ZKOUŠKY Z MA PRO 3. SEMESTR, OBOR FYZIKA

šk. rok 1995/96, přednášející: M. Rokyta, KMA

Zkoušky obecně.

Řádné termíny zkoušek se konají 11.1., 16.1., 23.1., 30.1., a 6.2.1995 vždy od $9.^{00}$ hod v posluchárně K1 (Karlín). (Viz seznam, do kterého jste se zapisovali na přednášce; tento seznam bude ve zkouškovém období viset na chodbě naproti posluchárně K2, takže se do něj dále můžete zapisovat, přepisovat ...) Obecně však platí, že tento seznam je pouze orientační, ke zkoušce může přijít i ten, kdo se nezapíše a naopak. Zkouška začíná písemnou částí. Písemku píšou všichni společně, dostavte se proto včas. Po skončení písemné části a jakémsi čase, nutném k opravení písemek, zahájíme ústní část zkoušky. Ústní zkouška bude probíhat individuálně a pořadí, v jakém na ni budete chodit, dohodneme po písemce.

Další termíny zkoušek (po začátku letního semestru) dohodneme, až bude znám rozvrh.

Písemná část zkoušky.

Písemná část zkoušky trvá dvě hodiny, ve kterých bude nutno vyřešit tři příklady z následujícího okruhu témat:

(1) Bodová a stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí.
(2) Integrace posloupností a řad, Leviho a Lebesgueova věta.
(3) Sestavit a vyřešit Euler-Lagrangeovu rovnici k danému funkcionálu.
(4) Integrály s parametrem.
(5) Fubiniho věta a věta o substituci.

Literatura k písemné části zkoušky.

V uvedených sbírkách či skriptech je dostatečné množství příkladů ke všem třem tématům. Pokud někdo nemá k této literatuře snadný přístup, může mě navštívit a nechat si nějaké příklady oxeroxovat. Doporučuji zejména [Kop II], [Kop III].

[Ber] G.N. Berman, *Sbornik zadač po kursu matěmatičeskovo analiza*, (rusky), Nauka, Moskva, 1977.

[Dem] B.P. Děmidovič, *Sbornik zadač i upražněnij po matěmatičeskomu analizu*, (rusky, základní sbírka, všechny ostatní vznikly víceméně opisováním příkladů odsud), Nauka, Moskva, 1976.

[Kop II] Jiří Kopáček (& kol.), *Příklady z matematiky pro fyziky II.*, skriptum MFF UK, SPN, 1989 (obsahuje: Variační počet, posloupnosti a řady funkcí.).

[Kop III] Jiří Kopáček (& kol.), *Příklady z matematiky pro fyziky III.*, skriptum MFF UK, SPN, 1988 (obsahuje: Lebesgueova míra a integrál, integrály s parametrem, Leviho a Lebesgueova věta, Fubiniho a substituční věta.).

[π] Jaroslav Lukeš, *Příklady z matematické analýzy I. (Příklady k teorii Lebesgueova integrálu).*, Skriptum MFF UK, 1984 (Obsahuje: vše kolem Lebesgueovy teorie. Souhrn vět, dosti příkladů, hodně z nich řešených a většina s návodem k řešení.).

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Konzultace.

Jsem k dispozici pro konzultování libovolného problému z analýzy, ať už souvisí s přednáškou či nikoli, a to komukoli kdykoli po předběžné dohodě: telefon ke mně do pracovny je 21913269. Pracovnu mám v Karlíně (= Sokolovská 83), 2. patro, KMA (= rovně proti schodům), č. dveří 214.

Pokud se vám nepodaří mě telefonicky zastihnout, můžete to udělat taky tak, že přijdete ve dni, kdy zkouším a domluvíte se se mnou. Telefon domů bohužel nemám. Kdyby mi někdo chtěl psát, může: M.R., Komenského 357, 253 01, Hostivice, okr. Praha-západ.

Literatura k ústní části zkoušky.

Nejblíže přednášce jsou skripta Kopáček a kolektiv, a to následujícím způsobem:

– v [K2] najdete: Posloupnosti a řady funkcí,

– v [K3] najdete: Vše ohledně kapitoly 3 (Leb. míra a integrál), v novém vydání též variační počet.

– v [K4] najdete: Křivkový a plošný integrál.

Seznam doporučené literatury:

[ρ] —, *Vlastní poznámky z přednášek*, 1994/95.
[K2] Kopáček, J., *Matematika pro fyziky II.*, SPN (skriptum MFF UK).
[K3] Kopáček, J., *Matematika pro fyziky III.*, SPN (skriptum MFF UK).
[K3] Kopáček, J., *Matematika pro fyziky IV.*, SPN (skriptum MFF UK).

Přeju hodně štěstí u všech zkoušek.

M. Rokyta, 12.12.1995

POŽADAVKY K ÚSTNÍ ZKOUŠCE

Požadavky jsou rozděleny do několika základních okruhů. V každém okruhu nejprve specifikuji **pojmy**, které s danou problematikou souvisejí a které byste měli znát. Následuje výčet **faktů** z daného okruhu, které považuji za důležité. "Bez důkazu" znamená bez důkazu, jinak vždy s důkazem.

1. Posloupnosti a řady funkcí.

Pojmy: bodová konvergence; stejnoměrná konvergence; lokálně stejnoměrná konvergence; absolutní bodová konvergence; mocninná řada; kruh konvergence; poloměr konvergence; konvergenční kružnice. ■ Bolzano-Cauchyova podmínka stejnoměrné konvergence. ■ Ekvivalentní podmínka stejnoměrné konvergence (věta o σ_n). ■ Nutná podmínka stejnoměrné konvergence řady. ■ Weierstrassovo, Leibnitzovo, Abel-Dirichletovo kriterium pro stejnoměrnou konvergenci (bez důkazů). ■ Věta o limitě a spojitosti pro posloupnosti i pro řady (bez důkazů). ■ Věta o derivování a primitivní funkci pro posloupnosti a řady funcí. ■ Věta o Reimannově integrálu posloupnosti a řady funkcí (s důkazem pro spojité funkce). ■ Věta o konvergenci mocninné řady pro $|z| < |z_1|$, pokud $\sum a_n z_1^n$ konverguje. ■ Věta o poloměru a kruhu konvergence mocninné řady. ■ Vzorec pro poloměr (bez důkazu). ■ Abelova věta o konvergenční kružnici.

2. Úvod do variačného počtu.

Pojmy: Funkcionál; Gâteauxův diferenciál; kritický bod funkcionálu; Euler-Lagrangeova rovnice. ■ Definice Gâteauxova diferenciálu. ■ Eulerova věta o kritickém bodu (bez důkazu). ■ Euler-Lagrangeova věta o E-L rovnici (bez důkazu).

3a. Lebesgueova míra.

Pojmy: Okruh, σ-okruh, algebra, σ-algebra; symetrická diference; interval v $\mathbb{R}^n$ a jeho kanonické rozdělení; simultánní kanonické rozdělení; systémy množin S_n a E_n; aditivní funkce množiny; regulární funkce množiny; vnější míra; Lebesgueova míra; lebesgueovsky měřitelné množiny; Borelovské množiny. ■ Vlastnosti množinového okruhu. ■ Existence simultánního kanonického rozdělení pro intervaly v $\mathbb{R}^n$ (náznak důkazu). ■ E_n je okruh. ■ Základní vlastnosti aditivní a σ-aditivní funkce, zejména chování na průniku a sjednocení množin. ■ Věta o existenci a jednoznačnosti rozšíření konečně aditivní funkce ze S_n na E_n. ■ Definice a vlastnosti vnější míry. ■ Definice Lebesgueovy míry a Lebesgueovsky měřitelných množin, jejich vlastnosti (zejména ukažte, že Lebesg. měřitelné množiny jsou největší okruh, který obsahuje intervaly a vnější míra je na něm aditivní; využijte bez důkazu lemma o ekvivalentní charakterizaci měřitelných množin); dále: míra bodu, spočetné množiny. ■ Vztah mezi Borelovskými a měřitelnými množinami.

3b. Lebesgueův integrál.

Pojmy: Měřitelná funkce; jednoduchá funkce; charakteristická funkce množiny; Lebesgueův integrál; konvergence a existence integrálu; integrál s parametrem; Gamma funkce; Fubiniho věta; věta o substituci; Jacobiho determinant. ■ Věta o operacích s měřitelnými funkcemi; spojitá funkce je měřitelná. ■ Integrál z jednoduché měřitelné funkce. ■ Věta o aproximaci jednoduchými funkcemi. ■ Lebesgueův integrál, jeho základní vlastnosti (bez důkazů, jak bylo odpředneseno; budu se ptát např.: jak je tomu s integrálem přes průnik smrskávajících se množin ...) ■ Věty Leviho, Lebesgueova. Fatouovo lemma. Vše s důkazy, ve verzích pro posloupnosti i řady. ■ Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem (bez důkazu). ■ Integrály s parametrem: věty o limitě, spojitosti, derivaci. ■ Gamma funkce a její základni vlastnosti. ■ Fubiniho věta, věta o substituci (bez důkazů, počítejte s možností, že budeme diskutovat příklad i u ústní zkoušky).

4. Křivkový integrál.

Pojmy: Křivka; jednoduchá křivka, uzavřená křivka; tečný a normálový vektor ke křivce; vektor binormály; křivkový integrál 1. a 2. druhu; potenciál vektorového pole. ■ Definicea základní vlastnosti křivkových integrálů obou druhů. ■ Věta o výpočtu integrálu pomocí potenciálu. ■ Ekvivalence nezávislosti integrálu na cestě. ■ Věta o existenci potenciálu.

Pozn. – 5. Plošný integrál.

Většinu z něj budu brát až po vánocích a budu zkoušet až v létě.

Pro zájemce připravím ještě “Sylabus” (tj. “co kdy bylo odpředneseno”) – k mání bude na přednášce 19.12.1995, či potom dále k vyzvednutí u mně.