{A}(t, x) \xi \geq C_1 |\xi|^2. \end{aligned} \tag{A1*}$$

Zaměříme se na dvě důležité úlohy.
(1) Pro dané funkce $f : Q_T \to \mathbb{R}, a_0 : \Omega \to \mathbb{R}$ a $u_0 : (0, T) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ hledejme řešení

$u : Q_T \to \mathbb{R}$ parabolické úlohy

$$\begin{aligned} \partial_t u + \mathcal{L}u &= f && \text{v } Q_T, && \text{(parabolická rovnice)} \\ u(0,\cdot) &= a_0 && \text{v } \Omega, && \text{(počáteční hodnota)} \\ u &= u_0 && \text{na } I \times \partial\Omega. && \text{(nehomogenní Dirichletova okrajová podmínka)} \end{aligned} \tag{P1}$$

(2) Pro dané funkce $f : Q_T \to \mathbb{R}$, $a_0, a_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ a $u_0 : (0,T) \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$ hledejme řešení $u : Q_T \to \mathbb{R}$ hyperbolické úlohy

$$\begin{aligned} \partial_{tt} u + \mathcal{L}u &= f && \text{v } Q_T, && \text{(hyperbolická rovnice)} \\ u(0,\cdot) &= a_0 && \text{v } \Omega, && \text{(počáteční výchylka)} \\ u_t(0,\cdot) &= a_1 && \text{v } \Omega, && \text{(počáteční rychlost)} \\ u &= u_0 && \text{na } I \times \partial\Omega. && \text{(nehomogenní Dirichletova) okrajová podmínka)} \end{aligned} \tag{H1}$$

Při studiu evolučních rovnic má proměnná t postavení odlišné od prostorové proměnné x. Je–li totiž $v : Q_T \to \mathbb{R}$ a $t \in \langle 0, T\rangle$ pak symbol $v(t)$ označuje zobrazení

$$x \longmapsto v(t,x).$$

Tak pro (skoro) každé t je $v(t)$ prvkem nějakého prostoru funkcí (např. $L^p, \mathcal{C}^{k,\alpha}, W^{k,p}, \dots$). Zobrazení

$$t \longmapsto v(t)$$

pak zobrazuje I do tohoto prostoru funkcí. Prostory funkcí definovaných na I s hodnotami v nějakém Banachovu prostoru se nazývají *Bochnerovy prostory*. Základům této matematické teorie se věnujeme v appendixu (Sekce A.4).

Abychom dosáhli větší přehlednosti zápisu, zavedli jsme v (P1) a (H1) značení $\partial_t u \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$ a $\partial_{tt} u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Existuje několik přístupů k vybudování matematických základů evolučních rovnic. Zde se zaměříme na tzv. metodu energetickou.

Energetické metodě budeme věnovat pozornost z několika důvodů: (i) metoda je založena na apriorních odhadech, které vycházejí v některých případech (např. pro rovnice pohybu kontinua) z bilance mechanické energie; (ii) jde o metodu konstruktivní, která tvoří vhodný základ pro numerické metody; (iii) klíčovým pojmem metody je pojem slabého řešení, je zde tedy přímá návaznost na výsledky předchozí kapitoly; (iv) myšlenky metody lze rozšířit i na nelineární úlohy.

V Sekci 6.2.1 aplikujeme energetickou metodu k řešení parabolického problému (P1), Sekce 6.2.2 je pak věnována hyperbolickému problému (H1). Kromě otázek existence, jednoznačnosti a spojité závislosti na datech se zaměříme na některé další kvalitativní

vlastnosti řešení obou problémů. Pro (P1) uvedeme slabý princip maxima. U obou úloh budeme zkoumat otázku hladkosti řešení za předpokladu, že data jsou hladká. Uvidíme, že řešení parabolických úloh má zhlazující efekt (smoothing property). Ten pro (H1) neplatí, slabý princip maxima také ne.

6.2.1 Energetická metoda pro parabolické úlohy

Cílem této části je ukázat, že pro vhodně zvolená data existuje právě jedno slabé řešení úlohy (P1), které spojitě závisí na datech, splňuje slabý princip maxima, má navíc zhlazující vlastnost a pro řešení platí podobné výsledky o regularitě jako pro eliptické úlohy.

Zaveďme označení potřebné k definici slabého řešení. K operátoru $\mathcal{L}$ z (6.75) přiřadíme pro $t \in I$ operátor $A(t) : W^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ předpisem

$$\langle A(t)u, \varphi \rangle_{W^{-1,2}(\Omega),W^{1,2}(\Omega)} \equiv \int_\Omega \left[a_{ij}(t,\cdot)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + b_i(t,\cdot)\frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi + c(t,\cdot)u\varphi \right] \mathrm{dx},$$

kde $u \in W^{1,2}(\Omega)$ a $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Na data úlohy (P1) klademe, kromě předpokladu elipticity (A1), následující požadavky:

(A2) $a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(Q_T)$,

(A3) $f \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right)$,

(A3*) $f \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$,

(A4) $a_0 \in L^2(\Omega)$,

(A5) Existuje $\tilde{u}_0 \in L^2\left(I; W^{1,2}(\Omega)\right) \cap L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right)$ s $\tilde{u}_0' \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$ tak, že pro s.v. $t \in I$ je stopa $\tilde{u}_0(t)$ shodná se stopou $u_0(t)$.

Lemma 6.2.1
Nechť jsou splněny předpoklady (A1) *a* (A2). *Pak existují* $C_1, C_2, C_3 > 0$ *tak, že pro každé* $\varphi, u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $v \in W^{1,2}(\Omega)$ *a pro skoro všechna* $t \in I$ *platí*

$$\langle A(t)u, u \rangle_{W^{-1,2}(\Omega),W^{1,2}(\Omega)} \geq \frac{C_1}{2}\|\nabla u\|_2^2 - \frac{C_2}{2}\|u\|_2^2, \tag{6.76}$$

$$\left| \langle A(t)v, \varphi \rangle_{W^{-1,2}(\Omega),W^{1,2}(\Omega)} \right| \leq C_3 \|v\|_{1,2} \|\varphi\|_{1,2}. \tag{6.77}$$

<u>*Důkaz*</u>. Dle (A1)

$$\begin{aligned} C_1\|\nabla u\|_2^2 &\leq \int_\Omega a_{ij}(t,\cdot)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} = \\ &= \langle A(t)u, u\rangle - \int_\Omega \left[b_i(t,\cdot)\frac{\partial u}{\partial x_i}u + c(t,\cdot)u^2 \right] \mathrm{dx} \leq \\ &\leq \langle A(t)u, u\rangle + \max_i(\|b_i\|_\infty + \|c\|_\infty)\left[\|\nabla u\|_2 \|u\|_2 + \|u\|_2^2\right] \leq \\ &\leq \langle A(t)u, u\rangle + \frac{C_1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{C_2}{2}\|u\|_2^2, \end{aligned}$$

kde pro zjednodušení nepíšeme indexy u dualit a díky Youngově nerovnosti máme

$$C_2 \equiv \left(2 \max_i (\|b_i\|_\infty + \|c\|_\infty) + \frac{1}{C_1} \max_i{}^2 (\|b_i\|_\infty + \|c\|_\infty) \right).$$

Odečtením $\frac{C_1}{2} \|\nabla u\|_2^2 + \frac{C_2}{2} \|u\|_2^2$ od obou stran nerovnosti dostáváme (6.76). Nerovnost (6.77) je snadným důsledkem (A2) a Hölderovy nerovnosti. □

Definice 6.2.2 *Nechť platí* (A1) — (A5). *Funkce u je slabým řešením úlohy* (P1) *jestliže*

$$u - \tilde{u}_0 \in L^\infty \left(I; L^2(\Omega)\right) \cap L^2 \left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \tag{6.78}$$

$$u' \in L^2 \left(I; W_0^{-1,2}(\Omega)\right), \tag{6.79}$$

$$u(0) = a_0, \tag{6.80}$$

a

$$\langle u'(t), \varphi \rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)} + \langle A(t)u(t), \varphi \rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)} = \\ = \langle f(t), \varphi \rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)} \\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \ \text{ a s.v. } t \in I. \tag{6.81}$$

Pozorujeme, že z (6.78) a (6.79) plyne dle Lemmatu A.4.4 (i), že

$$u \in \mathcal{C}\left(I; L^2(\Omega)\right).$$

Požadavek (6.80) spolu s předpokladem (A4) je tedy smysluplný. Rovnost (6.80) je však třeba pro slabé řešení dokázat spolu s jeho existencí a dalšími vlastnostmi.

Věta 6.2.3
Nechť platí (A1) — (A5) *a* $T \in (0, \infty)$ *je libovolné. Pak existuje právě jedno slabé řešení u úlohy* (P1)*, které navíc splňuje*

$$\sup_{t \in I} \|u(t)\|_2^2 + \int_0^T \|\nabla u(s)\|_2^2 \, \mathrm{ds} \le C(T) \left(\|a_0\|_2^2 + \int_0^T \|f(s)\|_{W^{-1,2}}^2 \, \mathrm{ds} + \right. \\ \left. + \sup_{t \in I} \|\tilde{u}_0(t)\|_2^2 + \int_0^T \left(\|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2 + \|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2 \right) \mathrm{ds} \right). \tag{6.82}$$

Protože úloha (P1) je lineární, nerovnost (6.82) implikuje nejen jednoznačnost (jen nulová fce je řešením úlohy s nulovými daty), ale i spojitou závislost na datech ve vhodných normách.

Důkaz. Dokažme nejdříve nerovnost (6.82) za předpokladu, že u je slabé řešení. Zvolíme–li $\varphi = (u - \tilde{u}_0)(t)$ v (6.81) a přičteme–li k oběma stranám člen $-\langle \tilde{u}_0'(t), (u - \tilde{u}_0)(t)\rangle - \langle A(t)\mathbf{u}(t), (u - \tilde{u}_0)(t)\rangle$ dostáváme

$$\langle u' - \tilde{u}_0', u - \tilde{u}_0\rangle + \langle A(u - \tilde{u}_0), u - \tilde{u}_0\rangle = \\ = \langle f, u - \tilde{u}_0\rangle - \langle \tilde{u}_0', u - \tilde{u}_0\rangle - \langle A\tilde{u}_0, u - \tilde{u}_0\rangle \quad (6.83)$$

Integrujeme–li (6.83) od 0 do t, užijeme–li (A.54) na první člen, (6.76) na druhý člen a odhadneme–li pravou stranu pomocí vztahu (6.77) a Poincarého nerovnosti, dostáváme

$$\frac{1}{2}\|u(t) - \tilde{u}_0(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|u(0) - \tilde{u}_0(0)\|_2^2 + \frac{C_1}{2}\int_0^t \|\nabla(u - \tilde{u}_0)(s)\|_2^2 \,\mathrm{ds} \leq \\ \leq \frac{C_2}{2}\int_0^t \|u(s) - \tilde{u}_0(s)\|_2^2 \,\mathrm{ds} + \\ + \int_0^t \left(\|f(s)\|_{W^{-1,2}} + \|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}\right)\|\nabla(u - \tilde{u}_0)(s)\|_2 \,\mathrm{ds} + \\ + C_3\int_0^t \|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}\|\nabla(u - \tilde{u}_0)(s)\|_2 \,\mathrm{ds}. \quad (6.84)$$

Youngova nerovnost aplikovaná na členy s $\|\nabla(u - \tilde{u}_0)\|_2$ pak dává

$$\|u(t) - \tilde{u}_0(t)\|_2^2 + \tilde{C}_1\int_0^t \|\nabla(u - \tilde{u}_0)(s)\|_2^2 \,\mathrm{ds} \leq \\ \leq \|a_0 - \tilde{u}_0(0)\|_2^2 + C_2\int_0^t \|(u - \tilde{u}_0)(s)\|_2^2 \,\mathrm{ds} + \\ + C\int_0^T \left(\|f(s)\|_{W^{-1,2}}^2 + \|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2 + \|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2\right) \mathrm{ds}. \quad (6.85)$$

Gronwallovo lemma A.4.6 (viz. appendix) použité pro $y(t) = \|u(t) - \tilde{u}_0(t)\|_2^2$ na nerovnost (6.85), kde vynecháme 2. člen, pak dává

$$\sup_{t\in I}\|u(t) - \tilde{u}_0(t)\|_2^2 \leq e^{C_2 T}\Bigg(\|a_0\|_2^2 + \|\tilde{u}_0(0)\|_2^2 + \\ + C\int_0^T \|f(s)\|_{W^{-1,2}}^2 + \|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2 + \|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2 \,\mathrm{ds}\Bigg). \quad (6.86)$$

Podobný odhad dostaneme na člen $\int_0^T \|\nabla(u - \tilde{u}_0)\|_2^2 \,\mathrm{ds}$ s tím, že vezmeme $t = T$ v (6.85) a první člen na pravé straně nerovnosti odhadneme pomocí (6.86)

$$\int_0^T \|\nabla(u - \tilde{u}_0)(s)\|_2^2 \,\mathrm{ds} \leq C(T)\Bigg(\|a_0\|_2^2 + \|\tilde{u}_0(0)\|_2^2 + \int_0^T \|(u - \tilde{u}_0)(s)\|_2^2 \,\mathrm{ds} + \\ + C\int_0^T \|f(s)\|_{W^{-1,2}}^2 + \|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2 + \|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2 \,\mathrm{ds}\Bigg). \quad (6.87)$$

Nerovnost (6.82) pak dostaneme tak, že $\|u(t)\|_2^2 = \|u(t) - \tilde{u}_0(t) + \tilde{u}_0(t)\|_2^2$ (totéž pro $\|\nabla u(s)\|_2^2$), užijeme $\triangle$–nerovnost, vztah (6.86), (6.87) a spojité vnoření $W \hookrightarrow \mathcal{C}(I; L^2(\Omega))$, což umožňuje odhadnout $\|\tilde{u}_0(0)\|_2^2$ pomocí $\int_0^T (\|\tilde{u}_0(s)\|_{1,2}^2 + \|\tilde{u}_0'(s)\|_{W^{-1,2}}^2)\,\mathrm{ds}$. Podrobnosti přenecháváme čtenáři.

Nyní se zaměříme na existenci řešení. Důkaz provedeme v několika krocích.

Krok 1. Galerkinův systém a jeho řešitelnost
Prostor $W_0^{1,2}(\Omega)$ je separabilní. Existuje tedy spočetná báze $\{\omega^r\}_{r=1}^N$, kterou můžeme generovat prvky z $W_0^{1,2}(\Omega)$. Galerkinovy aproximace u^N jsou definovány vztahem

$$u^N(t,x) = \sum_{r=1}^{N} C_r^N(t)\omega^r(x) + \tilde{u}_0(t,x) \tag{6.88}$$

kde koeficienty $\mathbb{C}^N = (C_1^N, \ldots, C_r^N, \ldots, C_N^N)$ najdeme řešením systému N–obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\mathrm{du}^N}{\mathrm{dt}}, \omega^r\right) + \left(A(t)u^N, \omega^r\right) = (f(t), \omega^r), \quad r = 1, \ldots, N, \\ &u^N(0) = \mathbb{P}^N a_0, \end{aligned} \tag{6.89}$$

kde $\mathbb{P}^N$ je ortogonální projektor z $L^2(\Omega)$ do $lin\{\omega^1, \ldots, \omega^N\}$. Závorky $(\cdot,\cdot)$ označují v (6.89) skalární součin v $L^2(\Omega)$. (Pokud předpokládáme (A3*) a ne (A3), pak je člen $(f(t), \omega^r)$ nahrazen členem $\langle f(t), \omega^r \rangle_{W^{-1,2}(\Omega), W^{1,2}(\Omega)}$.)

Ačkoliv některé části důkazu lze provést pro obecnou bázi $\{\omega^r\}_{r=1}^N$, je výhodnější uvažovat bázi s lepšími vlastnostmi. Uvažujme nadále tedy bázi $\{\omega^r\}_{r=1}^N$, která je tvořena vlastními funkcemi Laplaceova operátoru s homogenní Dirichletovou podmínkou, tzn ω^r řeší

$$\begin{aligned} \Delta\omega^r &= \lambda_r \omega^r \quad \text{v } \Omega, \\ \omega^r &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{6.90}$$

Takto lze sestrojit bázi, která je dle výsledků Sekce 2.4. ortonormální v $L^2(\Omega)$, ortogonální v $W_0^{1,2}(\Omega)$ a z výsledků o regularitě plyne hladkost funkcí ω^r v závislosti na hladkosti hranice $\partial\Omega$. (Je–li např. $\Omega = \mathcal{B}_R(0)$, pak $\omega^r \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.) Užijeme–li ortonormality $\{\omega^r\}_{r=1}^N$ a označíme–li $\mathbb{G} = (G_1, \ldots, G_N), \mathbb{C}_0 = (C_{01}, \ldots, C_{0N})$ a $\mathbb{A}(\mathbb{C}^N) = (A_1(\mathbb{C}^N), \ldots A_N(\mathbb{C}^N))$, kde

$$G_r := (f(t), \omega^r), C_{0r} := (a_0, \omega^r) \text{ a } A_r(\mathbb{C}^N) := (A(t)u^N(t), \omega^r),$$

pak (6.89) lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \dot{\mathbb{C}}^N + \mathbb{A}(\mathbb{C}^N) &= \mathbb{G} \\ \mathbb{C}^N(0) &= \mathbb{C}_0 \end{aligned} \tag{6.91}$$

Samozřejmě závislost $\mathbb{A}$ na $\mathbb{C}^N$ je lineární, koeficienty matice však také závisejí na t. Systém (6.91) resp. (6.89) splňuje Carathéodoryho podmínky a lokální existence jediného řešení je zřejmá. Existence globálního řešení plyne buď z linearity nebo z apriorních odhadů jak objasníme níže v Kroku 2.

Krok 2. Globální apriorní (energetické) odhady
Vynásobme r–tou rovnici v (6.89) koeficientem $C_r^N(t)$ a sečteme tyto rovnice přes $r = 1, \dots, N$. Dostaneme

$$\left(\frac{du^N}{dt}, u^N - \tilde{u}_0\right) + \left(Au^N, u^N - \tilde{u}_0\right) = \left(f, u^N - \tilde{u}_0\right). \tag{6.92}$$

Nechť nadále $\tilde{u}_0 \equiv 0$. Čtenář si může sám doplnit modifikace vzniklé přidáním členu $\tilde{u}_0$ (viz. též první část důkazu). Využijeme–li Lemma 6.2.1, pak (6.92) implikuje pro $f \in L^2(I; L^2(\Omega))$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u^N\right\|_2^2 + \frac{C_1}{2}\left\|\nabla u^N\right\|_2^2 &\le \frac{C_2}{2}\left\|u^N\right\|_2^2 + \|f\|_2 \left\|u^N\right\|_2 \le \\ &\le \frac{C_2+1}{2}\left\|u^N\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\|f\|_2^2 \end{aligned} \tag{6.93}$$

S pomocí Gronwallova lemmatu pak dostaneme

$$\begin{aligned} \sup_{t\in I}\left\|u^N(t)\right\|_2^2 &\le \left\|u^N(0)\right\|_2^2 e^{(C_2+1)T}\left(\int_0^T \|f(s)\|_2^2\, e^{-(C_2+1)s}\,\mathrm{ds} + 1\right) \le \\ &\le \|a_0\|_2^2\, e^{(C_2+1)T}\left(\int_0^T \|f(s)\|_2^2\, e^{-(C_2+1)s}\,\mathrm{ds} + 1\right) =: K_1(a_0, f). \end{aligned} \tag{6.94}$$

Integrujeme–li (6.93) od 0 do T a užijeme–li (6.94) dostaneme

$$\int_0^T \left\|\nabla u^N(t)\right\|_2^2 \,\mathrm{dt} \le \frac{C_2+1}{C_1} K_1(a_0, f)T + \frac{1}{C_1}\int_0^T \|f(s)\|_2^2 \,\mathrm{ds} =: K_2(a_0, f). \tag{6.95}$$

Spočítejme odhad časové derivace. Nechť je $\varphi \in L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$. Pak platí

$$\begin{aligned} \left(\frac{du^N}{dt}, \varphi\right) &= \left(\frac{d}{dt}\mathbb{P}^N u^N, \varphi\right) = \left(\mathbb{P}^N \frac{du^N}{dt}, \varphi\right) = \left(\frac{du^N}{dt}, \mathbb{P}^N\varphi\right) = \\ &= (f, \mathbb{P}^N\varphi) - \left(Au^N, \mathbb{P}^N\varphi\right). \end{aligned}$$

Odtud a z (6.77) plyne

$$\left|\left(\frac{du^N}{dt}, \varphi\right)\right| \le \|f\|_2 \left\|\mathbb{P}^N\varphi\right\|_2 + C_3 \left\|\nabla u^N\right\|_2 \left\|\nabla(\mathbb{P}^N\varphi)\right\|_2. \tag{6.96}$$

Využijeme–li vlastnosti spojitého operátoru (projekce) $\mathbb{P}^N$ v $L^2(\Omega)$ i ve $W_0^{1,2}(\Omega)$ a integrujeme–li (6.96) podle proměnné t od 0 do T, dostaneme

$$\int_0^T \left|\left(\frac{du^N}{dt}, \varphi\right)\right| \,\mathrm{dt} \le C\int_0^T \|f\|_2 \|\varphi\|_2 \,\mathrm{dt} + \tilde{C}_3 \int_0^T \left\|\nabla u^N\right\|_2 \|\nabla\varphi\|_2 \,\mathrm{dt}. \tag{6.97}$$

Užijeme–li nyní Hölderovu nerovnost s $p = p' = 2$ v čase na integrály napravo v (6.97), pak (6.95) implikuje

$$\int_0^T \left| \left(\frac{du^N}{dt}, \varphi \right) \right| \,\mathrm{dt} \leq \left\{ C \left(\int_0^T \|f\|_2^2 \,\mathrm{dt} \right)^{\frac{1}{2}} + \tilde{C}_3 \sqrt{K_2(a_0, f)} \right\} \left(\int_0^T \|\varphi\|_{1,2}^2 \,\mathrm{ds} \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{6.98}$$

Uvědomíme-li si nyní, že platí $\left((L^p(I;X))^\star = L^{p'}(I;X^\star) \quad \text{kde} \quad p' = \frac{p}{p-1} \right)$, pak přechodem k sup přes φ z jednotkové koule v $L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ odvodíme

$$\begin{aligned} \left\| \frac{du^N}{dt} \right\|_{L^2(I;W^{-1,2}(\Omega))} &= \left\| \frac{du^N}{dt} \right\|_{\left(L^2\left(I;W_0^{1,2}(\Omega)\right)\right)^\star} = \\ = \sup_{\|\varphi\|_{L^2\left(I;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \leq 1} & \frac{\left| \left\langle \frac{du^N}{dt}, \varphi \right\rangle_{L^2(I;W^{-1,2}(\Omega)),L^2\left(I;W_0^{1,2}(\Omega)\right)} \right|}{\|\varphi\|_{L^2\left(I;W_0^{1,2}(\Omega)\right)}} \leq K_3(a_0, f), \end{aligned} \tag{6.99}$$

kde K_3 jsme označili složenou závorku ve výrazu (6.98).

Označíme–li $K = \max(K_1, K_2, K_3^2)$, pak můžeme shrnout získané stejnoměrné odhady do následující tabulky:

$$\begin{aligned} \sup_{t \in I} \left\| u^N(t) \right\|_2^2 &\leq K, \\ \int_0^T \left\| \nabla u^N(t) \right\|_2^2 \,\mathrm{dt} &\leq K, \\ \int_0^T \left\| \frac{du^N(t)}{dt} \right\|_{W^{-1,2}(\Omega)}^2 \,\mathrm{dt} &\leq K. \end{aligned} \tag{6.100}$$

kde K buď závisí na $\|a_0\|_2$ a $\int_0^T \|f(t)\|_2^2 \,\mathrm{dt}$ nebo na $\|a_0\|_2$ a $\int_0^T \|f(t)\|_{W^{-1,2}}^2 \,\mathrm{dt}$ podle toho, zda předpokládáme (A3) či (A3*).

Speciálně, z (6.92) dostáváme, že pro všechna $t \in I$

$$\left| \mathbb{C}^N(t) \right|^2 \leq K.$$

Není tedy možné, aby řešení vykázalo singularitu v čase dřívějším než T. Víme, tedy že systém (6.89) má pro každé N globálně (tj. na $(0,T)$ definované) jednoznačné řešení $\mathbb{C}^N$ (respektive u^N). Tato řešení navíc splňují stejnoměrné odhady (6.100).

Krok 3. Limitní přechod

Z (6.100) plyne existence podposloupnosti (kterou je zvykem označovat stejně jako původní posloupnost) vybrané z $\{u^N\}_{N=1}^\infty$ a existence $u \in L^\infty(I; L^2(\Omega)) \cap L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$

s $u' \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$ tak, že

$$\begin{aligned} u^N &\rightharpoonup u \quad \star\text{–slabě v} \quad L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right), \\ u^N &\rightharpoonup u \quad \text{slabě v} \quad L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \qquad \tilde{u}_0 \equiv 0 \\ \frac{du^N}{dt} &\rightharpoonup u' \quad \text{slabě v} \quad L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{6.101}$$

Vynásobme (6.89) uvažovanou v čase t hodnotou $h(t)$ funkce $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ a integrujeme takto získanou identitu od 0 do T. Dostaneme nejen

$$\int_0^T \left\{ \left\langle \frac{du^N(t)}{dt}, \omega^r \right\rangle h(t) + \left\langle A(t)u^N(t), \omega^r \right\rangle h(t) - \left\langle f(t), \omega^r \right\rangle h(t) \right\} \mathrm{dt} \ = 0, \tag{6.102}$$

ale volbou $h \in \mathcal{D}((-\infty, T))$ také

$$\int_0^T \left\{ -(u^N(t), \omega^r) h'(t) + \left\langle A(t)u^N(t), \omega^r \right\rangle h(t) - \left\langle f(t), \omega^r \right\rangle h(t) \right\} \mathrm{dt} = \\ = (\mathbb{P}^N a_0, \omega^r) h(0). \tag{6.103}$$

Využijeme–li (6.101) lze snadno provést limitní přechod v (6.102) a (6.103) pro pevné ω^r a h. Dostaneme

$$\int_0^T \left\{ \langle u'(t), \varphi(t) \rangle + \langle A(t)u(t), \varphi(t) \rangle - \langle f(t), \varphi(t) \rangle \right\} \mathrm{dt} \ = 0 \\ \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}; W_0^{1,2}(\Omega)\right) \tag{6.104}$$

a

$$\int_0^T \left\{ -(u(t), \varphi'(t)) + \langle A(t)u(t), \varphi(t) \rangle - \langle f(t), \varphi(t) \rangle \right\} \mathrm{dt} \ = (a_0, \varphi(0)) \\ \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}\left((-\infty, T); W_0^{1,2}(\Omega)\right). \tag{6.105}$$

Je zřejmé, že (6.104) platí i pro $\varphi \in L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$, u je tedy slabé řešení a splňuje (6.81).

Krok 4. Nabývání počáteční podmínky
Zvolme v (6.104) speciálně $\varphi \in \mathcal{D}\left((-\infty, T); W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ a proveďme "integraci per partes v čase". Získáme

$$\int_0^T \left\{ -(u(t), \varphi'(t)) + (A(t)u(t), \varphi(t)) - \langle f(t), \varphi(t) \rangle \right\} \mathrm{dt} \ = (u(0), \varphi(0)) \\ \text{pro } \forall \varphi \in \mathcal{D}((-\infty, T); W_0^{1,2}(\Omega)). \tag{6.106}$$

Porovnáme–li (6.106) a (6.105), dostáváme

$$(u(0) - a_0, \varphi(0)) = 0 \quad \forall \varphi(0) \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{6.107}$$

Odsud snadno nahlédneme, že

$$u(0) = a_0.$$

Věta 6.2.3 je dokázána. □

Následující věta a její důkaz nám ukáží jaké postupy se užívají při studiu hladkosti řešení parabolických rovnic. Zhruba řečeno kombinujeme dvě metody: (a) zlepšíme informaci o časové derivaci, kterou přesuneme do pravé strany a (b) užijeme výsledky o regularitě eliptických úloh z předchozí kapitoly. Protože tyto výsledky jsme zformulovali jen pro podtřídu operátorů (6.75), omezíme se na ně i v této části a budeme předpokládat, že

$$b_i = 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad c \geq 0 \tag{6.108}$$

a

$$a_{ij},\ c \quad \text{nezávisejí na } t. \tag{6.109}$$

Věta 6.2.4
Nechť je $\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$, a koeficienty a_{ij}, b_i a c splňují (6.108) a (6.109). Nechť u je slabé řešení úlohy (P1) *s $u_0 = 0$. Jestliže*

$$a_{ij},\ c \in W^{1,\infty}(\Omega) \tag{6.110}$$

a

$$a_0 \in W_0^{1,2}(\Omega) \ \text{ a } f \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right), \tag{6.111}$$

pak

$$\begin{aligned} &u \in L^\infty\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right) \cap L^2\left(I; W^{2,2}(\Omega)\right), \\ &u' \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right) \end{aligned} \tag{6.112}$$

a platí odhad u v normách těchto prostorů pomocí norem a_0 a f. Je–li navíc

$$a_0 \in W^{2,2}(\Omega) \ \text{ a } f' \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right), \tag{6.113}$$

pak

$$\begin{aligned} &u' \in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \\ &u \in L^\infty\left(I; W^{2,2}(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{6.114}$$

Důkaz. Postup rozdělíme do čtyř kroků.
Krok 1. Zlepšení regularity u'.

Násobme r–tou rovnici (6.89) funkcí $\frac{d\,C_r^N(t)}{dt}$, získané rovnice sečtěme přes r od 1 do N. Dostaneme

$$\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2 + \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{du^N}{dt}\right)\,\mathrm{dx} = \left(f, \frac{du^N}{dt}\right) - \int_\Omega cu^N\,\frac{du^N}{dt}\,\mathrm{dx}.$$

Využijeme–li symetrie matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^d$ a pravou stranu odhadneme pomocí Schwarzovy, Hölderovy a nakonec Youngovy nerovnosti

$$\frac{1}{2}\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u^N}{\partial x_j}\frac{\partial u^N}{\partial x_i}\,\mathrm{dx} \le C\left(\|f\|_2^2 + \left\|u^N\right\|_2^2\right)$$

Integrací této nerovnosti od 0 do t ($t \in (0,T\rangle$), a použitím (A1) a $(6.89)_1$ získáváme

$$\int_0^T \left\|\frac{du^N}{dt}(s)\right\|_2^2\,\mathrm{ds} + C_1\left\|\nabla u^N(t)\right\|_2^2 \le C\left(\left\|\nabla \mathbb{P}^N a_0\right\|_2^2 + \int_0^T \|f(s)\|_2^2\,\mathrm{ds} + 1\right),$$

což implikuje

$$\sup_{t\in I}\left\|\nabla u^N(t)\right\|_2^2 \le K, \tag{6.115}$$

a

$$\int_0^T \left\|\frac{du^N}{dt}(s)\right\|_2^2\,\mathrm{ds} \le K. \tag{6.116}$$

Vzhledem k jednoznačnosti slabého řešení, vidíme, že u splňuje

$$\int_0^T \|u'(t)\|_2^2\,\mathrm{dt} \le K \text{ a } \sup_{t\in I}\|\nabla u(t)\|_2^2 \le K, \tag{6.117}$$

kde K závisí na $\|\nabla a_0\|_2$ a $\|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}$. Dva výroky o regularitě z (6.112) jsou tak dokázány.

Krok 2. První využití eliptické regularity.
Přepíšeme–li si (P1) do tvaru

$$Au(t) = f(t) - u'(t), \tag{6.118}$$

vidíme, že pravá strana je pro skoro všechna $t \in I$ v $L^2(\Omega)$. Z eliptické regularity pak plyne, že pro tato $t \in I$ je $u(t) \in W^{2,2}(\Omega)$ a navíc existuje $C > 0$ tak, že

$$\|u(t)\|_{2,2} \le C\left(\|f(t)\|_2 + \|u'(t)\|_2\right). \tag{6.119}$$

Odtud vyvodíme

$$u \in L^2\left(I; W^{2,2}(\Omega)\right). \tag{6.120}$$

Krok 3. Další využití regularity u'
Nyní nejdříve zderivujeme r–tou rovnici v (6.89) podle času, pak ji násobíme funkcí $\frac{d\,C_r^N(t)}{dt}$ a rovnice sečteme. Máme vztah

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2 + \int_\Omega a_{ij}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x_j \partial t}\frac{\partial^2 u^N}{\partial x_i \partial t}\,\mathrm{dx} = \int_\Omega f'\frac{du^N}{dt}\,\mathrm{dx} - \int_\Omega c\left|\frac{du^N}{dt}\right|^2\,\mathrm{dx}$$

Z (A1) a z odhadů pravé strany pak dostaneme

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2 + C_1\left\|\nabla\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2 \le C\left(\|f'\|_2^2 + \left\|\frac{du^N}{dt}\right\|_2^2\right). \tag{6.121}$$

Protože $\frac{du^N}{dt}(0) = -Au^N(0) + f(0) \in L^2(\Omega)$ dle předpokladů

$$\left(f \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right), f' \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right)\right) \Rightarrow f \in \mathcal{C}\left(I; L^2(\Omega)\right),$$

integrace (6.121) od 0 do t pak dává

$$\sup_{t\in I}\left\|\frac{du^N(t)}{dt}\right\|_2^2 + \int_0^T\left\|\nabla\frac{du^N(t)}{dt}\right\|_2^2\,\mathrm{dt} \le K, \tag{6.122}$$

kde K závisí tentokrát i na $\|a_0\|_{2,2}$ a $\|f\|_{W^{1,2}(I;L^2(\Omega))}$. Stejnou úvahou jako v kroku 1. dostáváme $(6.114)_1$, tj.

$$u' \in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right) \cap L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right). \tag{6.123}$$

Krok 4. Druhé využití eliptické regularity
Podíváme–li se opět na (6.118) vidíme, že tentokrát je pravá strana v $L^\infty(I; L^2(\Omega))$. Z (6.119) tak plyne $(6.114)_2$.
Věta 6.2.4 je dokázána. □

Poznámka 6.2.5 *Indukcí lze dokázat vyšší regularitu řešení za předpokladu, že data, koeficienty eliptického operátoru a $\partial\Omega$ jsou hladší. Navíc data musí splňovat tzv. podmínky kompatibility, zachycující odpovídající regularitu okrajových a počátečních podmínek v "rozích" časoprostorového válce.*

Poznámka 6.2.6 *Pokud tyto podmínky kompatibility nejsou splněny, nebo $a_0 \in L^2(\Omega)$ a není lepší, pak lze ukázat, že slabé řešení je hladké v libovolném kladném čase (∞–rychlost šíření vln) není však hladké až do počátku.*

Poznámka 6.2.7 *Pro tyto rovnice platí principy maxima. Lze ověřit slabý princip maxima "testováním" u^+ resp. u^- analogicky jako pro eliptické rovnice.*

6.2.2 Energetická metoda pro hyperbolické rovnice

V této části se zaměříme na problém (H1). Platí zde podobné výsledky: existuje jediné slabé řešení, které je hladké pokud jsou hladká data. Žádný princip maxima však neplatí. K důkazu existence budeme požadovat silnější předpoklady na koeficienty lineárního operátoru $\mathcal{L}$ než v případě existence slabého řešení úlohy (P1): kromě (A1) budeme předpokládat

$$\begin{aligned} &a_{ij}, b_i, c \in W^{1,\infty} \quad (1 \le i,j \le d) \\ &a_{ij} = a_{ji} \end{aligned} \tag{AH1}$$

Definice 6.2.8 *(slabého řešení* (H1)*)*
Řekneme, že

$$u \in L^\infty\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right) \ s\ u' \in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right) \ a\ u'' \in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right) \tag{6.124}$$

je slabým řešením problému (H1) *s* $u_0 = 0$ *jestliže platí*

$$\langle u''(t), \varphi\rangle + \langle A(t)u(t), \varphi\rangle = \langle f(t), \varphi\rangle \quad \textit{pro s.v. } t \in I,\ \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{6.125}$$

$$u(0) = a_0 \quad a \quad u'(0) = a_1. \tag{6.126}$$

Pozorování 6.2.9 *Protože slabé řešení* (H1) *patří dle definice speciálně do prostoru* $W = \{u \in L^2(I; L^2(\Omega)), u' \in L^2(I; L^2(\Omega))\}$*, který je dle Lemmatu A.4.4 spojitě vnořen do* $\mathcal{C}(I; L^2(\Omega))$ *a prostor*
$\tilde{W} = \left\{u \in L^2\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), u'' \in L^2(I; W^{-1,2}(\Omega))\right\} \hookrightarrow \mathcal{C}(I; L^2(\Omega))$*, má smysl požadovat, aby* $a_0, a_1 \in L^2(\Omega)$*. Budeme požadovat malinko více. Předpokládejme*

$$a_0 \in W_0^{1,2}(\Omega), a_1 \in L^2(\Omega) \ \ a\ f \in L^2\left(I; L^2(\Omega)\right). \tag{AH2}$$

Věta 6.2.10
Nechť $\Omega \in \mathcal{C}^{0,1}$ *a platí* (AH1), (A1), (AH2)*. Pak existuje právě jedno řešení úlohy* (H1) *s* $u_0 = 0$*.*

Důkaz. **Část I.** Jednoznačnost
Nechť u, v jsou dvě slabá řešení ke stejným počátečním podmínkám a k pravé straně f. Rozdíl $\omega = u - v$ pak splňuje (srovnej s (6.125) a (6.126))

$$\langle \omega''(t), \varphi\rangle + \langle A(t)\omega(t), \varphi\rangle = 0 \quad \text{pro s.v. } t \in I, \forall \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{6.127}$$

a $\omega(0) = \omega'(0) = 0$. Cílem je ukázat, že

$$\omega(t) = 0 \quad \text{pro s.v. } t \in I. \tag{6.128}$$

Pokud bychom mohli za φ v (6.127) volit funkci $\omega'(t)$, byl by důkaz jednoduchý. Skutečně, z (6.127) s $\varphi = \omega'(t)$ totiž plyne

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\omega'(t)\right\|_2^2 + \left\langle A(t)\omega(t), \omega'(t)\right\rangle = 0. \tag{6.129}$$

Poněvadž,

$$\left\langle A(t)\omega(t), \omega'(t)\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\langle A(t)\omega(t), \omega(t)\right\rangle - \left\langle A'(t)\omega(t), \omega(t)\right\rangle,$$

dosazením do (6.129) a integrací od 0 do t pak dostaneme

$$\left\|\omega'(t)\right\|_2^2 + C_1\left\|\nabla\omega(t)\right\|_2^2 \leq \sup_{Q_T}\left|\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{A}\right|\int_0^t \left\|\nabla\omega(s)\right\|_2^2 \,\mathrm{ds}$$

a Gronwallovo lemma dává tvrzení.

Avšak tato argumentace není správná, neboť $\omega' \in L^\infty\left(I; L^2\left(\Omega\right)\right)$, ale $\omega'(t) \notin W_0^{1,2}\left(\Omega\right)$ a nelze ji tedy vzít za testovací funkci v (6.127).

Postupujme opatrněji. Zvolíme $s \in (0, T\rangle$ a definujme

$$v(t) := \begin{cases} \int_t^s \omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau & \text{je–li } 0 \leq t \leq s \\ 0 & \text{je–li } s < t \leq T \end{cases} \quad \forall t, s \in I.$$

Pak $v(t) \in W_0^{1,2}\left(\Omega\right)$ a pokud položíme $\varphi = v(t)$ v (6.127) a integrujeme výsledek od 0 do s dostaneme

$$\int_0^s \left\{\left\langle\omega''(t), v(t)\right\rangle + \left\langle A(t)\omega(t), v(t)\right\rangle\right\}\,\mathrm{dt} = 0. \tag{6.130}$$

Integrace per partes spolu s podmínkami $\omega'(0) = 0$ a $v(s) = 0$ vede ke vztahu

$$\int_0^s \left\{\left\langle\omega'(t), \omega(t)\right\rangle - \left\langle A(t)v'(t), v(t)\right\rangle\right\}\,\mathrm{dt} = 0. \tag{6.131}$$

Odtud

$$\frac{1}{2}\left\|\omega(s)\right\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\left(\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,\mathrm{dx}\right) = \\ = \int_0^s\int_\Omega \left[b_i\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial t}v + c\frac{\partial v}{\partial t}v - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\right]\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dt}.$$

Tedy ($v(s) = 0$), po integraci per partes v x–ové proměnné v prvním členu dostaneme

$$\frac{1}{2}\left\|\omega(s)\right\|_2^2 + \frac{C_1}{2}\left\|\nabla v(0)\right\|_2^2 \leq \\ \leq C\left\{\int_0^s \left\|\omega(t)\right\|_2\left\|\nabla v(t)\right\|_2 + \left\|\omega(t)\right\|_2\left\|v(t)\right\|_2 + \left\|\nabla v(t)\right\|_2^2\,\mathrm{dt}\right\}.$$

Zaveďme značení $U(t) := \int_0^t \omega(\tau)\,\mathrm{d}\tau$. Pak $v(0) = U(s)$ a dostáváme

$$\frac{1}{2}\|\omega(s)\|_2^2 + \frac{C_1}{2}\|U(s)\|_{1,2}^2 \leq \\ \leq C\left\{\int_0^s \left(\|U(s)-U(t)\|_{1,2}\|\omega(t)\|_2 + \|U(s)-U(t)\|_{1,2}^2\right)\,\mathrm{dt}\right\}.$$

S pomocí Schwartzovy nerovnosti pak dostaneme

$$\|\omega(s)\|_2^2 + C_1\|U(s)\|_{1,2}^2 \leq \\ \leq \tilde{C}\left(\int_0^s \left(\|U(t)\|_{1,2}^2 + \|\omega(t)\|_2^2\right)\,\mathrm{dt}\right) + 2\tilde{C}s\|U(s)\|_{1,2}^2$$

neboli

$$\|\omega(s)\|_2^2 + (C_1 - 2\tilde{C}s)\|U(s)\|_{1,2}^2 \leq \tilde{C}\left(\int_0^s \left(\|U(t)\|_{1,2}^2 + \|\omega(t)\|_2^2\right)\,\mathrm{dt}\right).$$

Gronwallovo lemma implikuje jednoznačnost alespoň na intervalu $(0, T_1)$, kde $T_1 = \frac{C_1}{2\tilde{C}}$. Postupným pokrýváním intervalu $(0, T)$ intervaly délky T_1 dostaneme jednoznačnost řešení na $(0, T)$.

Část II. Existence

Postupujeme opět Galerkinovou metodou. Protože tato metoda byla podrobně diskutována při řešení úlohy (P1) omezíme se zde jen na hlavní rysy.

Krok 1. Uvažujme $\{\omega^r\}_{r=1}^{\infty}$ bázi v $W_0^{1,2}(\Omega)$ tvořenou vlastními funkcemi úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta\omega^r &= \lambda_r\omega^r \quad \text{v } \Omega \\ \omega^r &= 0 \qquad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

Pro $N \in \mathbb{N}$ pevné, hledejme koeficienty $C_k^N(t), k = 1, 2, \ldots, N$, tak, že

$$u^N(t,x) = \sum_{r=1}^{N} C_k^N(t)\omega^r(x)$$

řeší *Galerkinův systém*

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2u^N(t)}{dt^2}, \omega^r\right) + (A(t)u^N(t), \omega^r) &= (f(t), \omega^r), \quad r = 1, 2, \ldots, N, \\ C_r^N(0) &= (a_0, \omega^r), \\ \frac{dC_r^N}{dt}(0) &= (a_1, \omega^r). \end{aligned} \tag{6.132}$$

Tento systém lineárních obyčejných diferenciálních rovnic má řešení na $(0, T)$. (Lze také argumentovat tak, že lokální řešitelnost je zřejmá a globální plyne z apriorních odhadů níže.)

Apriorní odhady získáme tak, že r–tou rovnici $(6.132)_1$ násobíme $\frac{d\,C_r^N(t)}{dt}$, rovnice sečteme od $r = 1, \dots, N$ a integrujeme výsledek v čase od 0 do t, $t \in (0, T\rangle$. Standartním postupem vyvodíme

$$\max_{t\in\bar{I}} \left(\left\| \frac{du^N(t)}{dt} \right\|_2^2 + \left\| \nabla u^N(t) \right\|_2^2 \right) \leq \\ \leq C \left\{ \|a_0\|_{1,2}^2 + \|a_1\|_2^2 + \|f\|_{L^2(I;L^2(\Omega))}^2 \right\} \quad (6.133)$$

Vyvodíme také

$$\left\| \frac{d^2u^N(t)}{dt^2} \right\|_{L^2(I;W^{-1,2}(\Omega))}^2 \leq C < \infty. \quad (6.134)$$

Apriorní odhady (6.133) a (6.134) stačí k limitnímu přechodu. Existuje totiž

$$u \in L^\infty \left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right) \text{ s } u' \in L^\infty \left(I; L^2(\Omega)\right) \text{ a s } u'' \in L^2 \left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right)$$

tak, že (aspoň pro podposloupnost)

$$u^N \rightharpoonup u \quad \star\text{–slabě} \quad \text{v} \quad L^\infty \left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \quad (6.135)$$

$$\frac{du^N}{dt} \rightharpoonup u' \quad \star\text{–slabě} \quad \text{v} \quad L^\infty \left(I; L^2(\Omega)\right), \quad (6.136)$$

$$\frac{d^2u^N}{dt^2} \rightharpoonup u'' \quad \text{slabě} \quad \text{v} \quad L^2 \left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right), \quad (6.137)$$

Postupem stejným jako u parabolických rovnic odvodíme

$$\int_0^T \{\langle u''(t), \varphi(t)\rangle + \langle A(t)u(t), \varphi(t)\rangle - \langle f(t), \varphi(t)\rangle\} \,\mathrm{dt} = 0 \\ \text{pro všechna } \varphi \in L^2 \left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right). \quad (6.138)$$

Abychom ověřili, že *řešení nabývá předepsaných počátečních podmínek*, zvolme v (6.138) $\varphi \in \mathcal{C}^2 \left(\langle 0, T\rangle; W_0^{1,2}(\Omega)\right)$ s $\varphi(T) = 0$ a $\varphi'(T) = 0$. Pak (6.138) po integraci per partes implikuje.

$$\int_0^T \{\langle u(t), \varphi''(t)\rangle + \langle A(t)u(t), \varphi(t)\rangle - \langle f(t), \varphi(t)\rangle\} \,\mathrm{dt} = \\ = (\varphi'(0), u(0)) - (u'(0), \varphi(0)). \quad (6.139)$$

Vycházíme–li však z Galerkinova systému, lze odvodit (podobně jako u parabolických rovnic) formulaci

$$\int_0^T \{\langle u(t), \varphi''(t)\rangle + \langle A(t)u(t), \varphi(t)\rangle - \langle f(t), \varphi(t)\rangle\} \,\mathrm{dt} = (\varphi'(0), a_0) - (a_1, \varphi(0)). \quad (6.140)$$

Porovnáním (6.139) s (6.140) dostáváme

$$(a_0 - u(0), \varphi'(0)) + (u'(0) - a_1, \varphi(0)) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^2\left(\bar{I}; W_0^{1,2}(\Omega)\right).$$

Volbou testovacích funkcí s $\varphi(0) = 0$ a pak s $\varphi'(0) = 0$ dostáváme $u(0) = a_0$ a $u'(0) = a_1$, což bylo třeba dokázat.
Důkaz věty 6.2.10 je úplný. □

Čtenáři je ponechána k rozmyšlení následující věta, která je základem úvah o regularitě slabých řešení hyperbolických *lineárních* problémů.

Věta 6.2.11
Jsou–li koeficienty operátorů $\mathcal{L}$ vesměs z $W^{2,\infty}$, je–li $\Omega \in \mathcal{C}^{1,1}$ a $a_0 \in W^{2,2}(\Omega)$, $a_1 \in W^{1,2}(\Omega)$ a $f' \in L^2(I; L^2(\Omega))$, pak slabé řešení u úlohy (H1) *s $u_0 = 0$ splňuje*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty\left(I; W^{2,2}(\Omega)\right), \\ u' &\in L^\infty\left(I; W_0^{1,2}(\Omega)\right), \\ u'' &\in L^\infty\left(I; L^2(\Omega)\right), \\ u''' &\in L^2\left(I; W^{-1,2}(\Omega)\right). \end{aligned} \tag{6.141}$$

Důkaz. Mnoho štěstí. □