PARCIÁLNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE I.

(klasická teorie)

Rukopisné poznámky k přednášce NDIR044
tak, jak jsi ve ZS 2009/10 přednášel

M. Rokyta, KMA

(drobné úpravy prosinec 2010-leden 2011)

další úpravy prosinec 2012

Jakékoli chyby, překlepy a nesrozumitelnosti směřujte prosím
na rokyta@karlin.mff.cuni.cz

OBSAH

PDR 1
(Klasická teorie)

1. ÚVOD

1.1. Úvodní poznámky, značení

Literatura
- vznikající skriptum (učební text) - web
- John, Nečas: Rovnice mat. fyziky
- L. C. Evans: PDE
- Renardy - Rogers: An introduction to PDE
- Dolda, John, Kopáček: Příklady z MA VI

Značení: • $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^s$, $\mathbb{R}^m$ → obecný prostor

d … dimenze prostoru x; s … systém, tj. počet rovnic v systému

snaha vyhnout se $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^k$; n, k budou vyhrazeny pro indexy.

• Pro $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, Ω otevřená,
značíme (v bodech $x \in \Omega$, ve kterých existují příslušné derivace vlastní)

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} \equiv u_{x_j} \equiv \partial_{x_j} u \quad \text{parc. derivaci dle } x_j,$$

$$\nabla u \equiv Du := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right) \quad \text{gradient } u.$$

Formálně lze psát

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right) \quad \text{operátor „nabla"}$$

$$\nabla : u \mapsto \nabla u$$

Pro $\vec{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, G otevřená, značíme (opět v bodech $x \in G$, ve kterých existují příslušné derivace vlastní)

$$\nabla \vec{f} := \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_s \end{pmatrix}, \quad \text{kde } \vec{f} = (f_1, \dots, f_s)^T$$
$$f_j : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},\ j = 1, \dots, s,$$

tedy „gradient, aplikovaný na vektor, uvažujeme po složkách."

- Pro $\vec{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, G otevřená, značíme (opět v bodech $x \in G$, ve kterých existují příslušné derivace vlastní)

$$\operatorname{div} \vec{f} := \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \equiv \nabla \cdot \vec{f} \quad \dots \text{divergence } \vec{f}$$

<u>Pozn</u>: Pro $\vec{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ je $\nabla \vec{f}$ (Jacobiho) matice prvních derivací $\vec{f}$, rozměru $m \times m$.
Divergence $\vec{f}$ je pak její stopa. Tedy máme

$$\nabla \cdot \vec{f} = \operatorname{Tr}(\nabla \vec{f}).$$

Nesmíme tedy zapomínat na „tečku, značící formální skalární součin" v $\nabla \cdot \vec{f}$.

- Pro $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, resp. $\vec{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ značíme (se stejnými konvencemi jako výše)

$$\Delta u := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}, \quad \Delta \vec{f} := \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \vdots \\ \Delta f_s \end{pmatrix}$$

tzv. Laplaceův operátor „Δ".

- <u>Pozn</u>: Šipku nad vektorovými fcemi budeme někdy vynechávat, bude-li z kontextu jasné, o co jde.

Derivování dle multiindexu.

- Vektor hodnot $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$, kde $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j=1,\dots,d$, nazveme d-dimenzionálním multiindexem výšky (někdy též řádu)
$$|\alpha| := \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \, ;$$
v literatuře se pro $|\alpha|$ též používá značení $\Sigma\alpha$ (Cihák).

- Pro multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ definujeme derivaci dle multiindexu α:
$$D^\alpha u := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}, \qquad u \in C^{|\alpha|}(\Omega), \; x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega .$$
Pro $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ zavádíme formální vektor (množinu) parc. derivací řádu k fce $u \in C^k(\Omega)$:
$$D^{(k)} u := \{ D^\alpha u, \; |\alpha| = k \} .$$

- Pro $\vec{f} : G \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ píšeme jako výše $D^\alpha \vec{f} = (D^\alpha f_1, \dots, D^\alpha f_s)^T$ atd.

Cvičení. Ukažte:

- Pro funkci $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $u \in C^k(\Omega)$, je počet prvků $D^{(k)} u(x)$, $x \in \Omega$, roven d^k.

- $D^{(0)} u = u$.
$D^{(1)} u = \nabla u = Du$ (viz předchozí značení).
$$D^{(2)} u = \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \; i,j = 1, \dots, d \right\} \equiv \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{d}}_{\text{Hessova matice}} =: H(u)$$

Přesvědčte se, že $\Delta u = \mathrm{Tr}(H(u))$.

Co je to PDR? Vágně: rovnice pro neznámou fci u více než 1 proměnné, která obsahuje alespoň nějakou její parciální derivaci.

Def. Buď $m \in \mathbb{N}$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $d \geq 2$. Vztah tvaru

$$F\left(x, u(x), Du(x), \dots, D^{(m-1)}u(x), D^{(m)}u(x)\right) = 0 \quad , \quad x \in \Omega, \qquad (1)$$

nazveme obecnou PDR pro neznámou funkci

$$u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}.$$

Zde

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^{d^{m-1}} \times \mathbb{R}^{d^m} \to \mathbb{R} \qquad (2)$$

je daná funkce.

Řádem rovnice (1) nazveme řád nejvyšší derivace u, která se vyskytuje v (1), přesněji: na které F nezávisí konstantně.

Poznámky
- Řád (1) je $\leq m$.
- $u = u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $x = (x_1, \dots, x_d)$.

Z fyzikální interpretace (1) hraje někdy jedna z x_i roli „času". Pak je zvykem buď tuto výjimečnou proměnnou značit „t", nebo „čas t" přidat jako novou proměnnou do fce u. Tedy buď uvažovat např.:

$$u = u(x), \quad x = (t, x_2, x_3, \dots, x_d), \quad x \in \Omega,$$

nebo uvažovat

$$u = u(t,x), \quad x = (x_1, \dots, x_d), \quad (t,x) \in (0,T) \times \Omega$$
$$T > 0.$$

I v tom druhém případě někdy ztotožňujeme $t \equiv x_0$ a píšeme $u = u(x)$, $x = (x_0, x_1, \dots, x_d)$, $x \in (0,T) \times \Omega$.

<u>Terminologie</u>: stacionární PDR : neobsahující čas
evoluční PDR : obsahující čas

Více než jednu rovnici pro více než jednu neznámou fci nazýváme systémem PDR. Oněch „více než jednu neznámou fci" lze také chápat jako jednu vektorovou funkci. Definice systému PDR pak vypadá takto:

<u>Def.</u> Buď $m \in \mathbb{N}$ a $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $d \geq 2$. Vztah tvaru

$$\vec{F}(x, \vec{u}(x), D\vec{u}(x), \ldots, D^{(n-1)}\vec{u}(x), D^{(n)}\vec{u}(x)) = 0 \quad , \; x \in \Omega, \qquad (3)$$

nazveme <u>systémem</u> PDR pro neznámou vektorovou funkci $\vec{u}: \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^s$, $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_s)^T$.

Zde

$$\vec{F}: \Omega \times \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^{sd} \times \ldots \times \mathbb{R}^{sd^{n-1}} \times \mathbb{R}^{sd^n} \to \mathbb{R}^m \qquad (4)$$

je daná vektorová funkce.

<u>Řádem</u> systému (3) nazveme řád nejvyšší derivace $\vec{u}$, která se vyskytuje v (3).

<u>Pozn</u>:

- Nejčastěji je $m = s$ (máme tolik rovnic jako neznámých funkcí), ale lze se setkat i se systémy tzv. <u>přeurčenými</u> ($m > s$) nebo tzv. <u>podurčenými</u> ($m < s$).

Pojem <u>řešení</u> (1) (resp. (3)) je vždy závislý na tom, v jakém smyslu chápeme derivace v (1) (resp. (3)) se vyskytující!

Z klasického pojetí vlastní derivace ve všech bodech $x \in \Omega$

vychází pojem tzv. klasického řešení (1) resp. (3).

Def. Klasickým řešením (1) (resp. (3)) v $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ nazveme funkci $u : \Omega \to \mathbb{R}$ (resp. $\vec{u} : \Omega \to \mathbb{R}^d$), mající ve všech bodech $x \in \Omega$ vlastní derivace až do řádu rovnice (1) resp. (3) včetně, a splňující (1) resp. (3) identicky v Ω.
(případně spojité)

Pozn.: • Existují i jiná, obecnější pojetí, při kterých se uvažují některé derivace u například jen ve s.v. bodech, případně se uvažují tzv. slabé derivace u, derivace u ve smyslu distribucí apod. Odtud pak pojmy tzv. slabých řešení, řešení ve smyslu distribucí apod.

Okrajové a počáteční podmínky, úloha, data úloh.

Někdy (často) chceme od řešení u, aby kromě rovnice splňovalo ještě tzv. okrajové podmínky, tj. to, že
u (případně některé jeho derivace) se má (mají) rovnat předem dané funkci, řekněme g, na $\Gamma \subset \partial\Omega$.
V případě evoluční rovnice, $u = u(t,x)$, a pokud

$$\Gamma \subset \{0\} \times \Omega \subset \partial\big((0,T) \times \Omega\big)$$

(podmínka je zadána „pro čas $t=0$"), hovoříme o tzv. počáteční podmínce (počátečních podmínkách, je-li jich víc).

Jednomu hledanému řešení je možno předepsat více než jednu okrajovou (počáteční) podmínku.

Vzniká tedy přirozená otázka, jestli vůbec existuje řešení, splňující naráz všechny předepsané podmínky, kolik takových řešení je, případně jaké mají vlastnosti.
V tom spočívá pojem tzv. <u>úlohy</u> (v kontextu PDR) a jejího <u>korektního zadání</u>. Nejprve ale příklad.

(P1) Hledejme $u = u(t,x,y) : (0,T) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$
$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ oblast, že

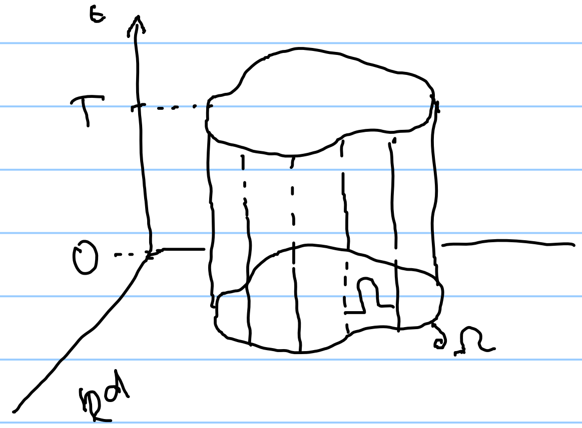
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \sin(xyt) \qquad \text{pro } (t,x,y) \in (0,T)\times\Omega \qquad (5)$$

$$u(0,x,y) = 1 \qquad \text{pro } (x,y) \in \Omega \qquad (6)$$

$$u(t,x,y) = t+1 \qquad \text{pro } (t,x,y) \in (0,T)\times\partial\Omega \qquad (7)$$

<u>Komentář</u>:

- Pracujeme v tzv. obecném <u>časoprostorovém válci</u> $(0,T)\times\Omega$:



Rovnici (5) řešíme <u>uvnitř</u> tohoto válce, podmínka (6) je <u>počáteční</u>, zadaná na jeho podstavě, podmínka (7) <u>okrajová</u>, zadaná na jeho („bočním") plášti.

Pozn: Intuitivně je zřejmé, že při definici řešení u celé tzv. úlohy (5)–(7) musíme také říci, v jakém smyslu budou splněny podmínky (6), (7), neboť funkce u se pro potřeby rovnice (5) uvažuje pouze uvnitř časoprostorového válce. Přesněji se tomu budeme věnovat při studiu konkrétních úloh.

Pozn. • V kontextu PDR rozumíme úlohou následující trojici:

(i) rovnici tvaru (1) resp. systém tvaru (3)

(ii) množinu bodů, na které má být definováno řešení (1) resp. (3). Typicky půjde o oblast či alespoň otevřenou množinu.

(iii) tzv. „data" úlohy, tj. sadu okrajových a počátečních podmínek. Často je vhodné mezi data zahrnout i koeficienty ve vztahu (1) resp. (3).

Tedy lze zjednodušeně říci: úloha = rovnice + oblast + data. V našem předchozím případě se tedy jedná o rovnici vedení tepla na časoprostorovém válci. Data úlohy tvoří funkce $\sin(xyt)$, 1, $t+1$, případně $1, -1$ (koeficienty u $\frac{\partial u}{\partial t}$ resp. Δu). Proč často zahrnujeme i koeficienty rovnice mezi data úlohy snad osvětlí následující poznámka.

Pozn: Řekneme, že úloha v kontextu PDR je korektně zadaná (přesněji „korektně zadaná v daném prostoru funkcí X"), pokud

(i) existuje řešení $u \in X$ PDR dané úlohy

(ii) toto řešení je jediné v prostoru X

(iii) toto řešení tzv. spojitě závisí na datech úlohy.

„Spojitou závislost na datech úloh" nebudeme v této chvíli přesně definovat, v podstatě se tím vždy myslí výrok typu „malá změna dat má za následek malou změnu řešení". V praxi se to často realizuje dokázáním nerovnosti tvaru

$$\|u_1 - u_2\| \le c \sum_{j=1}^{k} \|\varphi_1^j - \varphi_2^j\| \qquad (8)$$

s vhodně zvolenými normami. Zde φ_i^j, $j=1,\dots,k$ jsou data úlohy, která má řešení u_i, $i=1,2$.

Pozn.: Spojitá závislost na datech má velký význam v praxi, kde se často data úloh znají jen přibližně. Pak je jistě žádoucí, aby malá změna v datech neměla za následek podstatnou změnu v (charakteru) řešení. Podobně při numerickém (přibližném) řešení úloh PDR.

Pozn.:
Úloha (5)–(7) má tuto fyzikální interpretaci: Je-li $u(t,x)$ teplota v bodě $x \in \Omega$ a čase $t \in (0,T)$, představuje (5) tzv. rovnici vedení tepla se zdroji tepla $\sin(xyt)$.
Podmínka (6) pak představuje předepsané rozložení teploty v čase $t=0$, podmínka (7) předepsané rozložení teploty „na stěnách místnosti" Ω. Při přemýšlení o této interpretaci můžeme dojít k podezření, že by úloha (5)–(7) mohla být korektně zadaná.
Toto podezření později zformulujeme jako matematickou větu.

V příštím paragrafu také naznačíme, jak lze rovnici vedení tepla odvodit.

Def. • PDR (1) nazveme <u>lineární</u>, lze-li ji psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \quad , \quad x \in \Omega \qquad (9)$$

pro dané funkce $a_\alpha(x)$ $(|\alpha| \le m)$, $f(x)$. Rovnici (9) nazveme <u>homogenní</u>, pokud $f \equiv 0$ v Ω, v opačném případě jí říkáme <u>nehomogenní</u>, případně „s pravou stranou".

• PDR (1) nazveme <u>semilineární</u>, lze-li ji psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha u + f(x, u, Du, \dots, D^{(m-1)}u) = 0 . \qquad (10)$$

• PDR (1) nazveme <u>kvazilineární</u>, lze-li ji psát ve tvaru

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x, u, \dots, D^{(m-1)}u) D^\alpha u + f(x, u, Du, \dots, D^{(m-1)}u) = 0 . \qquad (11)$$

• PDR (1) nazveme <u>ryze</u> <u>nelineární</u>, je-li F v (1) nelineární funkcí (alespoň) v některé z derivací u nejvyššího řádu.

<u>Pozn.</u> Jak semilineární, tak kvazilineární rovnice jsou „lineární vzhledem k nejvyšším derivacím u", u kvazilineárních rovnic však připouštíme závislost koeficientů a_α pro $|\alpha| = m$ na derivacích u až do řádu $m-1$.

Př: Buď $u = u(t,x)$, $t \in (0,+\infty)$, $x \in \mathbb{R}$. Potom rovnice:

- $$\frac{\partial u}{\partial t} + x^2 \Delta u = 0$$

  je lineární, homogenní rovnice 2. řádu, event. lze ještě říci: s nekonstantními koeficienty, evoluční.

- $$\frac{\partial u}{\partial t} + \sin^3 \sqrt{u + |\nabla u|^2}\, \Delta u = 0$$

  je kvazilineární (a jinak dtto)

- $$\frac{\partial u}{\partial t} + x^2 \Delta u + \sin^3 \sqrt{u + |\nabla u|^2} = 0$$

  je semilineární (...)

- $$\frac{\partial u}{\partial t} + (\Delta u)^2 = 0$$

  je ryze nelineární.

Př: $u = u(t,x)$, $t \in (0,T)$, $T > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$; PDR

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u) \frac{\partial u}{\partial x_j} = f(t,x,u)$$

je kvazilineární rovnice 1. řádu. Budeme se jí podrobně zabývat v paragrafu 1.3.

Pozn: jiný zápis: $\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{a}(t,x,u) \cdot \nabla u = f(t,x,u)$

—

1.2. Základní příklady PDR

Některé význačné PDR mají své jméno. V následujících rovnicích uvažujeme $u = u(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, pokud v rovnici není žádná časová derivace u, a $u = u(t,x)$, $t \in (0,T)$, $T>0$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ v opačném případě. Vždy je $\Omega \neq \emptyset$ oblast v $\mathbb{R}^d$.

Př.

$\Delta u = 0$ Laplaceova rovnice

$\Delta u = f(x)$ Poissonova (Laplace-Poissonova) r.

$-\Delta u = \lambda u$ Helmholtzova rovnice (rovnice pro hledání vl. čísel a fcí Laplaceova operátoru)

$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(t,x)$ $a \in \mathbb{R}$, $a>0$. Rovnice vedení tepla

$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f(t,x)$ Vlnová rovnice, $c>0$, $c \in \mathbb{R}$.

$i\frac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = f(t,x)$ Schrödingerova rovnice (jde sice o komplexní rovnici, ale zápisem $u(t,x) = v(t,x) + i w(t,x)$ ji lze ekvivalentně nahradit systémem dvou rovnic pro dvě reálné funkce v, w).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(t,x)$$

Rovnice lineárního transportu

Některé nelineární rovnice

$-\Delta u = f(u)$ Nelineární Poissonova rovnice

$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = 0$ Rovnice minimální plochy

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(u) \quad \text{Rovnice reakce - difuse}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta(u^\gamma) = 0 \quad \text{Rovnice porézního média}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \operatorname{div}(\vec{a}(\nabla u)) = f(u) \quad \text{Nelineární vlnová rovnice}$$

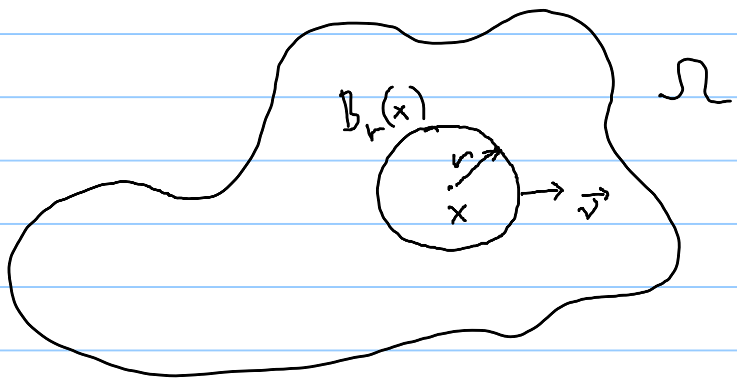
Odvození rovnice vedení tepla (RVT) metodou testovacích objemů

Cvičení
- ukažte: $\operatorname{div}(\nabla u) = \Delta u$ pro $u : \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $u \in C^2(\Omega)$
- Připomeňte si Větu o divergenci:

Buď $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ oblast s dostatečně hladkou (např. lipschitzovskou) hranicí $\partial\Omega$; buď $\vec{T} : \Omega \to \mathbb{R}^d$, $\vec{T} \in C^1(\Omega)^d \cap C(\overline{\Omega})^d$. Buď $\vec{\nu}$ pole jednotkových vnějších normál k Ω.

Potom
$$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{T}\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T}\, \vec{\nu}\, dS \qquad (12)$$

RVT odvodíme tzv. metodou testovacích objemů $G \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$, kde Ω je oblast, ve které chceme RVT odvodit. Uvažujme libovolné $x \in \Omega$, $G = B_r(x) \subset \Omega$, (koule o středu x a poloměru $r > 0$), a uvažujme libovolné $t > 0$ a $t_1 < t_2$, že $t \in (t_1, t_2)$



Při odvození budeme pracovat s následujícími veličinami:

a) $u(t,x)$ ... teplota v čase $t>0$ a bodě x

b) $c(x)$ .... měrná tepelná kapacita zkoumané látky, představující množství tepla, potřebného k ohřátí jednotkové hmotnosti látky o jeden teplotní stupeň.

Měrná tepelná kapacita může záviset obecně na prostoru či naopak i na teplotě, tedy $c = c(x, u(t,x))$, při našem odvození však vystačíme se zjednodušujícím předpokladem $c = c(x)$.

c) $\rho(x)$ ... hustota látky, tj. hmotnost jednotkového objemu.

Potom

$$Q_{t_1,t_2} := \int_{B_r(x)} c(y)\rho(y)\left[u(t_2,y) - u(t_1,y)\right] dy$$

je množství tepla, potřebné ke změně teploty koule $B_r(x)$, ke které dojde mezi časy $t_1 < t_2$.

Pozn: Srovnejte vztah pro Q_{t_1,t_2} se vztahem, který možná znáte ze střední školy, a sice

$$Q = mc\,\Delta T,$$

kde Q představovalo množství tepla, potřebného k ohřátí tělesa s hmotností m a měrnou tepelnou kapacitou c, o teplotu $\Delta T = T_2 - T_1$.

Označme dále

d) $f(t,x)$ ... funkci, popisující zdroj tepla v Ω v tom smyslu, že

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_G f(\tau,y)\, dy\, d\tau$$

představuje celkové teplo, dodané zdroji v oblasti $G \subset \Omega$ mezi časy $t_1 < t_2$.

Tepelná bilance v $B_r(x)$ mezi časy $t_1 < t_2$ je pak (intuitivně) tato:

$$\underbrace{Q_{t_1,t_2}}_{\substack{\text{Změna množství} \\ \text{tepla v } B_r(x) \text{ mezi} \\ \text{časy } t_1,\, t_2}} = \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, k \, dS \, d\tau}_{\substack{\text{Množství tepla, které} \\ \text{projde přes hranici.}}} + \underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \int_{B_r(x)} f(\tau, y)\, dy\, d\tau}_{\substack{\text{Celkové teplo, dodané} \\ \text{zdroji v } B_r(x) \\ \text{v čase od } t_1 \\ \text{do } t_2}} \tag{13}$$

Zde $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \vec{\nu}$ je derivace ve směru normálového vektoru $\vec{\nu}$ ke $B_r(x)$, a k je koeficient tepelné vodivosti.

Koeficient tepelné vodivosti představuje množství tepla, které proteče jednotkovou plochou za jednotku času při jednotkovém teplotním gradientu. Obecně může záviset, podobně jako měrná tepelná kapacita, na prostorové proměnné i na teplotě, my opět předpokládáme, že $k = k(x)$.

Je potřeba říci, že výše uvedená bilance představuje nerigorózní krok, jde o jakési vyjádření naší představy o tom, co se při vedení tepla děje a jak to chceme naší rovnicí popsat.

Další postup je už „matematický", vycházející z tohoto idealizovaného předpokladu: všechny funkce (a event. i oblasti) v rovnici (13) jsou tak hladké, jak budeme potřebovat. Za tohoto předpokladu upravujeme (13):

Na levé straně (13) máme

$$\int_{B_r(x)} c\cdot\rho\,\underbrace{\big(u(t_2,y)-u(t_1,y)\big)}_{\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}(\tau,y)\,d\tau}dy = \int_{B_r(x)}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}(\tau,y)\,d\tau\; c(y)\rho(y)\,dy$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r(x)} c(y)\rho(y)\frac{\partial u}{\partial t}(\tau,y)\,dy\,d\tau$$

V prvním členu vpravo použijeme větu o divergenci

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial B_r(x)}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,k\,dS\,d\tau = \int_{t_1}^{t_2}\int_{\partial B_r(x)}(k\cdot\nabla u)\vec{\nu}\,dS\,d\tau = \int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r(x)}\operatorname{div}(k\nabla u)\,dy\,d\tau$$

Celkem z (13) plyne $\forall\, t_1<t_2\ \forall\, B_r(x)\subset\Omega$

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{B_r(x)}\underbrace{\Big[c(y)\rho(y)\frac{\partial u}{\partial t}-\operatorname{div}(k\nabla u)-f(\tau,y)\Big]}_{=:F(\tau,y)}dy\,d\tau = 0 \qquad (14)$$

Protože $F(\tau,y)$ je dle předpokladu (alespoň) spojitá v $\underset{t\in}{(t_1,t_2)}\times\underset{x\in}{B_r(x)}$.
(14) tedy implikuje, že musí být
$$F(t,x)=0.$$

Kdyby totiž například $F(t,x)>0$, lze ze spojitosti F najít takové $t_1<t_2$ a $r>0$, že $F(\tau,y)>0\ \forall\,(\tau,y)\in(t_1,t_2)\times B_r(x)$. To by byl spor se (14). Podobně pro $F(t,x)<0$. Proto je $F(t,x)=0$. Protože $(t,x)\in(0,T)\times\Omega$ bylo zvoleno libovolně, je $F(t,x)=0$ $\forall\,(t,x)\in(0,T)\times\Omega$. Tedy jsme ukázali, že

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}-\operatorname{div}(k\nabla u)=f(x,t) \qquad (15)$$

je rovnice, charakterizující bilanci tepla v Ω a $(0,T)$.
Jde o obecnou rovnici vedení tepla. Její jednodušší tvar vychází z několika zjednodušujících předpokladů:

c, ρ, k pokládejme na kladné konstanty a označme

$$a^2 := \frac{k}{c \cdot \rho} \quad , \quad \tilde{f} = \frac{f}{c \cdot \rho}$$

Potom (T) má tvar ($\mathrm{div}(\nabla u) = \Delta u$)

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = \tilde{f}} \quad \text{v } (0,T) \times \Omega . \qquad (16)$$

Této rovnici se říká RVT.

1.3. Cauchyova úloha pro kvazilineární PDR 1. řádu

Def. Buď $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, $t \in (0,T)$, $T > 0$, a uvažujme kvazilineární PDR 1. řádu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} a_j(t,x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(t,x,u), \quad x \in \mathbb{R}^d, \; t \in (0,T), \qquad (17)$$

kde $a_j, f \in \mathcal{C}((0,T) \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$.

- Funkci $u : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme <u>klasickým</u> řešením rovnice (17), pokud
  (i) $u \in \mathcal{C}^1((0,T) \times \mathbb{R}^d)$
  (ii) u splňuje (17) ve všech bodech $(t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d$.
- Rovnici (17) doplníme o počáteční podmínku tvaru

$$u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \qquad (18)$$

kde $u_0 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ je daná funkce. Úloha (17)–(18) na oblasti $(0,T) \times \mathbb{R}^d$ se nazývá <u>Cauchyova úloha</u> pro kvazilineární rovnici 1. řádu.
- Funkci $u : (0,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme <u>klasickým řešením</u> Cauchyovy úlohy (17)–(18), pokud u je klasickým řešením (17) a navíc splňuje (18) v následujícím smyslu:

$$\lim_{(t,y)\to(0+,x)} u(t,y) = u_0(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d. \qquad (19)$$

<u>Poznámky:</u> • Pod pojmem <u>Cauchyova úloha</u> se nejčastěji skrývá situace, kdy $\Omega = \mathbb{R}^d$ a počáteční podmínka (podmínky) je (jsou) zadány na celém prostoru. Někdy se též používá termín <u>lokální Cauchyova úloha</u> pro situaci, kdy řešení Cauchyovy úlohy hledáme pouze na jistém okolí $U \subset (0,T) \times \mathbb{R}^d$.

Poznámka: Někdy hovoříme o tzv. „oboustranné" Cauchyově úloze, čímž poněkud nepřesně popisujeme situaci, kdy hledáme řešení $u : (-T,T) \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

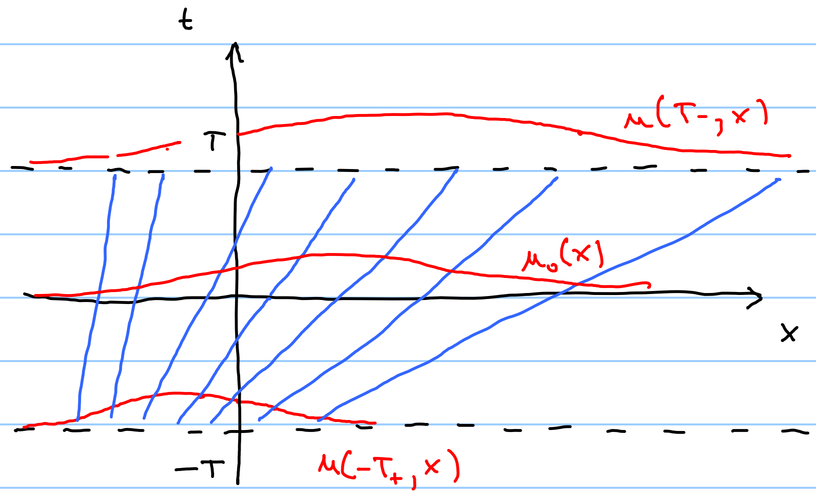
$$u \in C^1((-T,T)\times\mathbb{R}^d)$$

splňující (17) ve všech bodech $(t,x) \in (-T,T)\times\mathbb{R}^d$; přitom samozřejmě $a_j, f \in C((-T,T)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$.

„Počáteční" podmínka $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ se pak nabývá ve smyslu rovnosti funkcí $u/_{\mathbb{R}^d}$ a u_0, tedy

$$u(0,x) = u_0(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d \tag{19b}$$

Jde o situaci, ve které se informace, pocházející z hodnot funkce u_0, šíří po charakteristikách „jak dopředu tak zpět v čase".



Jednu z takových situací nacházejí předcházející obrázek.

Podobně se též někdy používá termín „lokálně oboustranná Cauchyova úloha" v situaci, kdy řešení Cauchyovy úlohy hledáme pouze na jistém okolí $U \subset (-T,T)\times\mathbb{R}^d$.

* (19) vlastně znamená, že $u \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}^d) \cap C(\langle 0,T)\times\mathbb{R}^d)$ a $u(0,x) = u_0(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$. Rozmyslete si.

Pozn.: • Při ztotožnění $t \equiv x_0$, $a_0(\underbrace{t,x}_{(x_0,x_1,\dots,x_d)=:\bar{x}},u) \equiv 1$, lze (17) psát takto (pro jednoduchost píšeme $\bar{x} \equiv x$):

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,u), \quad x \in (0,T)\times\mathbb{R}^d \qquad (17^*)$$

případně $\vec{a}(x,u)\cdot\nabla u = f(x,u)$.

Při hledání řešení (17*) budeme rozlišovat dvě možnosti:

$\boxed{\text{MOŽNOST I}}$ (17*) je homogenní, tj. $f \equiv 0$, neboli řešíme rovnici tvaru

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \quad x \in (0,T)\times\mathbb{R}^d. \qquad (17^{**})$$

Def. K rovnici (17**) přiřadíme systém obyčejných difer. rovnic (ODR), tzv. charakteristický systém (17**), pro neznámé fce

$$x_j := x_j(s), \quad s \in (\alpha,\beta), \quad j = 0,1,\dots,d, \qquad (20)$$

tvaru

$$\frac{d}{ds}x_j(s) = a_j(x,u(x)), \quad j = 0,1,\dots,d. \qquad (21)$$

Každé řešení systému (20) nazvu charakteristikou rovnice (17**), přesněji: charakteristickou křivkou $\vec{x} = \vec{x}(s) : (\alpha,\beta) \to (0,T)\times\mathbb{R}^d$, přiřazenou rovnici (17**) a funkci $u \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$.

<u>Pozn.</u> • Systém (21) je systém ODR 1. řádu se spojitou pravou stranou. Z teorie ODR [...] tedy plyne, že pro každou počáteční podmínku tvaru (BÚNO $0 \in (\alpha,\beta)$)

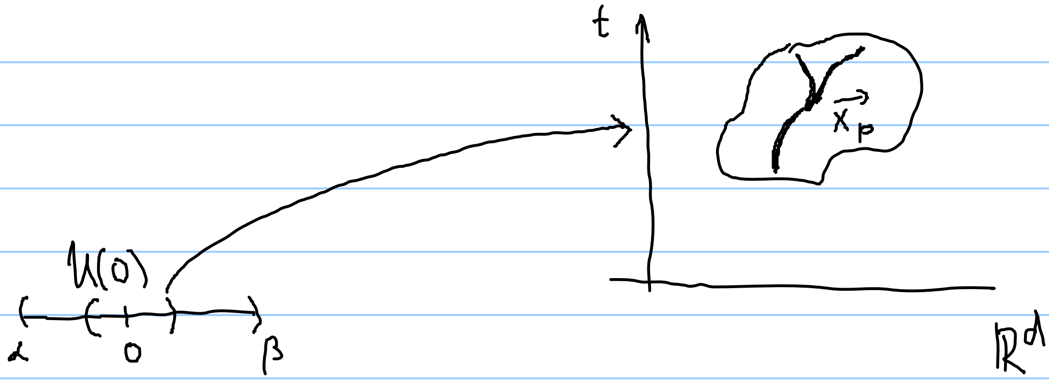
$$\vec{x}(0) = \vec{x}_p , \tag{22}$$

existuje okolí $U(0) \subset (\alpha,\beta)$ a funkce

$$\vec{x} = \vec{x}(s) : U(0) \longrightarrow (0,T) \times \mathbb{R}^d , \quad \vec{x} \in C^1(U(0)) ,$$

která je řešením (21) na $U(0)$, a splňuje p.p. (22).

Pozn., řešení nemusí být určeno jednoznačně (neboť a_j nemusí obecně splňovat lok. Lipschitz. podmínku ve druhé proměnné).



Charakteristiky tedy sice lokálně existují, i když obecně se mohou „křížit" resp. „dotýkat". Za dodatečných předpokladů na hladkost a_j (např., pro jednoduchost, $a_j \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$) dostáváme lokální existenci a jednoznačnost řešení úloh (21)–(22), případ „dotyku" či „křížení" charakteristik tedy nenastane.

Zkoumejme nyní chování funkce $u \in C^1((0,T)\times\mathbb{R}^d)$ na libovolné charakteristické křivce, která je jí přiřazena.

Výpočet:

$$\frac{d}{ds} u(x(s)) = \sum_{j=0}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s)) \underbrace{\frac{d}{ds} x_j(s)}_{a_j(x,u)} = \sum_{j=0}^{d} a_j(x(s), u(x(s))) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s)) \tag{23}$$

Z identity (23) okamžitě plyne následující lemma.

Lemma

(1) Nechť $\emptyset \neq \Omega \subset (0,T)\times\mathbb{R}^d$ oblast, $u \in C^1(\Omega)$ je konstantní na každé charakteristické křivce v Ω, která je přiřazena rovnici (17**) a funkci u. Potom u řeší rovnici (17**) v bodech charakteristik, které leží v Ω, v klas. smyslu.

(2) Nechť naopak $\emptyset \neq \Omega \subset (0,T)\times\mathbb{R}^d$ oblast, $u \in C^1(\Omega)$ je klasickým řešením (17**) v oblasti Ω. Potom u je konstantní na všech char. křivkách, přiřazených (17**) a u, které leží v Ω.

Důkaz (návod – rozmyslete podrobně).

(1) Z předpokladu plyne, že levá strana (23) je rovna 0. Tedy i pravá strana je rovna nule.

(2) Tentokrát předpoklad implikuje, že pravá strana ve (23) je nulová. $\boxtimes$

V obou případech si rozmyslete, co (1) a (2) přesně říkají a co ne.

Pozn. Obě tvrzení předchozího lemmatu lze nahradit jednodušším, i když poněkud nepřesným heslem:

$$\boxed{u \in C^1: \quad u \text{ řeší } (17^{**}) \iff u \text{ je konstantní na charakteristikách}}$$

Uvedené tvrzení umožní hledat řešení (17**) tzv. metodou charakteristik:

Př. Řešme
$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ c\in\mathbb{R},\ c\neq 0 \\ &u(0,x) = u_0(x) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Charakteristiky : $\frac{dx}{ds} = c$ & $x(0) = x_p$ $\Rightarrow$ $x(s) = c\cdot s + x_p$
(BÚNO $s_0 = 0$) $\frac{dt}{ds} = 1$ & $t(0) = t_p$ $\Rightarrow$ $\underline{t(s) = s + t_p}$

parametrizace charakteristiky procházející bodem (t_p, x_p)

Charakteristiku lze nalézt v rovině (x,t) vyloučením parametru s:

$$t = \frac{1}{c}(x - x_p) + t_p$$

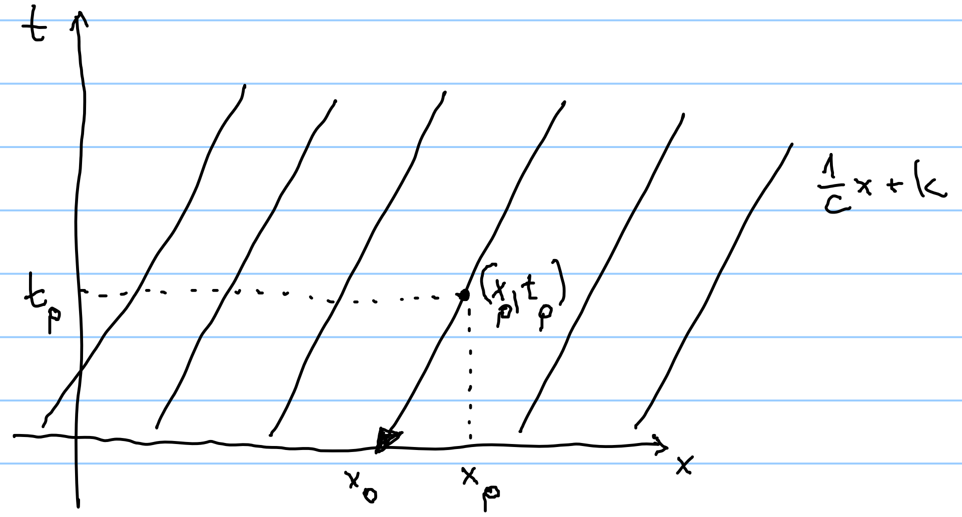
případně

$$\underline{c(t - t_p) = x - x_p}, \text{ nebo } \boxed{x - ct = \text{konst}} = x_p - ct_p \qquad (25)$$

Existuje rychlejší (byť méně korektní) způsob, jak dojít k této rovnici charakteristiky: $\frac{dx}{ds} = c$, $\frac{dt}{ds} = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{ds}\cdot\frac{ds}{dx} = 1\cdot\frac{1}{c}$

odtud $t = \frac{1}{c}x + \text{konst}.$

Charakteristiky jsou tedy přímky v rovině (x,t), se směrnicí $\frac{1}{c}$:



Protože hledáme u, které je konstantní na charakteristikách, je jasné, že pro každý bod (x_p, t_p) charakteristiky musí platit

$$u(t_p, x_p) = u(0, x_0) \underset{\text{poč. podm.}}{=} u_0(x_0)$$

kde z (25) plyne $\quad x_0 - c\cdot 0 = x_p - ct_p \quad$ ($(x_0, 0)$ a (x_p, t_p) leží na téže charakt.)

Tedy $\quad u(t_p, x_p) = u_0(x_p - ct_p) \quad$ a to pro všechny (x_p, t_p)

$\Rightarrow \quad \underline{u(t,x) = u_0(x - ct)} \quad$ je (jediné) řešení Cauchyovy úlohy (24).

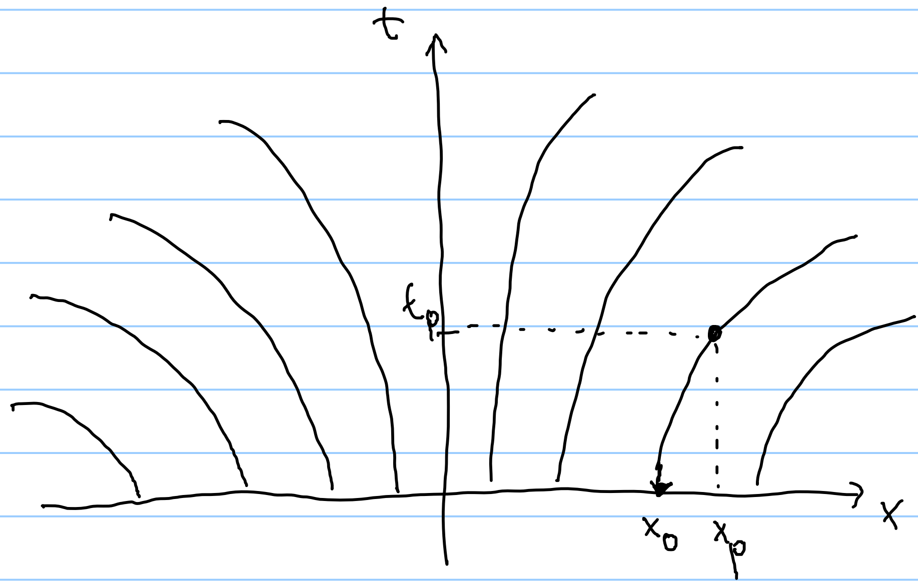
Pozn.: Uvedené rovnici se říká „rovnice transportu" – transportuje hodnoty poč. podmínky ve směru charakteristik.

Př.: Složitější:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + x\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad t>0,\ x\in\mathbb{R}$$
$$\underline{u(0,x) = u_0(x)}$$

Nejprve: $x \neq 0$, jinak rovnice tzv. degeneruje. Řešíme tedy úlohu separátně pro $x>0$ a $x<0$ s vírou, že klasická řešení (C^1) pravděpodobně bude možné „slepit", tj. definovat je na celém $\mathbb{R}$.

Charakteristiky:
$$\frac{dx}{ds} = x, \quad \frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$$
$$\Downarrow$$
$$t = \ln|x| + c, \text{ kde}$$

c dopočteme z požadavku $t_p = \ln|x_p| + c$
$$\underline{t - t_p = \ln\left|\frac{x}{x_p}\right|}$$



a, podobně jako výše:

$$u(t_p,x_p) = u_0(x_0), \qquad \ln|x_0| - \ln|x_p| = -t_p$$

$$|x_0| = |x_p|e^{-t_p}$$

stejná znaménka $\Rightarrow$ $x_0 = x_p e^{-t_p}$

$$\boxed{u(t,x) = u_0(xe^{-t})}$$

. Toto u je definováno $\forall x \in \mathbb{R}, t>0$.

Než uvedeme následující příklad, ve kterém půjde o kvazilineární rovnici, učiníme následující diskusi:

Funkce a_j v (14**), resp. (21) závisejí obecně na x i $u(x)$. Rozlišme následující dva případy:

① $a_j = a_j(x)$, tj. a_j nezávisejí na u. Potom systém (21) je tvaru

$$\frac{d}{ds} x_j(s) = a_j(x(s)), \quad j = 1, \dots, d. \tag{21*}$$

Jde obecně o nelineární systém, charakteristiky jsou tedy obecně nelineární křivky. Na druhou stranu ve (21*) nijak nevystupuje „neznámá funkce $u(x)$", řešení (21*) i řešení u rovnice (14**) lze tedy často nalézt explicitně – viděli jsme to v předchozím příkladu.

② $a_j = a_j(u(x))$, tj. a_j nezávisejí explicitně na x, pouze prostřednictvím $u(x)$. Na první pohled se tedy zdá, že půjde o komplikovanější případ, proto je často překvapivé zjištění, že charakteristiky, přiřazené rovnici (14**) a jejímu řešení $u \in C^1((0,T)\times\Omega)$, jsou vždy <u>přímky</u> resp. jejich části. Skutečně: je-li

$$\frac{d}{ds} x_j(s) = a_j(u(x(s))), \quad j = 1, \dots, d, \tag{21**}$$

charakteristický systém (14**), a $u \in C^1((0,T)\times\Omega)$ řeší (14**) v $(0,T)\times\Omega$, pak podle Lemmatu [str. 21] je u konstantní na charakteristikách (17**). Proto i $a_j(u(x)) =: \lambda_j \in \mathbb{R}$ jsou na charakteristikách rovnice (17**) konstanty, v důsledku čehož má systém (21**) tvar:

$$\frac{d}{ds} x_j(s) = \lambda_j \quad , j = 1, \dots, d .$$

Odtud již plyne, že charakteristiky jsou přímky (nebo jejich části).

Charakteristiky jsou tedy ve druhém případě jednodušší, vyjádřit řešení $u = u(t)$ však často lze jen implicitně. Dobře to ilustruje následující důležitý příklad.

(Př.)
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}\right\}$$
(tzv. nevazká Burgersova rovnice)
Zde tedy $a(u(t,x)) = u(t,x)$.

Řešení hledáme opět na $(0,T) \times \mathbb{R}^d$, počáteční podmínku $u_0(x)$ nadále blíže nespecifikujeme.

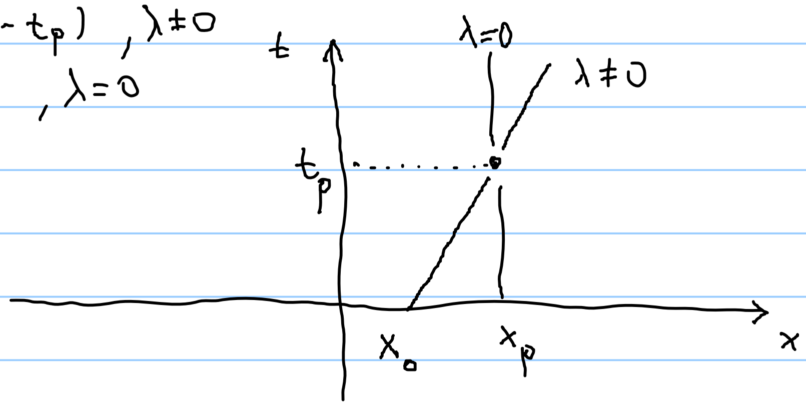
Rovnice charakteristik: $\frac{d}{ds} t = 1$

$\frac{d}{ds} x = u(t,x) = \lambda \in \mathbb{R}$ (víme, že stačí uvažovat konstanty)

Uvažujme p.p. pro charakteristiku $t(0) = t_p$, $x(0) = x_p$, pak dostaneme řešení charakteristické rovnice ve tvaru $t = t_p + s$, $x = x_p + \lambda s$

nebo $x - x_p = \lambda(t - t_p)$, $\lambda \neq 0$

případně $x = x_p$, $\lambda = 0$



Jak pro $\lambda \neq 0$ tak pro $\lambda = 0$ je $x_0 = x|_{t=0}$ charakterizováno rovnicí

$$x_0 - x_p = -\lambda t_p$$

a tedy řešení u (konstantní na charakteristice) splňuje

$$u(t_p, x_p) = u_0(x_0) = u_0(x_p - \lambda t_p)$$

To platí pro libovolné $(t_p, x_p) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d$, lze tedy vynechat index "p" a psát

$$u(t,x) = u_0(x - \lambda t), \quad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d.$$

Problém tohoto vztahu je však v tom, že $\lambda = u(t,x) = u_0(x_0)$ a že tedy jde o <u>implicitní</u> popis řešení ve tvaru

$$\boxed{u(t,x) = u_0(x - t u(t,x)), \qquad (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d} \qquad (26)$$

Předpokládejme $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$. Z předchozího vztahu vidíme:

- Pokud existuje $\lim\limits_{(\tau,y) \to (0+,x)} u(\tau,y) =: u(0+,x)$, platí

$$u(0+,x) = u_0(x),$$ a tedy poč. podmínka pro řešení (26) nevazké Burgersovy rovnice je splněna v klasickém smyslu.

- Pokud $u \in C^1(\mathcal{U}(t,x))$, $\mathcal{U}(t,x) \subset (0,T) \times \mathbb{R}^d$, dostaneme v bodě (t,x) implicitním derivováním vztahu (26) podle t resp. x

$$u_t = u_0'(\underbrace{x - tu}_{x_0}) \cdot (-u - t u_t)$$

resp. $$u_x = u_0'(\underbrace{x - tu}_{x_0}) \cdot (1 - t u_x)$$

odkud

$$u_t(1 + t u_0'(x_0)) = -u \cdot u_0'(x_0)$$

$$u_x(1 + t u_0'(x_0)) = u_0'(x_0).$$

Vidíme, že pro $1 + t u_0'(x_0) = 0$ dostaneme problém s 1. derivací u_t a u_x. Pokud se $1 + t u_0'(x_0)$ blíží k nule, blíží se derivace u_t a u_x k nekonečnu. Tomuto jevu se říká <u>blow-up (v) gradientu</u> řešení a

v uvedených úvahách je patrné, že může nastat v konečném čase.
Je-li $u_0'(x_0) \geq 0$, je $1 + t u_0'(x_0) \geq c > 0$ pro všechna $t \geq 0$ a k blow-upu v gradientu nedojde.
Pro $u_0'(x_0) < 0$ však

$$t_0^* := -\frac{1}{u_0'(x_0)} > 0 \qquad (27)$$

je čas, v jehož okolí může gradient řešení u růst nade všechny meze a tedy u přestane být klasickým řešením naší úlohy.

Tento jev lze předvést na modelovém příkladě, ve kterém zvolíme počáteční podmínku u_0 takto: pro $n \in \mathbb{N}$ mějme

$$u_0(x) = \begin{cases} n, & x < 0 \\ v(x), & x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0, & x > 0 \end{cases} \qquad (28)$$

kde funkci $v(x)$ volíme tak, aby $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ a $v'(x) < 0$ pro $x \in (0,1)$

Charakteristiky jsou části přímek, které mají rovnici

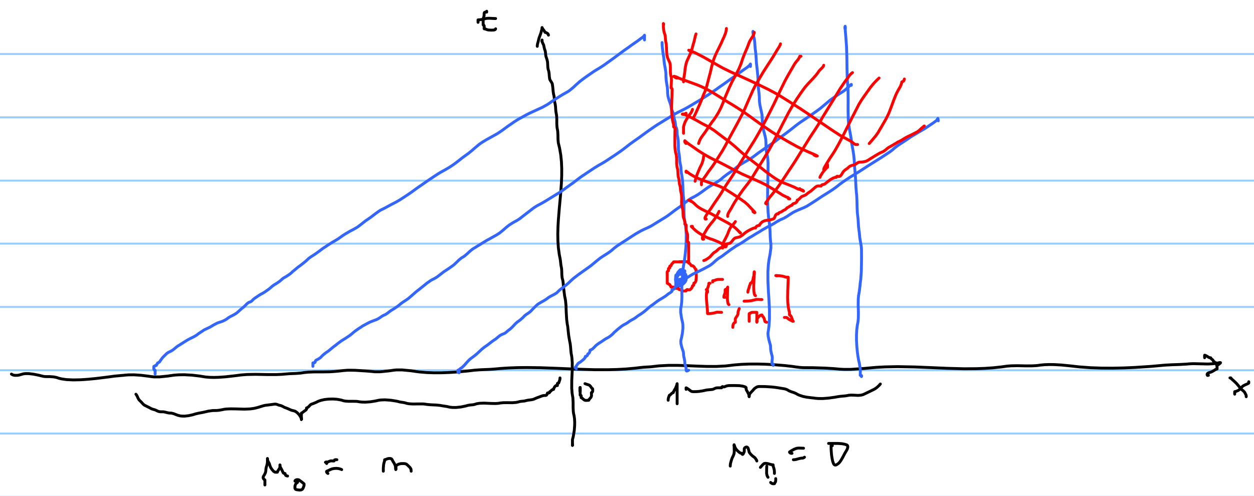
$$x_0 - x = -\lambda t,$$

pokud procházejí body (t, x) a $(0, x_0)$, v nichž má řešení u hodnotu $\lambda = u_0(x_0)$.
Pokud $\lambda \neq 0$, lze charakteristiku psát

$$t = \frac{1}{\lambda}(x - x_0) = \frac{1}{u_0(x_0)}(x - x_0)$$

tedy jde v rovině "x − t" o přímku se směrnicí $\frac{1}{u_0(x_0)}$. Totéž lze však říci i v případě $\lambda = 0 < u_0(x_0)$,
kde má rovnice charakteristiky tvar $x = x_0$, tedy jde o kolmici k ose „x".

V našem případě tedy dostáváme, že charakteristiky pro nevazkou Burgersovu rovnici a počáteční podmínku (28) jsou přímky se směrnicí $\frac{1}{m}$, pokud protínají osu x v bodech $x \le 0$, a jsou to kolmice k ose x pro $x \ge 1$.



Vidíme, že v bodě $x = 1, t = \frac{1}{m}$ došlo k problému: charakteristiky se protly. Řešení u, pokud by v tomto bodě existovalo, muselo by v něm mít jak hodnotu m (přenesenou po charakteristice), tak hodnotu 0 (přenesenou po jiné charakteristice). Stejný problém nastává v celém šrafovaném „úhlu" $1 \le x \le mt$.
Závěr je, že pro $t \ge \frac{1}{m}$ neexistuje klasické řešení nevazké Burgersovy rovnice s poč. podmínkou (28).

Poznámka: Pro u_0 definované v (28) je $u_0'(x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$.
Na $(0,1)$ máme $u_0'(x) < 0$. Z Lagrangeovy věty, aplikované na $u_0|_{\langle 0,1\rangle}$ dostaneme, že $\exists\, x_0 \in (0,1)$ takové, že

$$u_0'(x_0) = \frac{0 - m}{1 - 0} = -m .$$

Z těchto úvah plyne, že odpovídající kritický čas t_0^* (viz (27.1)) je menší nebo roven hodnotě $\frac{1}{n}$ (k blow-upu dojde nejpozději v tomto čase). Porovnejte to s výsledkem, kterého jsme dosáhli „hledáním průsečíků charakteristik".
Z uvedených úvah si lze odnést následující poučení:

Už v případě velmi jednoduché kvazilineární rovnice 1. řádu ($a(u) = u$ je „nejjednodušší možná" kvazilineární závislost), v jedné prostorové dimenzi, existuje pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ taková počáteční podmínka u_0, že klasické řešení odpovídající Cauchyovy úlohy existuje nejvýše pro $t \in (0, \frac{1}{n})$. Tento jev přitom nesouvisí s hladkostí dat: $a(u) = u$ je nekonečně krát diferencovatelná v proměnné u, a také počáteční podmínku $u_0(x)$ lze zkonstruovat libovolně hladkou (vhodnou volbou funkce v), přičemž uvedený efekt neexistence klasického řešení pro $t > \frac{1}{n}$ zůstane.

V kapitole 2 se na toto pozorování odvoláme.

Pokračujme ve studiu rovnice (17*) tam, kde jsme na str. 19 rozlišili dvě možnosti. Zbývá nám

$\boxed{\text{MOŽNOST } \underline{\text{II}}}$, $f \neq 0$, tedy řešíme obecnou rovnici tvaru

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial u}{\partial x_j} = f(x,u), \quad x \in (0,T)\times\mathbb{R}^d \qquad (17^*)$$

s poč. podm.

$$u(x) = u_0(\bar{x}) \qquad \text{pro } \{x\in(0,T)\times\mathbb{R}^d,\ x_0=0\} \qquad (29)$$

kde $x=(x_0,x_1,\dots,x_d)$, $\bar{x} = (x_1,\dots,x_d)$. Úlohu (17*), (29) budeme řešit tak, že nejprve vyřešíme jinou úlohu s homogenní rovnicí! Problém se tím převede do situace Možnost I.

$\boxed{\text{Lemma}}$ Buďte $a_j(x,u)$, $f(x,u) \in C((0,T)\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R})$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d)$ a buď $w = w(x,u) : G\times J \to \mathbb{R}$, $G \subset (0,T)\times\mathbb{R}^d$, $J\subset\mathbb{R}$ oblasti, klasické řešení úlohy

$$\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u)\frac{\partial w}{\partial x_j} + f(x,u)\frac{\partial w}{\partial u} = 0 \qquad \text{na } G\times J, \tag{30}$$

$$w(x,u) = u - u_0(\bar{x}) \qquad \text{pro } \{x\in G,\ x_0 = 0\}, \tag{31}$$

kde $x = (x_0, x_1, \dots, x_d)$, $\bar{x} = (x_1, \dots, x_d)$.

Buď $(x_p, u_p) \in G\times J$ takový, že $w(x_p, u_p) = 0$,

$$\frac{\partial w}{\partial u}(x_p, u_p) \neq 0.$$

Potom existují okolí $U(x_p)$, $U(u_p)$ a funkce $u \in C^1(U(x_p))$ takové, že

(i) $\frac{\partial w}{\partial u}(x,u) \neq 0 \quad \forall (x,u) \in U(x_p)\times U(u_p)$

(ii) $w(x, u(x)) = 0 \quad \forall x \in U(x_p)$, $u(x_p) = u_p$

(iii) $u = u(x)$ je klasické řešení úlohy (17*), (29) na $U(x_p)$.

Důkaz. (i) a (ii) jsou přímé důsledky věty o implicitních funkcích. Existence okolí $U(x_p)$, $U(u_p)$ a (implicitní) funkce $u = u(x)$ na $U(x_p)$ dokonce nijak nesouvisí s tím, že w řeší nějakou rovnici.

(iii) Pro $x \in U(x_p)$ máme

$$w(x, u(x)) = 0 \qquad \Big/ \frac{\partial}{\partial x_j},\ j = 0, \dots, d$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_j}(x,u(x)) + \frac{\partial w}{\partial u}(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = 0$$

Odtud vyjádříme $\frac{\partial w}{\partial x_j}$ a dosadíme to do (30):

$$\frac{\partial w}{\partial u}(x,u(x))\left[-\sum_{j=0}^{d} a_j(x,u(x))\frac{\partial u}{\partial x_j} + f(x,u)\right] = 0 \qquad x\in U(x_p)$$

Protože $\frac{\partial w}{\partial u} \neq 0$ pro $x \in U(x_p)$, plyne odtud (17*) na $U(x_p)$.

Počáteční podmínka: pro $\{x \in U(x_p);\ x_0 = 0\}$ je podle (31)

$$0 = w(x, u(x)) = u(x) - u_0(\bar{x})\ ,$$ cbd.

$\boxtimes$

2. VĚTA CAUCHYOVA - KOWALEVSKÉ

2.1. Reálně analytické funkce

Připomeneme resp. navedeme některá nová označení.

$y \in \mathbb{R}^m$: $\quad |y| := \sqrt{\sum_{j=1}^m y_j^2}$ Eukl. norma

$|y|_M := \max_{j=1,\dots,m} |y_j|$ maximová norma

Pro $\rho > 0$ a $y^0 \in \mathbb{R}^m$ označíme krychlové m-dimenzionální okolí bodu y^0 o poloměru ρ symbolem

$$I_\rho^m(y^0) := \{ y \in \mathbb{R}^m ;\ |y - y^0|_M < \rho \}, \qquad (1)$$

dále označme

$$I_\rho^m := I_\rho^m(0)$$

někdy též vynecháme označení dimenze (m), je-li jasné z kontextu.

Pro multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j = 1, \dots, m$, zavádíme kromě výšky α ($|\alpha| \equiv \Sigma\alpha := \alpha_1 + \dots + \alpha_m$) ještě tato označení:

$\alpha! := \alpha_1! \cdot \dots \alpha_m!$ faktoriál multiindexu

$y^\alpha := y_1^{\alpha_1} \dots y_m^{\alpha_m}$, $y \in \mathbb{R}^m$ umocnění na multiindex.

Při důkazu hlavní věty tohoto paragrafu budeme potřebovat následující technické lemma, zobecňující známou binomickou větu.

Lemma (multinomická věta)

Buď $k \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$. Potom

$$(a_1 + \dots + a_m)^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} a^\alpha \qquad (2)$$

přičemž $\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \in \mathbb{N}$, speciálně tedy $\frac{|\alpha|!}{\alpha!} \geq 1$. $\qquad (2^*)$

(D). Důkaz je přenechán čtenáři, s tímto návodem: postupujte indukcí dle m, využijte klasickou binomickou větu. $\boxtimes$

Cvičení

- Přesvědčte se, že pro $m = 2$ dostanete z (2) binomickou větu.

- Při označení $\Sigma a := a_1 + \dots + a_m$ pro $a \in \mathbb{R}^m$, lze (2) zapsat v této pěkné („symetrické") verzi

$$\frac{(\Sigma a)^k}{k!} = \sum_{|\alpha|=k} \frac{a^\alpha}{\alpha!} . \qquad (2')$$

Sečteme-li obě strany této rovnosti přes $\sum_{k=0}^{\infty}$, dostaneme

$$\exp(\Sigma a) = \sum_{\alpha} \frac{a^\alpha}{\alpha!} \qquad (3)$$

Ukažte, že výraz na pravé straně lze také obdržet jako výsledek součinu řad, odpovídajících výrazu

$$\exp(a_1) \cdot \dots \cdot \exp(a_m) .$$

Případně lze postupovat i naopak: vyjděte ze vztahu

$$\exp(a_1 + \dots + a_m) = \exp(a_1) \cdot \dots \cdot \exp(a_m) ,$$

nahraďte exponenciály na obou stranách řadami a dokažte tímto způsobem (alternativně) multinomickou větu. Přijatelné to stačí alespoň pro $e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$. Věděli jste, že v pozadí tohoto vztahu leží binomická věta?

Nyní zavedeme důležitý pojem <u>reálně analytické funkce</u> (RAF).

<u>Definice</u> (RAF) Buď $y^0 \in \mathbb{R}^m$, $\rho > 0$. Funkci $f: I^m_\rho(y^0) \to \mathbb{R}$ nazveme reálně analytickou v $I^m_\rho(y^0)$, pokud existují čísla $f_\alpha \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\sum_\alpha f_\alpha (y-y^0)^\alpha \qquad (4)$$

konverguje ve všech bodech $y \in I^m_\rho(y^0)$ k součtu $f(y)$. Dále řekneme, že f je reálně analytická <u>v bodě</u> y^0, pokud je reálně analytická na nějakém $I^m_\rho(y^0)$.

<u>Poznámky</u> • Symbol $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ v (4) jsou multiindexy a součet $\sum_\alpha$ je definován jako $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=k}$

• Naším cílem není samostatná studie RAF, proto jsme (bez důkazů) shrneme nejdůležitější fakta a tvrzení, která budeme potřebovat. Čtenář si jistě všimne analogie s teorií mocninných řad.

• Lze ukázat, že pokud řada (4) konverguje ve všech bodech $y \in I^m_\rho(y^0)$ k $f(y)$, pak také konverguje absolutně stejnoměrně na $I^m_\delta(y^0)$ pro všechna $0 < \delta < \rho$ a definuje na $I^m_\rho(y^0)$ nekonečněkrát spojitě diferencovatelnou funkci f. Nutnou podmínkou k tomu, aby f byla RAF na $I^m_\rho(y^0)$ je tedy $f \in C^\infty(I^m_\rho(y^0))$. Tato podmínka však není postačující.

• Řadu (4) lze navíc ve všech vnitřních bodech $I^m_\rho(y^0)$ libovolněkrát derivovat člen po členu, všechny smíšené parciální derivace jsou záměnné, a pro koeficienty f_α platí

$$f_\alpha = \frac{D^\alpha f(y^0)}{\alpha!} \,. \tag{5}$$

Řada (4) je tedy Taylorovou řadou svého součtu v $I_\rho^m(y^0)$. Je-li f RAF v $I_\rho^m(y^0)$, jsou koeficienty f_α řady (4) určeny jednoznačně, a to vztahy (5).

Důkazy těchto (i jiných tvrzení) lze nalézt např. v knize [Renardy-Rogers].

Navíc budeme potřebovat následující technické lemma.

Lemma. Buď

$$f(y) = \sum_\alpha f_\alpha (y - y^0)^\alpha \tag{6}$$

reálně analytická funkce v $I_\rho^m(y^0)$. Potom pro každé $0 < r < \rho$ existuje $M > 0$ takové, že

$$|f_\alpha| \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}} \tag{7}$$

D. Viz [Renardy-Rogers, str. 47]

2.2. Metoda majorace a věta Cauchyové – Kowalevské

Věta Cauchyové – Kowalevské zaručí lokální existenci a jednoznačnost lokální Cauchyovy úlohy pro systém kvazilineárních PDR 1. řádu. Příklady v předchozí kapitole ukazují, že více než lokální existenci řešení pro obecnou kvazilineární rovnici ani očekávat nemůžeme.

Větu zformulujeme a dokážeme v jejím klasickém tvaru, tj. pro evoluční kvazilineární systém 1. řádu, jehož koeficienty explicitně nezávisejí na časové proměnné t, a pro nulovou počáteční podmínku. Později ukážeme, že tento výsledek lze poměrně jednoduše rozšířit i na obecnou situaci, a dokonce i na systémy vyššího řádu.

Věta (Cauchy – Kovalevskaya = C.-K.)

Buďte $a_{ijr}(x,u)$, $b_r(x,u) : I_\rho^{d+s} \to \mathbb{R}$, $i=1,\dots,d$, $j,r=1,\dots,s$, reálně analytické v I_ρ^{d+s} pro nějaké $\rho>0$. Potom existuje $0<\rho'\leq\rho$ a reálně analytické funkce

$$u_r : I_{\rho'}^{d+1} \to \mathbb{R}, \quad r=1,\dots,s, \tag{8}$$

takové, že pro všechna $r=1,\dots,s$ platí

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d} a_{ijr}(x,u(t,x))\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(t,x) + b_r(x,u(t,x)) \qquad (t,x)\in I_{\rho'}^{d+1}, \tag{9}$$

$$u_r(0,x) = 0, \qquad x\in I_{\rho'}^{d}. \tag{10}$$

Ve třídě reálně analytických funkcí jsou tato u_r určena jednoznačně.

Důkaz této důležité věty provedeme podrobně. Budeme přitom využívat tzv. metodu majorizace, s níž se nyní seznámíme.

<u>Definice</u>. Nechť f a g jsou RAF na I^m_ρ, $\rho > 0$,

$$f(y) = \sum_\alpha f_\alpha y^\alpha \quad , \quad g(y) = \sum_\alpha g_\alpha y^\alpha \quad , \quad y \in I^m_\rho . \tag{11}$$

Řekneme, že g <u>majorizuje</u> f na I^m_ρ (případně g je majorantou f, f je majorizována g na I^m_ρ), pokud

$$|f_\alpha| \leq g_\alpha \qquad \forall \alpha \text{ multiindex}, \tag{12}$$

tedy (speciálně), že

$$|D^\alpha f(0)| \leq D^\alpha g(0) \qquad \forall \alpha \text{ multiindex}. \tag{12'}$$

Pro tuto situaci budeme používat značení $f \preceq g$ na I^m_ρ.

<u>Pozn</u>: Ze srovnávacího kritéria konvergence řad plyne: Pokud platí (12) resp. (12') a $\sum_\alpha g_\alpha y^\alpha$ konverguje, pak $\sum_\alpha f_\alpha y^\alpha$ konverguje absolutně.

<u>Definice</u>. Buďte $a_{ijr} \preceq \tilde{a}_{ijr}$, $b_r \preceq \tilde{b}_r$ na $I^{d+s}_{\rho'}$, $\rho' > 0$, $i = 1, \dots, d$, $j, r = 1, \dots, s$. Pak řekneme, že úloha

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{d} \tilde{a}_{ijr}(x, v(t,x)) \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(t,x) + \tilde{b}_r(x, v(t,x)) \qquad (t,x) \in I^{d+1}_{\rho'}, \tag{13}$$

$$v_r(0,x) = 0, \qquad x \in I^d_{\rho'} . \tag{14}$$

je <u>majorantní k</u> úloze (<u>majorizuje</u> úlohu) (9)–(10).

V této chvíli jsme připraveni dokázat větu C.–K. Důkaz je poměrně technický a je rozdělen na několik částí. Pro netrpělivé nebo pro lepší orientaci trpělivých můžeme nastínit způsob, jakým nebudeme dokazovat: Přesvědčíme se, že pokud má nějaká majorizující úloha RA řešení, má RA řešení i úloha, která je jí majorizována. Využijeme tuto informaci, sestrojíme k naší úloze (9)-(10) jistou speciální majorizující úlohu, pro kterou budeme schopni (dokonce) najít řešení v explicitním tvaru. Tím bude dokázána existence řešení. Jednoznačnost, kterou začneme, se v podstatě opírá o jednoznačnost Taylorova rozvoje RAF.

Důkaz věty C.-K.

□ Jednoznačnost. Ukážeme toto: pokud existují RAF $u_r : I_{\rho'}^{d+1} \to \mathbb{R}$, řešící (9)-(10), pak všechny jejich derivace $D^\alpha u_r(0)$ jednoznačně určeny koeficienty (tj. daty) rovnice (9).

Nechť tedy $r \in \{1,2,\dots,s\}$ a nechť α je multiindex o $d+1$ složkách. Označme $\alpha = (l, \beta)$, kde l odpovídá časové proměnné a β (multiindex o d složkách) odpovídá prostorovým proměnným.

Ukážeme dokonce, že existuje polynom $P_{r,\alpha}$ s nezápornými koeficienty (které nezávisejí na datech úloh) takový, že hodnotu $D^\alpha u_r(0)$ lze spočítat pomocí $P_{r,\alpha}$ tak, že do něj dosadíme hodnoty a_{ijk}, b_k a všech jejich derivací do řádu $|\alpha|$, v bodě 0, $j,k = 1,2,\dots,s$, $i = 1,\dots,d$. Symbolicky to můžeme napsat nějak takto:

$$D^\alpha u_r(0) = P_{r,\alpha}\left(D^{[\alpha]} a_{ijk}(0), D^{[\alpha]} b_k(0)\right). \qquad (15)$$

Důkaz (15) provedeme indukcí dle l.

(a) Nechť $l = 0$, jde tedy pouze o prostorové derivace. Protože dle (10) je $u_r(0,x) = 0$ v $I_{\rho'}^d$, je $D^\alpha u_r(0) = 0$ pro všechna $\alpha = (0, \beta)$. Stačí tedy zvolit $P_{r,\alpha} \equiv 0$, polynom s nezápornými koeficienty.

(b) Nechť $l > 0$ a nechť jsme zvolili všechny polynomy $P_{r,\alpha}$ pro všechna α s první složkou menší než l.

Pak

$$D^\alpha u_r = D^{(l-1,\beta)} \frac{\partial u_r}{\partial t} \overset{(9)}{=} D^{(l-1,\beta)}\left(\sum_{j=1}^{d}\sum_{i=1}^{d} a_{ijr}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + b_r\right). \quad (16)$$

Na pravé straně rovnosti se po úpravě vyskytují pouze derivace funkcí a_{ijr}, b_r a funkcí u_j podle multiindexu s první složkou menší než l. Uvažujeme-li rovnost v bodě 0, lze za tyto derivace funkcí u_j dosadit polynomy v proměnných a_{ijk} a b_k, a jejich derivací, s nezápornými koeficienty, čímž na pravé straně vznikne polynom $P_{r,\alpha}$. Jeho koeficienty jsou nezáporné, neboť vzniky derivováním součtů a součinů vpravo v (16), a dosazením polynomů s nezápornými koeficienty. Jako proměnné tohoto polynomu jsou použity pouze derivace funkcí a_{ijk}, b_k řádu nepřevyšujícího $|\alpha|$, vyčíslené v bodě 0. Tím je důkaz jednoznačnosti hotov.

□ 1. krok k existenci: Ukážeme, že pokud nějaká majorizující úloha tvaru (13)–(14) má v $I^{d+1}_{\rho'}$ RA řešení v_r, pak v $I^{d+1}_{\rho'}$ existují i RA řešení u_r úlohy (9)–(10). Definujme čísla $U_{r,\alpha} := P_{r,\alpha}(D^{[\alpha]}a_{ijk}(0), D^{[\alpha]}b_k(0))$, kde na pravé straně jsou výrazy z pravé strany vztahu (15). Potom dostaneme

$$|U_{r,\alpha}| = |P_{r,\alpha}(D^{[\alpha]}a_{ijk}(0), D^{[\alpha]}b_k(0))| \le P_{r,\alpha}(|D^{[\alpha]}a_{ijk}(0)|, |D^{[\alpha]}b_k(0)|),$$

v nerovnosti jsme využili toho, že koeficienty $P_{r,\alpha}$ jsou nezáporné. Dále je, s využitím téhož, a definice majorizující úlohy

$$P_{r,\alpha}(|D^{[\alpha]}a_{ijk}(0)|, |D^{[\alpha]}b_k(0)|) \le P_{r,\alpha}(D^{[\alpha]}\tilde{a}_{ijk}(0), D^{[\alpha]}\tilde{b}_k(0)) = D^\alpha v_r(0).$$

Poslední rovnost plyne z toho, že pro funkce v_r lze provést tatáž úvaha jako pro u_r v odstavci o jednoznačnosti. Protože úloha pro v_r má formálně stejný tvar jako úloha pro u_r, jsou i polynomy $P_{r,\alpha}$

když, jsme na proměnné dosazujeme hodnoty funkcí $\tilde{a}_{ijk}$, $\tilde{b}_k$ a jejich odpovídajících derivací v bodě 0. Celkem tedy máme

$$|U_{r,\alpha}| \leq D^\alpha v_r(0) \qquad \forall \alpha \text{ multiindex}, \ \forall r = 1,2,\dots,s. \tag{17}$$

Protože (pro $r = 1,\dots,s$) konvergují řady $\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} D^\alpha v_r(0) y^\alpha$ na celém $I_{\rho'}^{d+1}$, konvergují rovněž podle (17) a srovnávacího kritéria (viz poznámku za (12')) i řady

$$\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!} U_{r,\alpha} y^\alpha, \qquad r = 1,2,\dots s,$$

které tak definují na množině $I_{\rho'}^{d+1}$ reálně analytické funkce u_r, $r = 1,2,\dots,s$. Z jednoznačnosti koeficientů Taylorova rozvoje RA funkcí pak dostaneme

$$U_{r,\alpha} = D^\alpha u_r(0), \qquad r = 1,\dots,s, \quad \alpha \text{ multiindex}.$$

Z uvedené konstrukce je navíc jasné, že levé a pravé strany rovnic (9) a (10) se rovnají v bodě 0 (včetně všech svých derivací) a jsou si tedy rovny (z jednoznačnosti rozvoje RAF) všude v $I_{\rho'}^{d+1}$. Funkce u_r tedy řeší (9) – (10) ve třídě RAF.

□ <u>2. krok k existenci</u>: Nalezneme speciální problém pro funkce v_r, který bude majorizovat (9)–(10).

Zvolme libovolné $b \in (0,\rho)$. Podle lemmatu ze str. 35 existuje konstanta $M > 0$ taková, že

$$\left|\frac{D^\alpha a_{ijr}(0)}{\alpha!}\right| \leq \frac{M}{b^{|\alpha|}}, \qquad \left|\frac{D^\alpha b_r(0)}{\alpha!}\right| \leq \frac{M}{b^{|\alpha|}} \tag{18}$$

$\forall i = 1,\dots,d$, $\forall j,r = 1,\dots,s$ a pro všechny multiind. α (srov (41)). (Při volbě M využijeme toho, že indexů i,j,r je jen konečný počet.)

Zvolme dále $0 < \eta < \frac{b}{d+s}$. Potom existuje $q < 1$ takové, že pro $z = [x_1,\dots,x_d,v_1,\dots,v_s] \in I_\eta^{d+s}$ platí

$$\left|\frac{x_1 + \dots x_d + v_1 + \dots + v_s}{b}\right| \leq \frac{(d+s)\eta}{b} \leq q < 1. \tag{19}$$

Definujme nyní pro $z=(x,v)\in I_\eta^{d+s}$ funkci

$$H(z) := \frac{M}{1-\frac{x_1+\dots+x_d+v_1+\dots+v_s}{\zeta}} = M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x_1+\dots+x_d+v_1+\dots+v_s)^k}{\zeta^k} =$$

$$= M\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\zeta^k}\sum_{|\alpha|=k}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}z^\alpha = \sum_\alpha H_\alpha z^\alpha, \text{ kde } H_\alpha = \frac{M}{\zeta^{|\alpha|}}\frac{|\alpha|!}{\alpha!}\geq\frac{M}{\zeta^{|\alpha|}}. \qquad (20)$$

Využili jsme postupně vzorce pro součet geometrické řady, multinomickou větu, a na závěr odhad (2*). Funkce H je tedy RA na I_η^{d+s}.
Porovnáním (18) a (20) zjistíme

$$\left|\frac{D^\alpha a_{ijr}(0)}{\alpha!}\right| \leq H_\alpha, \quad \left|\frac{D^\alpha b_r(0)}{\alpha!}\right| \leq H_\alpha \quad \forall_{i,j,r}\ \forall\alpha, \qquad (21)$$

a tedy kvazilineární úloha

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = H(x,v)\left(1+\sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{d}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \quad (t,x)\in I_\eta^{d+1}, \qquad (22)$$

$$v_r(0,x)=0, \quad x\in I_\eta^d, \quad r=1,\dots,s, \qquad (23)$$

kde $H(x,v)=\dfrac{M\zeta}{\zeta-(x_1+\dots+x_d+v_1+\dots+v_s)}$, majorizuje úlohu (9)–(10).

□ <u>3. krok k existenci</u>: Zbývá nalézt (jakékoli) reálně analytické řešení problému (22)–(23).

Označme $y = x_1+\dots+x_d$. Řešení budeme hledat ve tvaru

$$v_1(t,x)=v_2(t,x)=\dots=v_s(t,x)=w(t,y).$$

Problém (22)–(23) se tedy redukuje na ($\omega>0$ určíme později)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{M\zeta}{\zeta-y-sw}\left(1+sd\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad (t,y)\in I_\omega^2, \qquad (24)$$

$$w(0,y)=0, \quad y\in I_\omega^2. \qquad (25)$$

Protože (24)–(25) je (lokální) Cauchyova úloha pro jednu kvazilineární rovnici, je možno její řešení nalézt např. metodou charakteristik.

Čtenáři doporučujeme výpočet provést jako cvičení, případně dosazením ověřit, že

$$w(t,y) = \frac{b - y - \sqrt{(b-y)^2 - 2s(d+1)Mbt}}{s(d+1)}, \qquad (t,y)\in I^2_\omega, \qquad (26)$$

je pro dostatečně malé $\omega > 0$ reálně analytickou funkcí na I^2_ω, která na I^2_ω řeší (24)-(25).

Zvolme konečně $\rho' = \min\left(\frac{\omega}{d}, \gamma\right)$. Podle předchozího jsou pak $v_1(t,x) = v_2(t,x) = \dots = v_s(t,x) = w(t,y)$ RA řešením (22)-(23) na $I^{d+1}_{\rho'}$, tedy i (9)-(10) má RA řešení na $I^{d+1}_{\rho'}$.

Tím je důkaz věty C.-K. proveden

☒

Cvičení: Najděte řešení (26) problému (24)-(25) metodou charakteristik.

Poznámky (jako cvičení si rozmyslete podrobně níže naznačené úvahy)

(i) V (9) lze připustit explicitní závislost koeficientů úlohy na t, tj. $a_{ijr} = a_{ijr}(t,x,u)$; $b_r = b_r(t,x,u)$. Návod: Uvažujte novou „neznámou" funkci $u_{s+1}(t,x) \equiv t$. Tato funkce vyhovuje rovnici $\frac{\partial u_{s+1}}{\partial t} = 1$ s počáteční podmínkou $u_{s+1}(t,0) = 0$.
Pro novou vektorovou funkci $\tilde{u} := (u_1, \dots, u_s, u_{s+1})$ pak dostáváme úlohu typu (9)-(10) s koeficienty

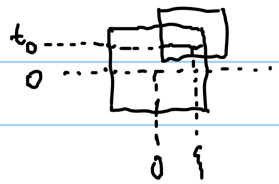
$$a_{ijr}(x,\tilde{u}) = a_{ijr}(t,x,u), \quad b_r(x,\tilde{u}) = b_r(t,x,u).$$

(ii) V (10) lze připustit poč. podmínku tvaru

$$u_r(0,x) = \varphi_r(x), \qquad x \in I^d_\rho,$$

kde φ_r, $r=1,\dots,s$ jsou dané reálné analytické funkce na I^d_ρ.
Návod: uvažujte funkce $v_r(t,x) := u_r(t,x) - \varphi_r(x)$, $r=1,\dots,s$, a ukažte, že pro ně dostanete systém typu (9)-(10).

(iii) Diskutujte lokálnost existence řešení. Uvažte, že můžeme „slepovat" jednotlivá krychlová okolí, na kterých existuje řešení. Pokud například existuje řešení U na množině $\{(t_0,x),\ |x-\xi|<\delta\}$, lze uvažovat systém (9) v $I_\delta^{d+1}((t_0,\xi))$ s počátečními podmínkami $u_r(t_0,x) = U_r(t_0,x)$ v $I_\delta^d(\xi)$.



C-K větu lze tedy zobecnit v tom smyslu, že řešení u_r existují na otevřené množině $\Omega' \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$, kde Ω je oblast, na které jsou „data úlohy RA" (zformulujte přesně: kde je jaká z fcí a_{ijr}, b_r, φ_r RA?).

(iv) Na úlohu typu „C-K" lze převést (a tedy tím získat výsledek o lokální existenci a jednoznačnosti RA řešení) v podstatě libovolný „rozumný" systém PDR. „Rozumnost" se dá popsat zhruba takto:

- Všechny rovnice v systému lze vhodnými úpravami převést (alespoň lokálně) na rovnice, vyjádřené vzhledem k nejvyšší derivaci podle jedné z proměnných, přičemž ve všech rovnicích musí být tato proměnná tatáž. Pak lze vhodnými substitucemi převést rovnice vyšších řádů na rovnice typu (9).
- Koeficienty („data") úlohy musí být po úpravách v příslušném bodu RA, to tedy znamená, že původní systém musí být tvořen „RA závislostmi".
- Počáteční podmínky původní úlohy musí být takové, aby po převedení rovnic na systém typu (9) byl k dispozici dostatečný počet podmínek tvaru $u_r(t,x) = \varphi_r(x)$, kde φ_r jsou RA.

někdy v průběhu úprav může dojít k tomu, že budeme nuceni derivováním zvýšit řád rovnice. V takové situaci je často potřeba zvolit pro nový systém dodatečnou p.p., takovou, aby tyto automaticky splněna pro řešení pův. systému.

Nejlépe se věc osvětlí na příkladech:

(P1)
$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & \text{pro } (x,y) \in U((0,0)) \\ \text{p.p. } \left.\begin{array}{l} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_y(x,0) = \psi(x) \end{array}\right\} & x \in U(0), \quad \varphi, \psi \text{ jsou RA} \end{array}\right\} \tag{27}$$

Zavedu pro $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ $\qquad v := u_x$, $\; z := u_y$

Potom rovnice přejde na $z_y = -v_x$
a ze záměnnosti $u_{xy} = u_{yx} \Rightarrow v_y = z_x$ $\Big\}$ systém typu (9)

Všimněte si: vybral jsem jako „časovou" (tj. „privilegovanou") proměnnou y, neboť mám p.p. pro $y=0$.

P.p. potřebuji pro
$$\left.\begin{array}{l} v(x,0) = (= u_x(x,0)) = \varphi'(x) \\ z(x,0) = (= u_y(x,0)) = \psi(x) \end{array}\right\} \text{typ (10)}$$

Podle věty C-K tedy má problém (27) na okolí $(0,0)$ jediné RA řešení. Toto řešení však může mít poměrně divoké chování, jak ukazuje následující poznámka.

Pozn.: Existuje Hadamardův příklad: v úloze (27) volte $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = \dfrac{\sin nx}{n^k}$. Potom fce

$$u(x,y) = \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2n^{k+1}} \sin nx \tag{28}$$

je jediné RA řešení úloh (27) s výše uvedenými p.p. Přitom toto řešení má následující vlastnost:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall y_1 > 0 \; \forall K > 0 \; \exists n, k \in \mathbb{N}$$
$$\|\varphi\|_{C(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{C(\mathbb{R})} < \varepsilon$$

a přitom $\forall\, a<b$

$$\|u(\cdot, y_1)\|_{C(\langle a,b\rangle)} > K. \qquad (29)$$

Úloha (27) tedy není zadána korektně, neboť její řešení nesplňuje podmínku spojité závislosti řešení na datech úlohy.

Poučení: p.p. pro úlohu (27) nemusí být tou „správnou sadou p.p.", zaručující korektní úlohu (se stabilním řešením). Je to jeden z nedostatků toho, jak je (jinak velmi obecná) úloha (9)-(10) formulována.
Ukazuje se, že je lépe studovat různé typy rovnic zvlášť, technikami „ušitými jim speciálně na míru".
Což učiníme v dalších kapitolách.

Pozn.: Dalším omezením věty C-K je to, že se nedá zbavit předp. reálné analyticity dat.
To ukázal Lewy, který dokázal, že $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ taková, že úloha $Lu = f$, kde

$$Lu := u_x + i u_y - 2i(x+iy)\, u_z, \qquad (30)$$

nemá klasické řešení v žádné otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, bez ohledu na p.p. (To ukazuje, že f nemůže být analytická v žádném bodě).
Rozpisem Lu do reálné a imag. složky, např. pro $u = v + iw$, dostaneme systém

$$\begin{aligned} v_x &= w_y - 2(y v_z + x w_z) - f \\ w_x &= -v_y + 2(x v_z - y w_z) \end{aligned} \qquad (31)$$

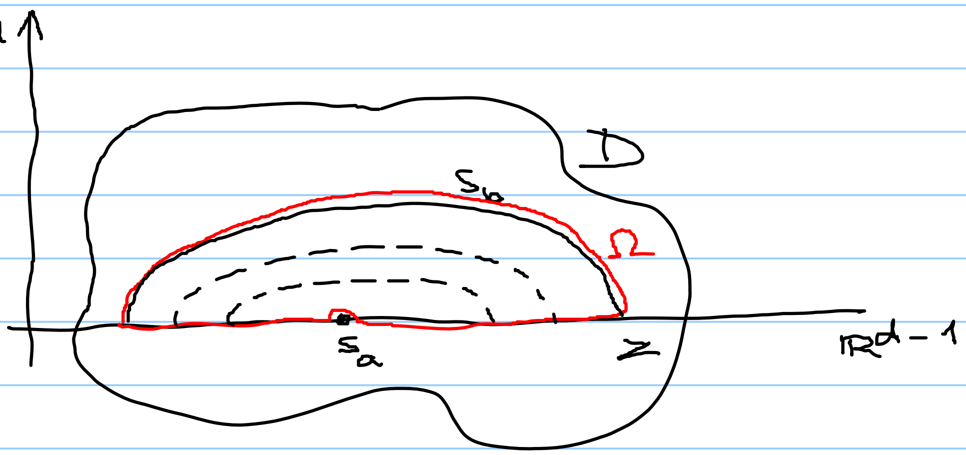
typu (9).

Poznámka: Pro jiné lineární systémy lze ukázat tzv. Holmgrenovu větu, dokazující jednoznačnost řešení i ve třídě C^1 funkcí. Přesněji, ale stále ještě ne zcela přesně:

Mějme systém lineárních PDR

$$\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{s} a_{ijr}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{s} b_{jr}(x)\,u_j = 0 \quad , \quad r = 1,\dots,s. \qquad (32)$$

Buď D omezená oblast v $\mathbb{R}^d$ taková, že a_{ijr}, b_r jsou RA v D. $Z = D \cap \{x_d = 0\}$ je neprázdná plocha a nechť $\Omega = \{x \in D, x_d > 0, a < \phi(x) < b\}$,



kde ϕ je RA na D taková, že $\nabla\phi \neq 0$ v D. Pro $a \le \lambda \le b$ je přitom $S_\lambda := \{\phi = \lambda\} \cap \{x_d \ge 0\} \cap D$, a předpokládáme, že S_a je bod, ležící na Z. Za dalších geometrických předpokladů na S_λ a Ω (podrobnosti viz [Renardy – Rogers, par. 2.3]) platí:

Je-li $\vec{u} \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^s)$ klasické řešení (32) v Ω, takové, že $\vec{u} = 0$ na $\partial\Omega \cap Z$, tak potom $\vec{u} = 0$ v $\overline{\Omega}$.

Tento paragraf zakončíme několika příklady, na kterých ukážeme, jakým způsobem lze převést některé rovnice či systémy PDR na rovnice typu (9).

Př.

$$u_{tt} = F(x, u_x, u_t) \qquad (33)$$

P.P.: $u(0,x) = \varphi(x)$

$$u_t(0,x) = \psi(x) \qquad (34)$$

Zavedeme nové funkce $v := u_x$, $w := u_t$, tak místo uvažované rovnice dostaneme systém

$$
\begin{aligned}
w_t &= F(x,v,w), \\
v_t &= w_x,
\end{aligned}
\tag{35}
$$

První z těchto rovnic je (33), přepsaná s využitím funkcí v, w, zatímco druhá rovnice vyjadřuje skutečnost, že druhé derivace hladké funkce u jsou záměnné, $u_{xt} = u_{tx}$. Systém (35) je typu (9), je-li F RA funkcí svých proměnných. Z formulace věty C-K je zřejmé, že systém (35) je potřeba doplnit o počáteční podmínky pro $v(0,x)$, $w(0,x)$. Z (34) máme

$$
\begin{aligned}
v(0,x) &= \varphi'(x), \\
w(0,x) &= \psi(x),
\end{aligned}
\tag{36}
$$

a z věty C-K dostaneme lokální existenci a jednoznačnost řešení úlohy (35)–(36), a tedy i úlohy (33)–(34), za předpokladu reálné analytičnosti funkcí F, φ, ψ.

(Bi) $F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$ (37)

Jde o zcela obecnou rovnici 1. řádu pro neznámou funkci $u = u(x,y)$. Předpokládejme, že F je reálně analytická a derivujme (37) například podle y. Tato volba nás dostane do situace, ve které se y stane „privilegovanou" proměnnou, tj. proměnnou, hrající roli času t v systému typu (9), na který se snažíme (37) převést. Tato volba také určuje to, že vhodnou p. p., předepisovanou pro řešení (37) je

$$u(x,0) = \varphi(x), \tag{38}$$

kde φ je reálně analytická.

Provedeme nyní derivování (34) podle y; dostaneme:

$$\partial_2 F + \partial_3 F \cdot u_y + \partial_4 F \cdot u_{xy} + \partial_5 F \cdot u_{yy} = 0 \tag{39}$$

kde $\partial_j F = \partial_j F(x,y,u,u_x,u_y)$ značí derivaci F podle j-té proměnné.

Předpokládejme dále, že výraz $\partial_5 F(x,y,u,u_x,u_y)$ je (alespoň na nějaké neprázdné oblasti) nenulový, a že tedy lze z (39) vypočítat u_{yy}:

$$u_{yy} = A_1 u_{xy} + A_2 u_y + A_3, \qquad (40)$$

kde $A_j = A_j(x,y,u,u_x,u_y)$, tedy (40) je kvazilineární rovnice 2. řádu s RA koeficienty. Dále postupujeme jako v předchozím příkladě, a s ohledem na poznámku (i) (hned za důkazem věty C-K): Zavedeme: $v = u_x$, (41)

$w = u_y$, (42)

$z = z(x,y) \equiv y$, (43)

a dále označíme $U = (u,v,w,z)$. Dostaneme systém (pro každou z funkcí $f = u,v,w,z$ je potřeba „mít rovnici pro f_y"):

$$\left.\begin{array}{lr} w_y = A_1(x,U)\,w_x + A_2(x,U)\,w + A_3(x,U) & \text{(ze (40), (42))} \\ u_y = w & \text{(ze (42))} \\ v_y = w_x & \text{(ze (41), (42))} \\ z_y = 1 & \text{(ze (43))} \end{array}\right\} \qquad (44)$$

a počáteční podmínky

$$\left.\begin{array}{l} z(x,0) = 0 \quad \text{(odpovídající roli „pomocné fce" } z \text{ – viz pozn. (ii))} \\ u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{(viz (38))} \\ v(x,0) = \varphi'(x) \quad \text{(viz (38), (41)).} \end{array}\right\} \qquad (45)$$

Chybějící podmínku pro $w(x,0) = u_y(x,0)$ nelze získat tak, že hodnoty $u_y(x,0)$ předepíšeme jako další p.p. pro řešení rovnice (37), která je 1. řádu a vystačí si s jedinou p.p., a sice (38). Uvědomme si také, že potřeba další p.p. vznikla díky derivování rovnice (37) podle y, tedy zvýšením jejího řádu. Je tedy potřeba zvolit podmínku pro $u_y(x,0)$ „uměle", tak, aby byla automaticky splněna pro RA řešení rovnice (37). Volíme podmínku typu

$$F(x,y,u,u_x,u_y)\Big|_{y=0} = 0 \qquad (46)$$

která je automaticky splněna pro RA řešení rovnice (37). Za jistých předpokladů (rozmyslete podrobně!) je možno z (46) spočíst $u_y(x,0)$ jako implicitní funkci x, $\varphi(x)$ a $\varphi'(x)$, odkud dostaneme hledanou podmínku pro $w(x,0)$. Tato podmínka spolu s (44)–(45) definuje lokální Cauchyovu úlohu typu (9)–(10), na kterou je teď možno aplikovat větu C–K.

Tento příklad si nekladl za cíl stanovit rigorózně podmínky, za kterých lze převést obecný systém PDR na úlohu typu C–K, měl pouze ilustrovat problémy, které při tomto převodu nastávají:

- vhodná volba „privilegované" proměnné (v soustavě a p.p.)
- schopnost „vypočítat" z původní rovnice nejvyšší derivaci hledaného řešení podle privilegované proměnné.
- schopnost vypočítat z původní rovnice chybějící p.p. pro nový systém.

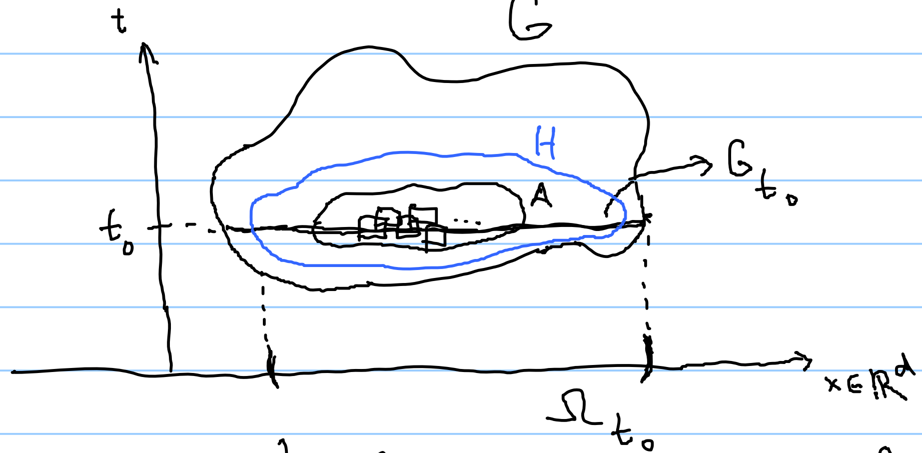
2.3. Charakteristické směry a plochy

Problematiku charakteristických směrů a ploch budeme ilustrovat na lokální Cauchyově úloze pro lineární rovnici k-tého řádu, která je tzv. vyřešená vzhledem k $\frac{\partial^k u}{\partial t^k}$, tj.

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = \sum_{\substack{|\alpha|\leq k \\ \alpha\neq(k,0,\dots,0)}} a_\alpha(t,x)\, D^\alpha u + f(t,x) \quad \text{v } G\subset(0,T)\times\mathbb{R}^d, \; G \text{ oblast}, \tag{47}$$

$$\begin{aligned} u(t_0,x) &= g_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t_0,x) &= g_1(x), \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{k-1} u}{\partial t^{k-1}}(t_0,x) &= g_{k-1}(x), \end{aligned} \qquad x\in\Omega_{t_0} := \{x\in\mathbb{R}^d,\ (t_0,x)\in G\}. \tag{48}$$

Pozn.:



Označme $G_{t_0} := \{(t_0,x),\ x\in\Omega_{t_0}\}$. Pokud jsou funkce a_α, f RA na otevřené množině H takové, že $H\cap G_{t_0}\neq\emptyset$, a g_j jsou RA na $H\cap G_{t_0}$, pak podle věty Cauchy-Kovalevské existuje na okolí $A\subset H$ RA řešení výše uvedené úlohy.

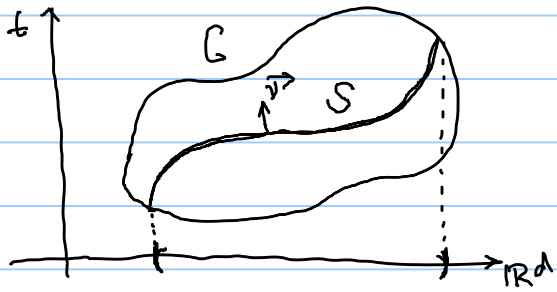
Cvičení: Převeďte úlohu (47)-(48) na úlohu typu C-K ((9)-(10)). Uvědomte si znovu, jak souvisí počet a tvar počátečních podmínek s tvarem rovnice, resp. s jejím převodem na systém typu C-K.

Naším dalším cílem bude zkoumat právě tuto „souhru" tvaru rovnice a počátečních podmínek pro obecnější úlohu k-tého řádu.

Mějme teď rovnici

$$\sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(t,x)\, D^\alpha v + f(t,x) = 0 \qquad v\ G\subset (0,T)\times\mathbb{R}^d, \quad G \text{ oblast}, \tag{49}$$

a předepišme počáteční podmínky na d-dimenzionální hladké regulární (nad)ploše $S\subset G$. O S předpokládáme, že je orientovaná spojitým polem vektorových normál $\vec{\nu}=(\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_d)$.



Počáteční podmínky na S předepisujeme ve tvaru

$$\left.\begin{aligned} v(t,x) &= \varphi_0(t,x),\\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(t,x) &= \varphi_1(t,x),\\ &\ \vdots\\ \frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}(t,x) &= \varphi_{k-1}(t,x), \end{aligned}\right\} \quad (t,x)\in S. \tag{50}$$

Pozn.: Úlohu (49)–(50) nazýváme zobecněná (lokální) Cauchyova úloha pro lin. rovnici k-tého řádu.

Pozn.: $\dfrac{\partial^j v}{\partial \nu^j}(t,x)$ je j-tá derivace v podle normály $\vec{\nu}=(\nu_t,\nu_1,\dots,\nu_d)$.

Označíme-li opět (zejména kvůli jednodušší notaci) $t\equiv x_0$, $\nu_t\equiv\nu_0$, platí

$$\frac{\partial^j v}{\partial \nu^j}(t,x) = \sum_{\substack{i_0+\dots+i_d=j\\ i_0,\dots,i_d=0,\dots,j}} \frac{\partial^j v}{\partial x_0^{i_0}\partial x_1^{i_1}\dots\partial x_d^{i_d}}\,\nu_0^{i_0}\nu_1^{i_1}\dots\nu_d^{i_d} \tag{51}$$

$$= \sum_{|\alpha|=j} \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_0^{\alpha_0}\dots\partial x_d^{\alpha_d}}\,\nu^\alpha = \sum_{|\alpha|=j} D^\alpha v\cdot \nu^\alpha,$$

$j=0,\dots,k-1$, speciálně $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}(t,x) = \nabla_{(t,x)} v\cdot\vec{\nu}$.

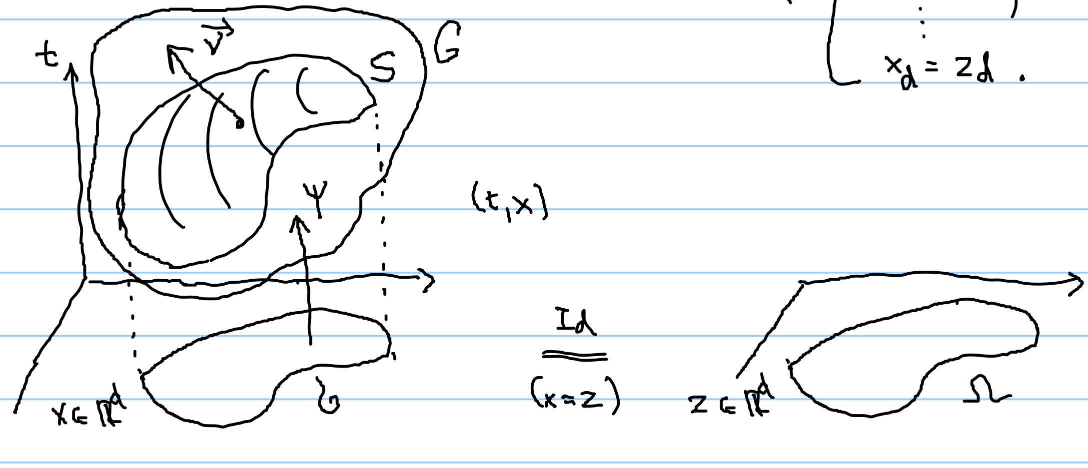
Poznámka: Promyšlete počáteční podmínky (48) pro u na „rovné" ploše G_{t_0}: tam předepisujeme hodnoty u a jejích derivací „ve směru kolmém na plochu G_{t_0}", obdobnou vlastnost vyžadují i podmínky (50).

Naším cílem je nyní vhodným zobrazením „narovnat S" tak, abychom zachovali směr normálového vektoru k S, a transformovat tak v bodech plochy S jak rovnici (49), tak počáteční podmínky (50). Poté zjistíme, kdy je možné po transformaci dostat úlohu tvaru (47)–(48), s vyjádřenou nejvyšší derivací neznámé funkce podle „nové časové" proměnné, a s p.p. na „rovné, transformované ploše".
Pro jednoduchost budeme předpokládat, že S lze ztotožnit s grafem dostatečně hladké (alespoň C^2) funkce, tedy že

$$S=\{(t,x)\in G,\ t=\psi(x),\ \psi\in C^2(\mathcal{G}),\ \mathcal{G}\subset\mathbb{R}^d \text{ omezená oblast}\}.$$

Plochu S lze tedy parametrizovat zobrazením $\phi\in C^2(\mathcal{G};S)$

$$\phi:\begin{cases} t=\psi(z),\\ x_1=z_1,\\ \quad\vdots\\ x_d=z_d. \end{cases} \tag{51}$$



(abychom předešli nedorozuměním, rozlišujeme mezi x (kde $(t,x)\in S$) a z (kde z je parametrizující proměnná, $z\in\Omega$), přestože $x=z$ (ve smyslu ztotožnění).

Zobrazení ϕ definuje v každém bodě $(t,x)\in S$ d-tici lineárně nezávislých tečných vektorů $T^j(t,x)=T^j(\psi(z),z)=:T^j(z)$, kde

$$T^j(z)=\frac{\partial\phi}{\partial z_j}(z)=\Big(\frac{\partial\psi}{\partial z_j},0,\dots,\underset{\uparrow\ (j+1).\text{ místo}}{1},\dots 0\Big)\in\mathbb{R}^{d+1},\quad j=1,\dots,d, \tag{52}$$

a tedy i tečný prostor $\mathbb{T}(z) = \mathrm{Lin}\left(T^1(z),\dots,T^d(z)\right)$. Odtud plyne, že vektor

$$\vec{\nu}(z) := \left(1, -\frac{\partial\psi}{\partial z_1},\dots,-\frac{\partial\psi}{\partial z_d}\right) = \left(1, -\nabla_z\psi\right) \tag{53}$$

splňuje $\vec{\nu}(z)\cdot T^j(z) = 0$ $\forall j=1,\dots,d$, $\forall z\in\Omega$, a je tedy normálovým vektorem k S v bodě $(t,x)\in S$. Jeho první souřadnice zároveň ukazuje, že $\vec{\nu}$ směřuje „nahoru" (vzhledem k orientaci časové osy t). Budeme označovat

$$\vec{\nu} = (\nu_t,\nu_1,\dots,\nu_d) \equiv (\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_d) \tag{54}$$

v souladu se značením $t\equiv x_0$. Tedy je

$$\nu_0(z) = \nu_t(z) = 1, \quad \nu_j(z) = -\frac{\partial\psi}{\partial z_j}(z), \quad j=1,\dots,d, \tag{55}$$

$$(t,x)\in S,\ t=\psi(z),\ x=z,\ z\in\Omega.$$

Definujeme nyní zobrazení $\omega\in C^2(\mathbb{R}\times\Omega, G)$, definované předpisem $\omega = \omega(\tau,z) = (t,x)\in G$, kde

$$\begin{aligned} t &= \psi(z) + \tau\overbrace{\nu_0(z)}^{1}, \\ x_j &= z_j + \tau\nu_j(z), \quad j=1,\dots,d, \end{aligned} \qquad (\tau,z)\in\mathbb{R}\times\Omega, \tag{56}$$

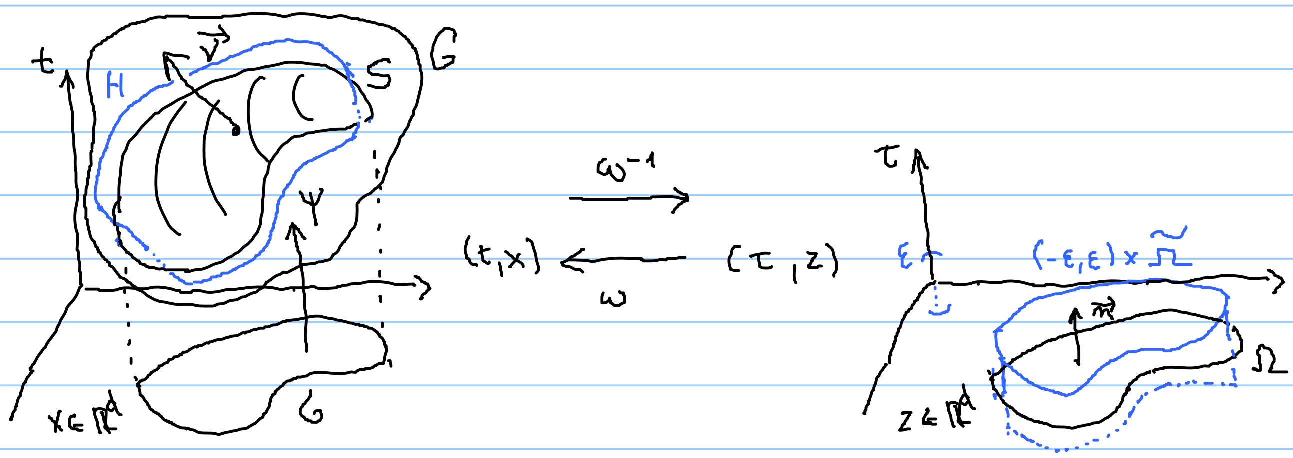
přičemž $\psi(z)$ je zobrazení z (51) a $\nu_j(z)$ jsou složky norm. vektoru z (55).

Vidíme, že

$$(t,x)\in S \iff \tau=0, \quad \text{tj. } \omega(\Omega)=S, \tag{57}$$

a

$$\frac{\partial\omega}{\partial\tau}(z) = \vec{\nu}(z). \tag{58}$$



Z (56), (55) dále dostáváme

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = 1, \qquad \frac{\partial t}{\partial z_j} = \frac{\partial \psi}{\partial z_j}(z) = -\nu_j(z), \qquad j = 1, \dots, d,$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial \tau} = \nu_j(z), \qquad \frac{\partial x_j}{\partial z_i} = \delta_{ji} + \tau \frac{\partial}{\partial z_i}(\nu_j(z)), \qquad i,j = 1, \dots, d, \tag{59}$$

kde $\delta_{ji} = 0$ pro $j \neq i$, $\delta_{jj} = 1$. Spočtěme determinant Jacobiho matice (jakobián) zobrazení ω na množině $\{0\} \times \Omega$:

$$J_\omega(0,z) = \det\left(\frac{D(t,x)}{D(\tau,z)}\right)\Big/_{\tau=0} \overset{(59)}{=} \begin{vmatrix} 1 & -\nu_1 & -\nu_2 & \dots & -\nu_d \\ \nu_1 & 1 & & & \\ \vdots & & 1 & \Theta & \\ \vdots & \Theta & & \ddots & \\ \nu_d & & & & 1 \end{vmatrix} \overset{*)}{=} 1 + \|\nu\|^2 > 0. \tag{60}$$

Díky hladkosti ω tedy $\exists\, \varepsilon > 0$ a oblast $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ taková, že ω má nenulový jakobián na $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \tilde{\Omega}$. Podle věty o inverzním zobrazení tedy existuje $\omega^{-1} \in C^1(H; (-\varepsilon,\varepsilon) \times \tilde{\Omega})$, kde $H := \omega((-\varepsilon,\varepsilon) \times \tilde{\Omega})$ (viz obrázek). Jacobiho matici derivací zobrazení $\omega^{-1}/_S$ lze spočítat z (60):

$$\left(\frac{D(\tau,z)}{D(t,x)}\right)\Big/_S = \left(\frac{D(t,x)}{D(\tau,z)}\right)^{-1}\Big/_{\tau=0} = \frac{1}{1+\|\nu\|^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_d \\ -\nu_1 & 1 + \sum_{j\neq 1} \nu_j^2 & -\nu_1\nu_2 & \dots & -\nu_1\nu_d \\ -\nu_2 & -\nu_2\nu_1 & 1 + \sum_{j \neq 2} \nu_j^2 & \dots & -\nu_2\nu_d \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\nu_d & -\nu_d\nu_1 & -\nu_d\nu_2 & \dots & 1 + \sum_{j\neq d} \nu_j^2 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

Speciálně tedy na S je

$$\frac{\partial \tau}{\partial t}(t,x) = \gamma, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x_j}(t,x) = \gamma \nu_j(t,x), \tag{62}$$

$$\gamma = \frac{1}{1+\|\nu\|^2} > 0, \quad (t,x) \in S.$$

---

*) Například: násobte $(j+1)$. řádek číslem ν_j a přičtěte jej k prvnímu. To opakujte pro $j = 1, \dots, d$.

Definujme nyní

$$w(\tau,z) := v(\overbrace{t(\tau,z),x(\tau,z)}^{\omega(\tau,z)}), \quad (\tau,z)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times\tilde{\Omega}, \tag{63}$$

kde $v(t,x)$ je funkce z (49)-(50). Především je

$$w(0,z) = v(\omega(0,z)) = v(t,x), \quad (t,x)\in S, \tag{64}$$

definujeme-li tedy

$$\tilde{\varphi}_0(z) := \varphi_0(\omega(0,z)), \quad z\in\tilde{\Omega}, \tag{65}$$

kde φ_0 je funkce z (50), transformuje se počáteční podmínka $v(t,x) = \varphi_0(t,x)$, $(t,x)\in S$, na

$$w(0,z) = \tilde{\varphi}_0(z), \quad z\in\tilde{\Omega}. \tag{66}$$

Dále je

$$\frac{\partial w}{\partial\tau}(0,z) = \frac{\partial v}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial\tau} + \sum_{k=1}^{d}\frac{\partial v}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial\tau} \overset{(59)}{=} \sum_{j=0}^{d}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\nu^j = \frac{\partial v}{\partial\vec{\nu}}(\omega(0,z)), \tag{67}$$

na ploše S, tedy pro $\omega(0,z) = (t,x)\in S$. Podobně dostaneme (proveďte podrobně!) $\frac{\partial^j w}{\partial\tau^j}(0,z) = \frac{\partial^j v}{\partial\vec{\nu}^j}(\omega(0,z))$, $j=0,\dots,k-1$, a tedy definujeme-li

$$\tilde{\varphi}_j(z) := \varphi_j(\omega(0,z)), \quad z\in\tilde{\Omega}, \tag{68}$$

dostaneme transformací počátečních podmínek (50) pro funkci v, sadu počátečních podmínek pro w,

$$\frac{\partial^j w}{\partial\tau^j}(0,z) = \tilde{\varphi}_j(z), \quad z\in\tilde{\Omega}, \quad j=0,\dots,k-1. \tag{69}$$

Transformací rovnice (49) získáme rovnici tvaru

$$\sum_{|\beta|\le k} c_\beta(\tau,z)D^\beta w + \tilde{f}(\tau,z) = 0, \quad (\tau,z)\in(-\varepsilon,\varepsilon)\times\tilde{\Omega}. \tag{70}$$

Zajímá nás hodnota koeficientu, který stojí u $\frac{\partial^k w}{\partial\tau^k}$, tedy koeficientu $c_{\tilde{\beta}}(\tau,z)$ pro $\tilde{\beta} = (k,0,\dots,0)$. Bude-li tento koeficient nenulový, bude možno z (70) vypočítat $\frac{\partial^k w}{\partial\tau^k}$, čímž bude dokončeno převedení obecného Cauchyovy úlohy (49)-(50) na Cauchyovu úlohu tvaru (47)-(48). Speciálně nás bude zajímat transformace rovnice (49) v bodech plochy S.

Spočtěme nejprve $\frac{\partial v}{\partial x_j}(t,x)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(t,x)$, kde $(t,x)\in S$.

je
$$\frac{\partial v}{\partial x_i}\Big/_S = \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial w}{\partial z_j}(0,z)\frac{\partial z_j}{\partial x_i}(t,x)}_{\text{neobsahuje } \frac{\partial w}{\partial \tau}} + \frac{\partial w}{\partial \tau}(0,z)\cdot \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial x_i}(t,x)}_{=\gamma\nu_i \text{ dle } (62)}\Big/_S ,$$
a
$$\frac{\partial v}{\partial t}\Big/_S = \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial w}{\partial z_j}(0,z)\frac{\partial z_j}{\partial t}(t,x)}_{\text{neobsahuje } \frac{\partial w}{\partial \tau}} + \frac{\partial w}{\partial \tau}(0,z)\cdot \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial t}(t,x)}_{=\gamma\nu_0 \text{ dle } (62)}\Big/_S .$$

Z uvedeného výpočtu je patrné, že výraz $\frac{\partial^k w}{\partial \tau^k}(0,z)$ lze obdržet pouze derivováním $D^\alpha v\big/_{(t,x)\in S}$, kde $|\alpha|=k$. Odpovídající koeficient u $\frac{\partial^k w}{\partial \tau^k}(0,z)$ bude pak
$$c_{\tilde\beta}(0,z) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(0,z)\,\gamma^{|\alpha|}\,\nu_0^{\alpha_0}\cdots\nu_d^{\alpha_d}(z)$$
tj.
$$\underline{c_{\tilde\beta}(0,z) = \gamma^k \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(t,x)\,\nu^\alpha ,} \qquad (71)$$
kde $(t,x)\in S$, $\nu = \vec{\nu}(t,x)$ je odpovídající normálový vektor k S v bodě (t,x), $\gamma = \frac{1}{1+\|\nu\|^2} > 0$. Transformaci obecnější Cauchyovy úlohy tedy bude možné dokončit, pokud bude suma vpravo v (71) nenulová.

<u>Cvičení</u>: Spočtěte inverzní matici v (61), resp. ověřte, že jde skutečně o matici inverzní k matici v (60).

Situaci, kdy je suma vpravo v (71) nulová, osvětluje následující definice:

<u>Def</u>. Řekneme, že vektor $\xi\in\mathbb{R}^{d+1}$ je <u>charakteristickým směrem rovnice (49)</u> v bodě (t,x), pokud $\xi\neq 0$ a přitom
$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(t,x)\,\xi^\alpha = 0 . \qquad (72)$$

Výraz vlevo v (72) se někdy nazývá <u>symbol</u> rovnice (49) v (t,x).

Def. • Buď S plocha dimenze d v $\mathbb{R}^{d+1}$. Řekneme, že $y=(t,x)\in S$ je charakteristickým bodem plochy S vzhledem k rovnici (49), pokud normála k S v bodě y je charakteristickým směrem rovnice (49) v bodě (t,x).

• Řekneme, že plocha S dimenze d v $\mathbb{R}^{d+1}$ je charakteristickou plochou rovnice (49), je-li každý její bod charakteristickým bodem rovnice (49).

Pozn.: Zadáme-li tedy počáteční podmínky typu (50) na ploše S, která je charakteristickou plochou rovnice (49), nemusí mít úloha (49)–(50) řešení na okolí bodu $(t,x)\in S$, neboť z předchozích úvah plyne, že v bodech $(t,x)\in S$ ji nelze převést na úlohu typu (47)–(48).

V následujících příkladech budeme zkoumat tvar charakteristických ploch pro některé základní typy PDR.

Př.: Laplaceova rovnice. Mějme rovnici $\Delta u = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$ v $\Omega\subset\mathbb{R}^d$.

Symbol této rovnice je, dle (72), $\sum_{j=1}^{d}\xi_j^2$. Hledáme tedy takové $\vec{\xi}\in\mathbb{R}^d$, $\vec{\xi}\neq 0$, že $\|\xi\|^2=0$, takové ξ však neexistuje. Proto Laplaceova rovnice nemá žádný char. směr, tedy žádná plocha není její charakt. plochou a poč. podmínky lze zadat na libovolné hladké ploše.

Př.: Rovnice vedení tepla, $\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u = 0$, $(t,x)\in(0,T)\times\Omega$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $a>0$.

Hledáme $\vec{\xi}=(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_d)\neq 0$ takový, že $-a\sum_{j=1}^{d}\xi_j^2=0 \Rightarrow \xi_1=\dots=\xi_d=0$.
Souřadnice ξ_0 vektoru $\vec{\xi}$ však není součástí symbolu rovnice, protože ten bere do úvahy pouze nejvyšší derivace. Proto má RVT charakteristické směry, a sice vektor

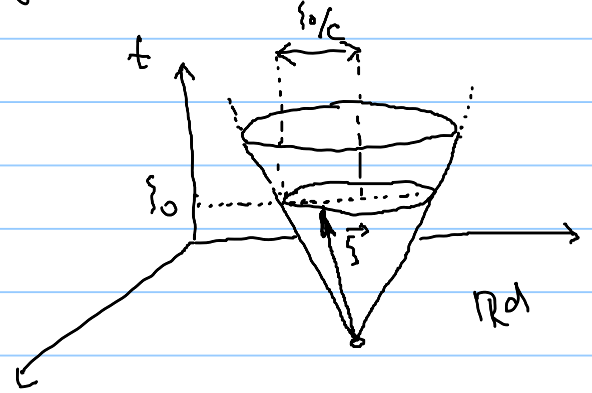
$$\vec{\xi}=(1,0,\dots,0)$$

a všechny jeho násobky. Odtud plyne, že rovnice vedení tepla má charakteristické plochy tvaru $\{(t,x),\ t=\text{konst},\ x\in\Omega\}$, jde tedy o rovině, rovnoběžné s rovinou $\{t=0\}$. Nicméně právě na rovině $\{t=0\}$, která je charakteristickou plochou RVT, je zakázáno p. p. zadávat. V praxi se tento jev projeví tak, že řešení RVT nebude existovat na okolí bodu $(0,x)$, ale pouze pro (t,x), $t>0$. Více v kapitole o evolučních rovnicích (kapitola 4).

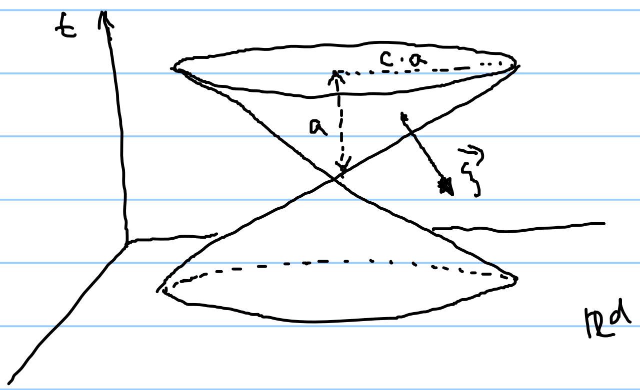
(P_7) Vlnová rovnice. $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$, $(t,x)\in(0,T)\times\Omega$, $\Omega\subset\mathbb{R}^d$, $c>0$.

Hledáme $\vec{\xi}=(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_d)\neq 0$ takový, že
$$\frac{1}{c^2}\xi_0^2 - \sum_{j=1}^{d}\xi_j^2 = 0.$$
$$\underline{\xi_0^2 = c^2\sum_{j=1}^{d}\xi_j^2}.$$

Tato rovnice popisuje tvar d-rozměrné kuželové plochy: pro pevné $\xi_0>0$ je $\sum_{j=1}^{d}\xi_j^2=\left(\frac{\xi_0}{c}\right)^2$, tedy $\xi_1,\dots,\xi_d$ leží na kouli o poloměru $\frac{\xi_0}{c}$:



Charakteristické plochy jsou tedy takové d-rozměrné kuželové plochy:



Víme, že na charakteristických plochách nelze zadat (libovolné) počáteční podmínky tak, abychom měli zaručenou existenci řešení daného probléněčeho Cauchyova problému v okolí char. plochy. Na to lze nahlížet také tak, že po charakteristické ploše nějakým způsobem „rovnice samo šíří informace o řešení" (proto na char. ploše nejde řešení obecně „předepsat hodnoty"). V paragrafu o vlnové rovnici si tuto interpretaci znovu připomeneme. Leccos však objasní i následující příklad.

Př. Uvažujme lineární homogenní PDR 1. řádu,

$$\sum_{j=1}^{d} a_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} = 0 \qquad x\in\Omega\subset\mathbb{R}^d \text{ oblast}, \quad a_j\in C(\Omega). \tag{73}$$

Na rovnici (73) můžeme nahlížet dvěma způsoby:

(a) Nalezneme její charakteristické směry a plochy, metodami této kapitoly. Hledáme tedy $\xi\in\mathbb{R}^d$, $\xi\neq 0$ takový, že

$$\sum_{j=1}^{d} a_j(x)\,\xi_j = 0$$

tedy charakteristický směr $\vec{\xi}=\vec{\xi}(x)$ je vektor, v každém bodě $x\in\Omega$ kolmý na vektor $\vec{a}(x)=(a_1(x),\dots,a_d(x))$. Vektor $\vec{a}(x)$ je tedy tečným vektorem k charakteristické ploše, v bodě x této plochy.

(b) Rovnici (73) lze však také zkoumat metodami paragrafu 1.3, neboť jde o rovnici (14**) (v par. 1.3). Tam jsme hledali charakteristiky (charakteristické křivky) rovnice (73), které byly popsány soustavou ODR

$$\frac{dx_j}{ds} = a_j(x(s)), \qquad s\in(\alpha,\beta),\ j=1,\dots,d.$$

Odtud plyne, že vektor $\vec{a}(x(s))$ je tečným vektorem ke charakteristické křivce v jejím bodě $x(s)$.

Srovnáním obou přístupů dostaneme, že charakteristiky rovnice (73) leží v charakteristické ploše této rovnice. Protože víme, že každé klasické řešení (73) je konstantní na charakteristikách, dostáváme další pohled na charakteristické plochy, a sice že jsou to plochy, po kterých se „šíří informace o řešení".

Cvičení. Hledejme charakteristiky a charakt. soustavy rovnice pro $u = u(x,y,z)$,

$$u_x + u_y + u_z = 0 \,, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

=

2.4. Klasifikace rovnic 2. řádu, převedení na kanonický tvar

V tomto paragrafu provedeme základní klasifikaci PDR 2. řádu, pro názornost pro lineární diferenciální rovnice.

Uvažujme tedy lineární diferenciální rovnici 2. řádu:

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u = f(x), \tag{74}$$

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina. Naším cílem bude pomocí vhodné transformace proměnných odstranit z rovnice smíšené derivace 2. řádu.

Protože uvažujeme klasické řešení, tj. $u \in C^2(\Omega)$, platí $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall i,j = 1..d$, a lze proto bez újmy na obecnosti předpokládat

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \quad \forall x \in \Omega,\ \forall i,j = 1,\dots,d. \tag{75}$$

Pokud by toto (75) neplatilo, lze zavedením $\tilde{a}_{ij} = \tilde{a}_{ji} := \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ matici $A(x) := (a_{ij}(x))_{i,j=1}^{d,d}$ symetrizovat.

Buď nyní $x \in \Omega$. Matice $A(x)$ je reálná, symetrická, tedy diagonalizovatelná (viz [...]), proto existují regulární matice $P(x)$ a diagonální matice $D(x)$ takové, že

$$P(x)\cdot A(x)\cdot P(x)^T = D(x), \qquad x \in \Omega. \tag{76}$$

Podle Sylvesterova zákona o setrvačnosti kvadratických forem (viz např. [...,...]) lze volit $P(x)$ tak, že $D(x)$ obsahuje pouze prvky $0, 1, -1$, přičemž je jejich počet (pro každé pevné $x \in \Omega$) určen jednoznačně. Pro každé $x \in \Omega$ je tedy určena jednoznačně (až na permutaci prvků na diagonále) i matice $D(x)$,

$$D(x) = (D_{ij}(x))_{i,j=1}^{d,d}, \quad \text{kde} \quad D_{ij}(x) = \delta_{ij}\,\alpha_j(x),\ \alpha_j \in \{0,1,-1\},\ i,j = 1,\dots,d. \tag{77}$$

Volme nyní pevné $x_0 \in \Omega$, pišme $P(x_0) = P = (P_{ij})_{i,j=1}^{d,d}$, $D(x_0) = D$, $a_{ij}(x_0) = a_{ij}$, a definujme pro $x \in U(x_0)$ nové proměnné předpisem

$$y = P\cdot x, \quad \text{tj.} \quad y_k = \sum_{l=1}^{d} P_{kl}\, x_l, \quad k = 1,\dots,d. \tag{78}$$

Označíme-li $L: x \mapsto P\cdot x$, $x \in U(x_0)$, výše uvedené zobrazení, je $L(U(x_0)) = U(y_0)$, kde $y_0 = P\cdot x_0$ a $U(y_0)$ je nějaké otevřené (nikoli nutně kulové) okolí bodu y_0.

na $U(x_0)$ je $\frac{\partial y_k}{\partial x_i} = P_{ki}$, $i,k = 1,\dots,d$. Zavedeme-li funkci $v(y) := u(x(y))$, $y \in U(y_0)$, dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial v}{\partial y_k} P_{ki}, \qquad i = 1,\dots,d, \tag{79}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k=1}^{d} \sum_{m=1}^{d} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_m} P_{mi} P_{kj}, \qquad i,j = 1,\dots,d. \tag{80}$$

Pak ovšem $$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{k,m=1}^{d} \underbrace{\sum_{i,j=1}^{d} P_{mi} a_{ij} P^T_{jk}}_{\overset{(76)}{=} D_{mk} = \delta_{mk} \alpha_k, \text{ v }\underline{\text{bodě } x_0}} \frac{\partial^2 v}{\partial y_k \partial y_m} = \sum_{k=1}^{d} \alpha_k \frac{\partial^2 v}{\partial y_k^2},$$

rovnici (74) jsme tedy $\underline{\text{v bodě } x_0 \in \Omega}$ transformovali na rovnici, která je v bodě $y_0 = P \cdot x_0$ typu

$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \frac{\partial^2 v}{\partial y_j^2} + \sum_{j=1}^{d} \beta_j \frac{\partial v}{\partial y_j} + \gamma v = \tilde{f}. \tag{81}$$

Přesněji řečeno, na okolí $U(x_0)$ bodu x_0 jsme definovali lineární transformaci $y = L(x) = P \cdot x$ takovou, že rovnice (74), uvažovaná na $U(x_0)$ byla transformována na rovnici, uvažovanou na $U(y_0)$, tvaru

$$\sum_{i,j=1}^{d} H_{ij}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{j=1}^{d} \beta_j(y) \frac{\partial v}{\partial y_j} + \gamma(y) v = \tilde{f}(y), \quad y \in U(y_0), \tag{81'}$$

přičemž $H_{ij}(y_0) = \delta_{ij} \alpha_j(y_0)$, tedy rovnice (81') je v y_0 tvaru (81), což jsme chtěli provést. Přitom počet nenulových α_j (přesněji počet α_j rovných $1, -1, 0$) nezávisí na konkrétní volbě transformační matice P.

Def. Rovnici tvaru (81) říkáme <u>kanonický tvar</u> rovnice (74) v bodě x_0 resp. y_0. Označme nyní N počet nenulových α_k v (81).
Pak řekneme, že rovnice (81) je v bodě $y_0 = P \cdot x_0$ (a tedy také, že rovnice (74) je v bodě $x_0 = P^{-1} \cdot y_0$):

Typ rovnice	Definice	Typický představitel
eliptická	$N=d$, všechna α_j mají stejné znaménko	$-\Delta u = f$ Laplace–Poisson $-\Delta u + \lambda u = f$ Helmholtz. r.
hyperbolická	$N=d$, všechna α_j mají stejné znaménko až na jedno	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f$ Vlnová r.
parabolická	$N=d-1$, (BÚNO $\alpha_d=0$) a přitom • $\alpha_1 = \dots = \alpha_{d-1} = -1$ • $\beta_d > 0$	$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$ RVT

Mimo tyto hlavní typy rovnic 2. řádu ještě definujeme pro úplnost

Typ rovnice	Definice
parabolická v širším smyslu	$N<d$
ultrahyperbolická	$N=d$, alespoň dvě α_j kladná, alespoň dvě α_j záporná *)

*) To nemůže nastat v $\mathbb{R}^d$ pro $d \leq 3$.

Pozn: Jsou-li koeficienty rovnice (74) konstantní, tedy nezávislé na $x \in \Omega$, nezávisí na x ani matice A, P, D, lze tuto transformaci provést v celé uvažované oblasti, a rovnice (74) má pak stejný kanonický tvar (a je stejného typu) v celé oblasti.

Existují však také rovnice, jejichž typ je různý v různých bodech $x \in \Omega$. Viz následující cvičení, případ (b).

Cvičení. Ukažte:

(a) lineární rovnice s konst. koeficienty
$$a u_{xx} + b u_{xy} + c u_{yy} = f$$
$u = u(x,y): \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $a,b,c \in \mathbb{R}$ je v každém bodě $x \in \Omega$

eliptická právě tehdy, když $b^2 - 4ac < 0$,
parabolická (v širším sm.) právě tehdy, když $b^2 - 4ac = 0$,
hyperbolická právě tehdy, když $b^2 - 4ac > 0$.

(b) Tzv. Tricomiho rovnice
$$y \cdot u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad u = u(x,y)$$
je eliptická v těch bodech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pro které $y > 0$,
parabolická v těch bodech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pro které $y = 0$,
hyperbolická v těch bodech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pro které $y < 0$.
Jde o rovnici, která tzv. mění typ v $\mathbb{R}^2$.

Cvičení: V případě lineární rovnice s konstantními koeficienty lze PDR, převedenou na kanonický tvar
$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \frac{\partial^2 v}{\partial y_j}(y) + \sum_{j=1}^{d} \beta_j \frac{\partial v}{\partial y_j}(y) + \gamma v(y) = f, \qquad y \in G, \qquad (81^*)$$
$\alpha_j, \beta_j, \gamma, f \in \mathbb{R}$, vhodnými substitucemi dále zjednodušit. Rozmyslete si a spočtěte následující substituce:

① Je-li v (81^*) $\alpha_i \neq 0$ & $\beta_i \neq 0$ pro $i \in \{1,\dots,d\}$, zavedte novou funkci $w(y)$ předpisem
$$v(y) = w(y)\, e^{-\frac{\beta_i y_i}{2\alpha_i}}. \qquad (82)$$

Tato substituce • eliminuje z rovnice člen s koeficientem β_i
• zachová všechny členy druhého a další členy 1. řádu
• změní člen nultého řádu (absolutní člen)
a také pravou stranu

(2) Je-li v (81*) $\alpha_i = 0$ & $\beta_i \neq 0$ pro $i \in \{1, \dots, d\}$, zavedeme novou funkci $w(y)$ předpisem

$$v(y) = w(y)\, e^{-\frac{\gamma y_i}{\beta_i}} . \tag{83}$$

Tato substituce
- eliminuje z rovnice absolutní člen (s koef. γ)
- zachovává beze změny členy 1. a 2. řádu
- změní pravou stranu

Z uvedeného je patrné, že například každou lineární rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty lze převést na jeden z následujících tvarů:

- v eliptickém případě: postupnou aplikací bodu (1) lze odstranit všechny členy s 1. derivací a dostat tedy rovnici

$$-\Delta u + k . u = f \tag{84}$$

Pro $k=0$ jde o Laplace-Poissonovu rovnici, pro $k \neq 0$ o rovnici Helmholtzovu. Člen ku, je-li v rovnici, nelze obecně odstranit.

- v hyperbolickém případě: stejnou metodou se lze dopracovat k rovnici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u + ku = f \qquad a \neq 0, \ k \in \mathbb{R} . \tag{85}$$

- v parabolickém případě nejprve odstraníme dle bodu (1) všechny členy s 1. derivací, a poté dle bodu (2) i absolutní člen. Dostaneme tedy rovnici vedení tepla

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f \qquad , a \neq 0 . \tag{86}$$

3. LAPLACEOVA A POISSONOVA ROVNICE

3.1 Úvod. Fundamentální řešení Laplaceovy rovnice

Definice: Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina, $f \in C(\Omega)$. Pak rovnici

$$-\Delta u = f \qquad v\ \Omega \tag{1}$$

nazveme (Laplace –) Poissonovou rovnicí v Ω, a rovnici

$$\Delta u = 0 \qquad v\ \Omega \tag{2}$$

Laplaceovou rovnicí v Ω.

Definice: Buď $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^d$ otevřená množina. Řekneme, že u je harmonická na Ω, pokud $u \in C^2(\Omega)$ a $\Delta u = 0$ v Ω. (Vektorový) prostor všech harmonických funkcí na Ω budeme značit $H(\Omega)$.

Poznámka: Mezi pojmem harmonické funkce v $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ a holomorfní funkce v $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ (při obvyklém ztotožnění $\mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$) je úzká souvislost. Buď $F = u + iv$ holomorfní v otevřené $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $u, v \in C^2(\Omega)$. Pak již $u, v \in C^\infty(\Omega)$ a splňují Cauchy-Riemannovy podmínky, tedy $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Odtud dostáváme $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$, a podobně $\Delta v = 0$ v Ω.

Složky holomorfní funkce jsou tedy harmonické.

Poznámka. Je-li $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ neprázdná otevřená množina, pak Ω je nejvýše spočetné sjednocení otevřených disjunktních intervalů, $\Omega = \bigcup_j (a_j, b_j)$. Je-li $u \in H(\Omega)$, tj. $u'' = 0$ na Ω, pak existují $c_j, d_j \in \mathbb{R}$, že $u|_{(a_j,b_j)} = c_j x + d_j$. Jediné harmonické funkce v $\mathbb{R}^1$ jsou tedy funkce afinní. Budeme tedy v dalším bez újmy na obecnosti uvažovat pouze $d > 1$.

Úmluva: V této kapitole budeme vždy pod Ω rozumět neprázdnou otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

Jaké další harmonické funkce známe?

(Př.) (i) Afinní funkce (tj. funkce tvaru $\sum_{j=1}^{d} a_j x_j + b$, kde $a_j, b \in \mathbb{R}$) jsou harmonické v libovolné neprázdné otevřené množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

(ii) Funkce $u(x,y) = x^2 - y^2$ je harmonická v libovolné $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, jde o tzv. harmonický polynom, tj. polynom, který je harmonickou funkcí. Rozmyslete si: pokud $a_j \in \mathbb{R}$ jsou taková, že $\sum_{j=1}^{d} a_j = 0$, potom je $u(x) := \sum_{j=1}^{d} a_j x_j^2$ harmonický polynom v $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

(iii) Buď $\xi \in \mathbb{R}^d$, potom funkce

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} \qquad \text{pro } d>2, \\ &\ln|x-\xi| = -\ln\frac{1}{|x-\xi|} \qquad \text{pro } d=2, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

jsou harmonické v každé otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ takové, že $\xi \notin \Omega$. Zde $|\cdot|$ označuje Eukleidovskou normu v $\mathbb{R}^d$.

(iv) Buď $\xi \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ pevné. Potom funkce (proměnné x)

$$\frac{|\xi-y|^2 - |x-y|^2}{|x-\xi|^d}, \qquad d \geq 2 \tag{4}$$

jsou harmonické v každé otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ takové, že $\xi \notin \Omega$.

<u>Poznámka</u> (pro zkušené znalé teorie distribucí).

Funkce (3) pro $\xi = 0$ tedy splňují Laplaceovu rovnici v oblasti $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Pokud se týká jejich chování v bodě 0, lze ukázat, že tzv. distributivní derivace (derivace ve smyslu distribucí) těchto funkcí je až na multiplikativní konstantu rovna Diracově distribuci. Vhodný násobek těchto funkcí, konkrétně

$$E(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{(d-2)\varkappa_d} \dfrac{1}{|x|^{d-2}}, & d > 2, \\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi} \ln|x| = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x|}, & d = 2. \end{cases} \tag{5}$$

tak splňuje ve smyslu distribucí rovnici $-\Delta u = \delta$. Takové funkce nazýváme fundamentálním řešením příslušného diferenciálního (zde tedy Laplaceova) operátoru. Symbolem $\varkappa_d$ označujeme plochu jednotkové sféry v $\mathbb{R}^d$, pro kterou platí

$$\varkappa_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}, \tag{6}$$

kde Γ je gamma-funkce. Odvození (6): viz Appendix (až bude) nebo (prozatím) učební text ke cvičením.

<u>Definice</u>. Funkci $E(x) \in H(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ tvaru (5) nazýváme <u>fundamentálním</u> (<u>elementárním</u>) řešením Laplaceova operátoru (případně „Laplaceovy rovnice") v $\mathbb{R}^d$.

$\boxed{3.2.}$ Věta o třech potenciálech

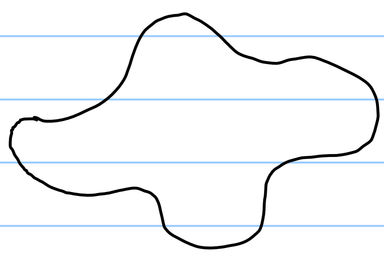
V tomto paragrafu odvodíme jistou integrální reprezentaci funkcí $u \in C^2(\overline{\Omega})$, kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$ s dostatečně hladkou hranicí $\partial\Omega$.

Pozn. Pojem „dostatečně hladká hranice" je poněkud vágní, proto raději hned dodejme (i když také vágně), že podstatné pro naše úvahy bude, aby

- pro s.v. body $x \in \partial\Omega$ (ve smyslu $(d-1)$-rozměrné míry na $\partial\Omega$) existoval jednotkový vektor vnější normály k Ω v bodě x
- na Ω platila Gauss-Ostrogradského věta.

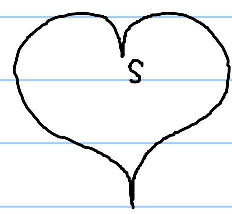
Pokud řekneme, že tyto dvě podmínky jsou splněny například pro oblasti s Lipschitzovskou (nebo hladší, tj. například C^k, $k=1,2\dots$) hranicí, musíme alespoň naznačit, jak se „hladkost hranice" vyjadřuje. Oblastí Ω s Lipschitzovskou hranicí (píšeme $\Omega \in C^{0,1}$) případně oblastí s hranicí třídy C^k (píšeme $\Omega \in C^k$) přitom rozumíme (nepřesně řečeno) oblast, jejíž hranici je možno „pokrýt" konečným počtem „překrývajících se" souřadných systémů, v nichž lze odpovídající část hranice $\partial\Omega$ popsat jako graf funkce příslušné hladkosti. Přesná definice – viz Appendix nebo [John-Nečas].

Intuitivní ilustrace:



$\Omega \in C^1$

$\Omega \in C^{0,1}$



$\Omega \notin C^{0,1}$
(v okolí bodu S)

Přípravné technické výpočty

a) Označme

$B_R(y) := \{x\in\mathbb{R}^d,\ |x-y|<R\}$ je koule o středu y a poloměru $R>0$,

$|x|^2=\sum_{j=1}^{d} x_j^2$ je (a v této kapitole vždy bude) Euklidovská norma v $\mathbb{R}^d$.

Dále budeme používat značení $S_R(y) := \partial B_R(y)$ pro sféru o poloměru R a středu $y\in\mathbb{R}^d$, a $S_R := S_R(0)$, $B_R := B_R(0)$.

Vyjasněme si, kdy konvergují integrál $\int_{B_\delta(0)} \frac{1}{|x|^\beta}\,dx$, $\beta\in\mathbb{R}$.

Použijeme-li sférické souřadnice v $\mathbb{R}^d$, dostaneme

$$\int_{B_\delta} \frac{1}{|x|^\beta}\,dx = \varkappa_d \int_0^\delta \frac{1}{r^\beta}\, r^{d-1}\,dr ,$$

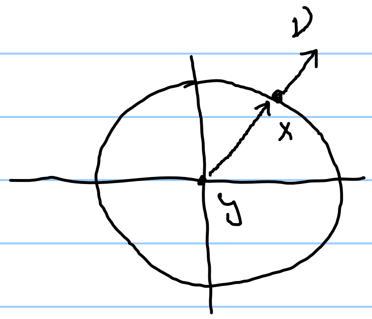
kde $\varkappa_d$ je definováno v (6). (Pro zavedení sférických souřadnic v $\mathbb{R}^d$ a počítání s nimi – viz Appendix, případně poznámky ke cvičení z PDR I).

Odkud plyne, že

$$\int_{B_\delta} \frac{1}{|x|^\beta}\,dx < +\infty \iff \int_0^\delta \frac{1}{r^{\beta-d+1}}\,dr<\infty \iff \beta-d+1<1 \iff \boxed{\beta<d} \qquad (7)$$

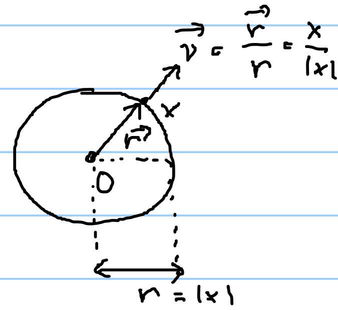
Kritickou mocninou na otázku je tedy přesně hodnota, rovná dimenzi prostoru.

b) Pro $B_r(y)$



máme: $x\in S_r(y) \Rightarrow \vec{\nu}(x) = \frac{x-y}{|x-y|}$

je jednotkový vektor vnější normály.



Speciálně, pro $B_r(0)$ lze psát $\vec{\nu} = \frac{x}{|x|}$, případně (ve „fyzikálním" zápisu), $\vec{\nu} = \frac{\vec{r}}{r}$, kde

$$\vec{r} = (x_1,\dots,x_d) = x \qquad r := |\vec{r}| = \Big(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\Big)^{1/2}.$$

Spočtěme $\underbrace{\nabla |x|^k}$ a $\underbrace{\frac{\partial}{\partial \nu}|x|^k}$ pro $k \in \mathbb{Z}$, $|x| \neq 0$. Máme

$$\left(\nabla |x|^k\right)_j = \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\Big)^{\frac{k}{2}} = \frac{k}{2}\Big(\sum_{i=1}^{d} x_i^2\Big)^{\frac{k-2}{2}} 2x_j = x_j \cdot k|x|^{k-2},$$

tedy
$$\nabla |x|^k = k|x|^{k-2}x \qquad \Big(= k|x|^{k-1}\frac{x}{|x|}\Big), \tag{8}$$

případně
$$\nabla r^k = k r^{k-1}\frac{\vec{r}}{r}. \tag{8'}$$

Speciálně (pro $k=1$ resp. $k=-1$),

$$\frac{\partial |x|}{\partial x_j} = \frac{x_j}{|x|}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{|x|}\Big) = -\frac{x_j}{|x|^3}, \tag{9}$$

případně
$$\frac{\partial r}{\partial x_j} = \frac{x_j}{r}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\frac{1}{r}\Big) = -\frac{x_j}{r^3}. \tag{9'}$$

Dále pak
$$\frac{\partial}{\partial \nu}|x|^k = \nabla |x|^k \cdot \vec{\nu} = k|x|^{k-1}\frac{x}{|x|}\cdot\frac{x}{|x|} = k|x|^{k-1}\frac{|x|^2}{|x|^2} = k|x|^{k-1}, \tag{10}$$

případně
$$\frac{\partial}{\partial \nu}r^k = \nabla r^k \cdot \vec{\nu} = k r^{k-1}\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r} = k r^{k-1}\frac{|\vec{r}|^2}{r^2} = k r^{k-1}. \tag{10'}$$

c) Připomeneme si tzv. 2. Greenovu větu: pro $\Omega \in C^{0,1}$ a $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$ máme:

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,dx = \int_{\partial\Omega}\Big(v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\Big)dS \tag{11}$$

kde $\vec{\nu}(\xi)$ je jednotková vektor vnější normály k Ω v bodě $\xi \in \partial\Omega$, a $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) := \nabla u(\xi)\cdot\vec{\nu}(\xi)$. (Výraz $\nabla u(\xi)$ v bodech hranice $\partial\Omega$ má smysl, neboť $u \in C^2(\overline{\Omega})$, tedy jeho první (i druhé) derivace jsou spojitě rozšiřitelné z Ω na $\overline{\Omega}$).

Vyzbrojeni těmito technickými prostředky můžeme zformulovat hlavní větu tohoto paragrafu.

Věta (o třech potenciálech)
Buď $u \in C^2(\overline{\Omega})$, kde $\Omega \in C^{0,1}$ je omezená oblast v $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Potom $\forall y \in \Omega$ platí

$$u(y) = \int_{\Omega} -\Delta u(x)\, E(x-y)\, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) E(x-y)\, dS(x) - \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} E(x-y)\, dS(x), \qquad (12)$$

kde
$$E(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(d-2)\varkappa_d} \dfrac{1}{|x|^{d-2}}, & d > 2, \\ -\dfrac{1}{2\pi} \ln|x|, & d = 2. \end{cases}$$

je elem. řešení Lapl. operátoru – srov. (5) a (6).

Pozn.: Příslušné 3 integrály vpravo ve (12) mají své názvy a fyzikální interpretaci. Označíme a nazýváme:

$V[\rho](y) := \int_{\Omega} \rho(x) E(x-y)\, dx$ ... objemový potenciál s hustotou ρ

$S[\mu](y) := \int_{\partial\Omega} \mu(x) E(x-y)\, dS(x)$ ... potenciál jednoduché vrstvy s hustotou μ

$D[\tau](y) := \int_{\partial\Omega} \tau(x) \frac{\partial}{\partial \nu} E(x-y)\, dS(x)$ ... potenciál dvojité vrstvy s hustotou τ.

Tedy (12) lze psát

$$u(y) = \left(V[-\Delta u] + S\left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\right] + D[-u] \right)(y) \qquad (12')$$

Všimněte si: hodnoty libovolné $C^2(\overline{\Omega})$ funkce (tedy zatím bez souvislosti k řešení jakékoli rovnice) lze vyjádřit pomocí jednoho objemového a dvou plošných integrálů, beroucích tedy do úvahy hodnoty u všude v Ω. Člen, který „provádí lokalizaci", tj. způsobí, že dostaneme jako výsledek hodnotu $u(y)$, souvisí s funkcí $E(x-y)$, tedy s elementárním řešením Laplaceova operátoru, jehož singularita je posunuta z bodu $0 \in \mathbb{R}^d$ do bodu $y \in \mathbb{R}^d$. Pokud jste si všimli poznámky na konci paragrafu 3.1 (a rozuměli jí), možná si uvědomíte, že ona „lokalizace do bodu" má těsnou souvislost s tím, že $-\Delta E(x) = \delta$ ve smyslu distribucí.

Důkaz věty o 3 potenciálech: Větu dokážeme pouze pro $d>2$, důkaz pro $d=2$ lze provést zcela analogicky. Dále budeme bez újmy na obecnosti předpokládat $y=0$ (jinak ve (12) použijeme substituci – posunutí o „$-y$")

Budeme studovat integrál $I := \int_\Omega \Delta u(x) \frac{1}{|x|^{d-2}}\,dx$. Protože $d-2<d$, je singularita $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ integrovatelná v okolí nuly (viz (7)), tedy je $I \in \mathbb{R}$ a platí

$$\int_\Omega \Delta u(x) \frac{1}{|x|^{d-2}}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon} \Delta u(x) \frac{1}{|x|^{d-2}}\,dx. \tag{13}$$

Funkce u, $\frac{1}{|x|^{d-2}}$ jsou určitě třídy $C^2(\overline{\Omega\setminus B_\varepsilon(0)})$ a $\Omega\setminus B_\varepsilon(0) \in C^{0,1}$ pro dost malé $\varepsilon>0$, proto lze na výraz vpravo v (13) použít 2. Greenovu formuli (11):

$$\int_{\Omega\setminus B_\varepsilon} \Delta u \frac{1}{|x|^{d-2}}\,dx = \int_{\Omega\setminus B_\varepsilon} u \underbrace{\Delta\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right)}_{\substack{= \\ 0 \text{ v } \Omega\setminus B_\varepsilon \\ \text{viz (3)}}} + \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\cdot\frac{1}{|x|^{d-2}}\,dS - \int_{\partial(\Omega\setminus B_\varepsilon)} u \frac{\partial}{\partial\nu}\frac{1}{|x|^{d-2}}\,dS. \tag{14}$$

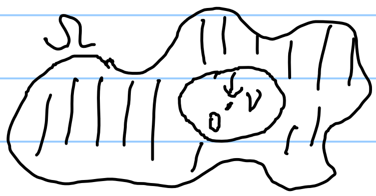
Všimneme si blíže hraničních integrálů přes $\partial B_\varepsilon(0) = S_\varepsilon(0)$. Máme nejprve

$$\left| \int_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \nu}\cdot \underbrace{\frac{1}{|x|^{d-2}}}_{\substack{= \\ \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} \text{ na } S_\varepsilon}} dS \right| \le \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} \underbrace{\|\nabla u\|_{C(B_\varepsilon)}}_{\le C} \cdot \underbrace{\|\nu\|}_{1} \cdot \underbrace{|S_\varepsilon|}_{\varkappa_d\cdot\varepsilon^{d-1}} \le C\cdot\varepsilon \to 0 \quad \text{pro } \varepsilon\to 0+ \tag{15}$$

Nyní spočteme $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} \int_{S_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right) dS$. Uvědomíme si, že pro $x\in S_\varepsilon$ je

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right) \overset{(10)}{=} (2-d)\frac{1}{|x|^{d-1}}\cdot(-1),$$

kde „(-1)" je vlastně díky orientaci normály, která je v našem případě vnější k $\Omega\setminus B_\varepsilon$, tedy vnitřní k B_ε.



Proto
$$\int_{S_\varepsilon} u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right) = \frac{d-2}{\varepsilon^{d-1}}\int_{S_\varepsilon} u(x)\,dS(x) =: I_\varepsilon .$$

Protože je
$$(d-2)\varkappa_d \min_{B_\varepsilon} u(x) \le I_\varepsilon \le (d-2)\varkappa_d \max_{B_\varepsilon} u(x),$$

dostaneme
$$\lim_{\varepsilon\to 0+} I_\varepsilon = (d-2)\varkappa_d\, u(0). \qquad (16)$$

Celkem tedy (13)–(16) dává

$$\int_\Omega \Delta u\cdot\frac{1}{|x|^{d-2}} = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\cdot\frac{1}{|x|^{d-2}}\,dS - \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x|^{d-2}}\right) - (d-2)\varkappa_d\, u(0),$$

což je (12) pro $d>2$ a $y=0$.

$\boxed{X}$

Cvičení:

(a) Dokažte větu o 3 potenciálech pro $d=2$. Má tato věta nějakou analogii pro $d=1$? Rozmyslete si, jak je to s fundamentálním řešením Laplaceova operátoru v $\mathbb{R}^1$.

(b) Ukažte, že předpoklad $y=0$ v důkazu věty o 3 potenciálech je skutečně „bez újmy na obecnosti", tedy proveďte naznačenou substituci.

(c) Najděte všechny sféricky symetrické funkce $U=U(|x|)$ tak, aby $\Delta U(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$. Připomíná vám výsledek něco?

Bezprostředním důsledkem věty o 3 potenciálech je následující (zajímavá) věta.

Věta (o regularitě harmonických funkcí).
Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ libovolná neprázdná otevřená množina, buď $u \in H(\Omega)$.
Potom $u \in C^\infty(\Omega)$.

<u>Poznámka</u>: Věty o regularitě jsou většinou tvrzení typu „hladší než se původně zdálo". Jejich obecné schéma v kontextu PDR je:

$$\left.\begin{array}{l} u \in X \\ u \text{ řeší ve vhodném smyslu nějakou PDR} \end{array}\right\} \Rightarrow u \in Y \subsetneq X,$$
kde X, Y jsou vhodné prostory funkcí.

<u>Důkaz věty o regularitě.</u>
Volme $y \in \Omega$. Protože Ω je otevřená, existuje otevř. koule $B \subset \Omega$, nikoli nutně o středu y, že $y \in B$. Protože $u \in H(\Omega)$, je $u \in C^2(\overline{B})$, lze tedy na B užít větu o 3 potenciálech, srov. (11). Je však $\Delta u = 0$ v B, objemový potenciál v (11) je proto nulový a my dostaneme:

$$u(y) = \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) E(x-y)\, dS(x) - \int_{\partial B} u(x) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} E(x-y)\, dS(x). \tag{17}$$

Ukážeme, že ze (17) plyne, že $D^\alpha u(y) \in \mathbb{R}$ pro všechny multiindexy α. Protože $y \in \Omega$ bylo libovolné, bude tím důkaz hotov. Vpravo v (17) jsou dva integrály s parametrem y. Protože však $y \in B$ a B je otevřená, je $\operatorname{dist}(y, \partial B) > 0$ a funkce $E(x-y)$ i všechny její derivace $D^\alpha_y E(x-y)$ jsou hladké ve všech bodech $x \in \partial B$. (Singularita v bodě y je dostatečně daleko od hranice). Libovolná derivace integrandu podle y je tedy spojitá na ∂B, což je kompaktní množina. Proto vždy existuje vhodná konstanta – integrovatelná majoranta funkce $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) D^\alpha_y E(x-y)$, resp. $u(x) D^\alpha_y \frac{\partial}{\partial \nu(x)} E(x-y)$ na ∂B. Podle věty o derivaci integrálu podle parametru je tedy $D^\alpha u(y) \in \mathbb{R}$ pro libovolný multiindex α a $y \in \Omega$, cbd. $\boxtimes$

<u>Poznámka</u>: Výše uvedené úvahy by samozřejmě nefungovaly, kdyby byl v (17) stále ještě přítomen integrál, odpovídající objemovému potenciálu. Singularita v bodě y funkce $E(x-y)$ by pak ležela

uvnitř oblasti, přes kterou integrujeme. Jistě teď ve vašich hlavách nevyvstal zmatek, že jsme právě nahlédli metodu jak ukázat, že libovolná C^2 funkce (pro kterou platí věta o třech potenciálech), je tak již C^∞. Výše uvedená metoda projde jen tehdy, podaří-li se nám „odstranit" objemový integrál, tj například tím, že budeme uvažovat harmonické funkce.

Harmonické funkce na otevřených množinách jsou již teď na těchto množinách nutně třídy C^∞. Zajímat nás však také bude jejich chování resp. vlastnosti na hranici množin, na kterých jsou harmonické. S tím úzce souvisí tzv. Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici, která si klade otázku, zda (a kdy) lze takovéto hraniční chování harmonické funkci předepsat. Nejjednoduššímu případu, kdy onou otevřenou množinou bude koule v $\mathbb{R}^d$, věnujeme následující paragraf.

$\boxed{3.3.}$ Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici na kouli

Def. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ neprázdná otevřená množina s hranicí $\partial\Omega$. Buď $\varphi \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Řekneme, že $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ řeší na Ω Dirichletovu úlohu pro Laplaceovu - Poissonovu rovnici (s daty φ, f), v klasickém smyslu, pokud

$$\left.\begin{array}{lll} \bullet\ u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), & & \\ \bullet\ \Delta u = f & \text{v } \Omega, & \\ \bullet\ u = \varphi & \text{na } \partial\Omega. & \end{array}\right\} \qquad (18)$$

Řešení Dirichletovy úlohy (18) na omezené ot. množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, pro $f \equiv 0$, pokud existuje, má následující důležitou vlastnost.

Věta (Slabý princip maxima (minima) pro harmonické funkce)
Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je omezená otevřená mn., nechť $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $u \in H(\Omega)$. Potom u nabývá svého maxima i minima v $\overline{\Omega}$ v bodech hranice $\partial\Omega$, tj.

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x), \quad \min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x), \qquad (19)$$

speciálně

$$\min_{\partial\Omega} u \le u(x) \le \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \qquad (20)$$

Důkaz:
Především, protože $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je omezená, je $\overline{\Omega}$ kompaktní a $\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$, stejně jako $\min_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$ se nabývá. Podobně se nabývají extrémy na $\partial\Omega$ ($\partial\Omega$ je vždy uzavřená množina, a pro omezenou Ω je i omezená.)

Dokážeme (19) pro maximum, důkaz pro minimum se vede podobně, a (20) je důsledkem (19).
Volme pevné $\varepsilon > 0$ a definujme $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{x_1}$, kde x_1 je první (ale mohla by být jakákoli) souřadnice bodu x. Potom $u_\varepsilon \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ a $\Delta u_\varepsilon = \Delta u + \varepsilon e^{x_1} = \varepsilon e^{x_1} > 0 \quad \forall x \in \Omega$.
Ukážeme, že u_ε nemůže nabývat svého maxima na $\overline{\Omega}$ ve vnitřním

bodě Ω, sporem. Nechť tomu není, nechť tedy existuje $x_0 \in \Omega$, že $u_\varepsilon(x_0) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u_\varepsilon(x)$. Protože $u_\varepsilon \in C^2(\Omega)$, je $\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_j^2}(x_0) \leq 0 \ \forall j$, tedy $\Delta u_\varepsilon(x_0) \leq 0$. To je však spor s tím, že $\Delta u_\varepsilon(x) > 0 \ \forall x \in \Omega$. Proto je

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u_\varepsilon(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u_\varepsilon(x), \quad \varepsilon > 0.$$

Důkaz je dokončen limitním přechodem $\varepsilon \to 0+$. (Rozmyslete si, že hodnota maxima se mění spojitě vzhledem k ε, přestože bod nabývání maxima se může nespojitě změnit). $\boxtimes$

Cvičení: • Ukažte, že je-li Ω omezená v $\mathbb{R}^d$, je $\partial\Omega$ kompaktní v $\mathbb{R}^d$.
• Odůvodněte podrobně závěr důkazu předchozí věty („$\varepsilon \to 0+$").

Důsledkem této věty je následující věta o jednoznačnosti řešení úlohy (18).

$\boxed{\text{Věta}}$ (o jednoznačnosti).
Úloha (18) má na omezené otevřené množině nejvýše jedno řešení.

Důkaz. Nechť existují dvě taková, u_1, u_2. Položme $w := u_1 - u_2$. Potom $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta w = 0$ v Ω a $w = 0$ na $\partial\Omega$, tedy $\max_{\partial\Omega} w(x) = \min_{\partial\Omega} w(x) = 0$. Podle (20) je tedy $w \equiv 0$ v $\overline{\Omega}$ $\boxtimes$

Pozn.: Omezenost množiny je důležitá: uvažte $u_1(x,y) = 0$, $u_2(x,y) = y$ na $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$. Potom $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 0$ v Ω a $u_1 = u_2 = 0$ na $\partial\Omega$.

Existence řešení úlohy (18) je složitější problém než jednoznačnost. Ukazuje se, že v důkazu existence hrají důležitou roli také vlastnosti hranice, tj. $\partial\Omega$.

V následujícím se budeme zabývat nejprve případem „nejhezčí" oblasti v $\mathbb{R}^d$, tj. koule v $\mathbb{R}^d$. Ukazuje se, že na kouli, a pro $f \equiv 0$, lze řešení příslušné modifikované úlohy (18) napsat dokonce v uzavřeném tvaru.

$\boxed{\text{Věta}}$ (o řešení D. úlohy na kouli, o Poissonově integrálu).

Buď $d \geq 2$, $y \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$. Buď $B_R(y) \subset \mathbb{R}^d$ otevřená koule o poloměru R a středu y. Buď dále $S_R(y) := \partial B_R(y)$ a $\varphi \in C(S_R(y))$.

Definujme

$$u(x) := \begin{cases} \varphi(x), & x \in S_R(y), \qquad (21a) \\[2ex] \dfrac{1}{\varkappa_d R} \displaystyle\int_{S_R(y)} \varphi(\xi) \frac{R^2 - |x-y|^2}{|x-\xi|^d} \, dS(\xi), & x \in B_R(y). \qquad (21b) \end{cases}$$

Potom:
- $u \in C^\infty(B_R(y)) \cap C(\overline{B_R(y)})$, (22)
- $\Delta u = 0$ na $B_R(y)$, (23)
- $\|u\|_{C(\overline{B}_R(y))} \leq \|\varphi\|_{C(S_R(y))}$ (spojitá závislost na datech) (24)
- Je-li $\varphi \geq 0$ na $S_R(y)$, je $u \geq 0$ na $B_R(y)$ a podobně pro $\varphi \leq 0$. (monotonie) (25)

Tedy u, definované (21) je (jediné) klasické řešení úlohy (18) pro $f \equiv 0$ na kouli $B_R(y)$, které navíc spojitě závisí na datech úlohy.

Pozn: Integrál v (21b) se nazývá Poissonův, a funkci

$$P_y(x,\xi) := \frac{1}{\varkappa_d R} \cdot \frac{R^2 - |x-y|^2}{|x-\xi|^d} > 0, \qquad (x,\xi) \in B_R(y) \times S_R(y)$$

se často říká Poissonovo jádro (Poisson kernel). Názvosloví ovšem není jednotné, někteří autoři pod Poissonovým jádrem rozumějí funkci

$$\frac{1}{R^{d-2}} \frac{R^2 - |x-y|^2}{|x-\xi|^d},$$

či jiné varianty, lišící se však vesměs pouze o multiplikativní konstantu. Vlastnostmi Poissonova jádra se ještě budeme zabývat.

<u>Důkaz</u> (věty o Poiss. integrálu)

- Monotonie (25) je důsledkem (21b) a toho, že $P_y(x,\xi) > 0$, $x \in B_R(y)$.
- Pro $x_0 \in B_R(y)$ pevný je $\min\limits_{\xi \in S_R(y)} |x_0 - \xi| = c > 0$, proto existuje $U(x_0)$, že

  $\overline{U(x_0)} \subset B_R(y)$. Dále odtud plyne, že funkce za znamením integrálu v (21) má všechny derivace dle x v x_0 okolí. Integrabilními majorantami při derivování D_x^α dle parametru x jsou vhodné konstanty, neboť $\varphi(\xi)\, D_x^\alpha\left(\frac{R^2 - |x-y|^2}{|x-\xi|^d}\right)$ jsou omezené na kompaktu $(x,\xi) \in \overline{U(x_0)} \times S_R(y)$.

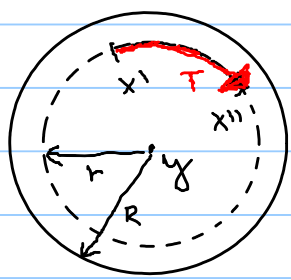
Podle věty o derivování integrálu dle parametru tedy $D_x^\alpha u(x_0) \in \mathbb{R}$ $\forall \alpha$.
Protože $x_0 \in B_R(y)$ byl libovolný, máme $u \in C^\infty(B_R(y))$.

- Odtud též plyne

$$\Delta u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int_{S_R(y)} \varphi(\xi)\, \underbrace{\Delta_x \left(\frac{R^2 - |x-y|^2}{|x-y|^d}\right)}_{=0,\ \text{viz } (4),\ \text{neboť } R = |\xi - y|} dS(\xi) = 0, \quad \forall x \in B_R(y), \qquad (26)$$

tedy platí (23).

- Spočtěme nyní $I(x) := \int_{S_R(y)} P_y(x,\xi)\, dS(\xi)$, $x \in B_R(y)$, tj. integrál (21b) pro speciální volbu $\varphi \equiv 1$. Za tím účelem zvolíme $0 < r < R$ a body $x', x'' \in S_r(y)$.



Definujme rotaci $T : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, <u>otočení</u> kolem středu y, tj. $T(y) = y$ a takové, že

$$T(x') = x''.$$

Potom
$$|T(x') - y| = |x' - y| = r$$
$$|T(x') - T(\xi)| = |x' - \xi| \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

(T je isometrie)

Máme

$$I(x'') = \frac{1}{\varkappa_d R} \int_{S_R(y)} \frac{R^2 - |T(x') - y|^2}{|T(x') - \xi|^d}\, dS(\xi) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int_{S_R(y)} \frac{R^2 - |x' - y|^2}{\underbrace{|T(x') - T(\xi)|^d}_{= |x'-\xi|^d}}\, dS(\xi) = I(x'),$$

hodnota integrálu se nezmění otočením celé sféry

Tedy $I(x)\big|_{S_r(y)} =: c(r)$ je konstantní na sféře $S_r(y)$. Protože víme $\Delta I = 0$ na $B_r(y)$ (derivace dle parametru, jako v (26)) a $I \in C^2(B_r(y)) \cap C(\overline{B_r(y)})$, máme dle principu maxima (viz (20))

$$\exists c \in \mathbb{R}, \qquad I(x) = c \qquad \forall x \in \overline{B_r(y)}.$$

Konstantu najdeme dosazením středu koule y:

$$c = I(y) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int_{S_R(y)} \frac{R^2 - 0}{R^d}\, dS(\xi) = \frac{1}{\varkappa_d R} R^{2-d} \cdot \varkappa_d R^{d-1} = 1.$$

Protože $0 < r < R$ bylo libovolné, máme

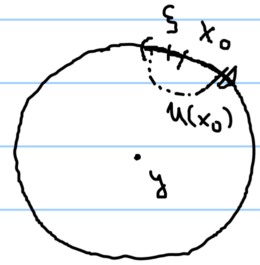
$$\int_{S_R(y)} P_y(x,\xi)\, dS(\xi) = 1 \qquad \forall x \in B_R(y). \tag{27}$$

- Nejobtížnější je ukázat, že $u \in C(\overline{B_R(y)})$. Volme $x_0 \in S_R(y)$ a uvažujme $x \in \mathcal{U}(x_0) \cap B_R(y)$, kde velikost $\mathcal{U}(x_0)$ určíme později. Volme dále pevné $\varepsilon > 0$. S využitím (27) je

$$u(x) - \varphi(x_0) = \int_{S_R(y)} \big(\varphi(\xi) - \varphi(x_0)\big) P_y(x,\xi)\, dS(\xi) \tag{28}$$

K $\varepsilon > 0$ najdeme nyní ze spojitosti φ takové $\delta > 0$, že

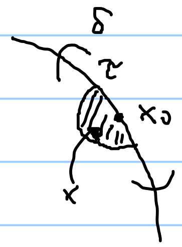
$$|x_0 - \xi| < \delta,\ \xi \in S_R(y) \Rightarrow |\varphi(\xi) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$



Odtud a z (28) je

$$|u(x) - \varphi(x_0)| \le \varepsilon + \int_{S_R(y) \setminus \mathcal{U}^\delta(x_0)} \underbrace{|\varphi(\xi) - \varphi(x_0)|}_{\text{už není malé}}\ \underbrace{P_y(x,\xi)}_{\text{je malé pro } \xi \in S_R(y) \setminus \mathcal{U}^\delta(x_0)\,?}\, dS(\xi)$$

K nalezenému (a tedy pevnému) $\delta > 0$ budu hledat $\tau > 0$, aby nejprve $\tau < \frac{\delta}{2}$ (další podmínky na $\tau > 0$ ještě budou) a budu uvažovat $x \in B_R(y)$ taková, že $|x - x_0| < \tau$.



Vidím $R - |x-y| < \tau$

Dále mám $|x - x_0| < \tau < \frac{\delta}{2}$

a vím, že integruji přes ξ splňující $|\xi - x_0| \geq \delta$.

Proto je $\underbrace{|x-\xi| \geq |\xi - x_0| - |x - x_0|}_{\Delta\text{-nerovnost}} \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$, tedy pro taková x, ξ

je $$P_y(x,\xi) = \frac{1}{\varkappa_d R}\,\frac{R^2-|x-y|^2}{|x-\xi|^d} \le \frac{1}{\varkappa_d R}\,\frac{\overbrace{(R+|x-y|)}^{\le 2R}\overbrace{(R-|x-y|)}^{<\tau}}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^d} = \frac{2^{d+1}}{\varkappa_d \delta^d}\cdot\tau < \varepsilon$$

podmínka pro τ.

Tj. zvolíme $\tau < \min\left(\frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon \varkappa_d \delta^d}{2^{d+1}}\right)$, potom $\exists c>0$, že pro $x \in B_R(y)$, $|x-x_0|<\tau$ je $|u(x) - \varphi(x_0)| < c\varepsilon$ cbd.

- Konečně je z (21a), (21b)

$$\|u\|_{C(\overline{B_R(y)})} \le \|\varphi\|_{C(S_R(y))} \max\Big(1, \underbrace{\int_{S_R(y)} P_y(x,\xi)\,dS(\xi)}_{=1}\Big) = \|\varphi\|_{C(S_R(y))}$$

Jednoznačnost plyne z předch. věty.

cbd. $\boxtimes$

$\boxed{3.4.}$ Věty o střední hodnotě pro harmonické funkce

Také se jim říká věty o průměru.

Pozn (značení): $\frac{1}{|M|}\int_M f =: \fint_M f$, tzv. integrální průměr.

$\boxed{\text{Věta}}$ (o průměru)

Buď $u \in H(\Omega)$, Ω otevřená v $\mathbb{R}^d$, $d \geq 2$. Potom pro všechna $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ platí

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d r^{d-1}} \int_{S_r(x)} u(\xi)\, dS(\xi) = \fint_{S_r(x)} u(\xi)\, dS(\xi)$$

$$= \frac{d}{\varkappa_d R^d} \int_{B_R(x)} u(\xi)\, d\xi = \fint_{B_R(x)} u(y)\, dy. \tag{29}$$

(D). Podle věty o 3 potenciálech (neboť $u \in C^2(\overline{B_r(x)})$) je (pro $d>2$) s uvážením $\Delta u = 0$,

$$(d-2)\varkappa_d u(x) = \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\, dS(\xi) - \int_{S_r(x)} u(\xi) \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\, dS(\xi). \tag{30}$$

Protože $|x-\xi| = r$, máme $\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} = \frac{1}{r^{d-2}}$, první integrál je tedy roven

$$\frac{1}{r^{d-2}} \int_{S_r(x)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) = \frac{1}{r^{d-2}} \int_{B_r(x)} \Delta u(\xi) = 0.$$

Důsledek „(7)" Gaussovy věty – viz „tabule"

Ve druhém integrálu spočteme

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} = (2-d)|x-\xi|^{1-d} = (2-d) r^{1-d}.$$

viz (10')

Celkem tedy z (30) plyne

$$(d-2)\varkappa_d u(x) = \frac{d-2}{r^{d-1}} \int_{S_r(x)} u(\xi)\, dS(\xi),$$ což je první část (29).

Dále: Násobme vztah (29) číslem r^{d-1} a integrujme přes $r \in (0,R)$, dokud $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$. Dostaneme:

$$\underbrace{\int_0^R r^{d-1} u(x)\,dr}_{=\frac{R^d}{d}u(x)} = \frac{1}{\varkappa_d}\int_0^R \int_{S_r(x)} u(\xi)\,dS(\xi)\,dr = \frac{1}{\varkappa_d}\int_{B_R(x)} u(\xi)\,d\xi$$

„sférická Fubiniho věta" (viz (35), str. 87)

$$\Rightarrow \quad u(x) = \frac{d}{\varkappa_d R^d}\int_{B_R(x)} u(\xi)\,d\xi = ⨏_{B_R(x)} u(y)\,dy. \qquad (31)$$

$\boxtimes$

Věta o průměru (a její důsledek) tedy říká, že pro harmonickou funkci je hodnota ve středu koule průměrem hodnot jak na všech sférách, tak na všech soustředných koulích, dokud jsou s nimi v oblasti, ve které je u harmonická. Čísla $\varkappa_d r^{d-1}$ a $\frac{\varkappa_d R^d}{d}$ vyjadřují totiž číselně po řadě velikost povrchu sféry v $\mathbb{R}^d$ o poloměru r, a objemu koule v $\mathbb{R}^d$ o poloměru R.

Ještě zajímavější je následující <u>obrácená věta o průměru</u>.

Věta (obrácená věta o průměru)
Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená, $u \in C(\Omega)$. Platí-li (29) <u>pro všechna</u> $x \in \Omega$ a $r > 0$ taková, že $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$, pak $u \in C^\infty(\Omega)$ a $\Delta u = 0$.

<u>Pozn.</u>: Z uvedené věty plyne, že platnost vztahu (29) pro všechna $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$ lze vzít jako definici pojmu harmonická funkce pro funkce, které jsou <u>pouze spojité</u>. Je ovšem pravda, že „pouze spojité" harmonické fce, definované pomocí (29), neexistují, každá taková totiž je podle předchozí věty třídy C^∞.

V důkazu předchozí věty užijeme techniku regularizátorů. Definujme tedy nejprve tento pojem. Dále ve větě použijeme integraci pomocí sférické Fubiniovy věty a sférické souřadnice – viz cvičení za důkazem.

Def. Buď $h > 0$; funkci $\omega_h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ nazveme regularizátorem (s nosičem v $B_h(0)$), pokud

- $\omega_h \in C^\infty_{cpt}(\mathbb{R}^d)$ $(\equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^d))$
- $\operatorname{supp} \omega_h \subset B_h(0)$
- $\omega \geq 0$ v $\mathbb{R}^d$, $\int_{\mathbb{R}^d} \omega_h = 1$
- existuje $\overline{\omega}_h : \langle 0, +\infty) \to \mathbb{R}$, že $\omega_h(x) = \overline{\omega}_h(|x|)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$.

Příkladem regularizátoru je např. fce

$$\omega_h(x) := \begin{cases} 0, & |x| \geq h, \\ c \cdot \exp\left(-\frac{h^2}{h^2 - |x|^2}\right), & |x| \leq h, \end{cases}$$

pro vhodné $c > 0$.

Důkaz (předchozí věty)

(1) Buď $x \in \Omega$ libovolné, nejprve $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$ a zvolme $0 < h \leq R$ pevně.

Pro všechna $r \in (0, R\rangle$ jak máme dle (29)

$$\frac{1}{\varkappa_d r^{d-1}} \int_{S_r(x)} u(\xi)\, dS(\xi) = u(x).$$

Násobme tento vztah výrazem $\varkappa_d r^{d-1} \overline{\omega}_h(r)$, kde

$$\overline{\omega}_h(r) = \overline{\omega}_h(|x-\xi|) = \omega_h(x-\xi)$$

je regularizátor s nosičem v $B_h(0)$. Poté výsledek integrujme $\int_0^R dr$.

Dostaneme:

$$\underbrace{\int_0^R \int_{S_r(x)}}_{\int_{B_R(x)} \text{ (sférická Fubiniova) viz (35)}} u(\xi)\, \overline{\omega}_h(r)\, dS(\xi)\, dr = u(x) \underbrace{\int_0^R r^{d-1} \overline{\omega}_h(r)\, \varkappa_d\, dr}_{h \leq R \Rightarrow \int_0^\infty \text{ místo } \int_0^R}$$

Tj. $\displaystyle\int_{B_R(x)} u(\xi)\,\overline{\omega}_h(|x-\xi|)\,d\xi \;=\; u(x)\int_0^\infty r^{d-1}\varkappa_d\,\overline{\omega}_h(r)\,dr$

$\quad\|$ díky nosiči $\overline{\omega}_h$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\|$ sférické souřadnice, viz (34)

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)\,\omega_h(x-\xi)\,d\xi \;=\; u(x)\int_{\mathbb{R}^d}\omega_h(x)\,dx \;=\; u(x).$$

Tedy máme

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^d} u(\xi)\,\omega_h(x-\xi)\,d\xi.$$

Protože ω_h je třídy C^∞ a má (spolu se všemi svými derivacemi) kompaktní nosič, plyne derivováním integrálu vpravo, dle parametru x, že $D^\alpha u(x)\in\mathbb{R}$, pro každý multiindex α. Protože $x\in\Omega$ byl libovolný, máme $u\in C^\infty(\Omega)$.

(2) Volme opět $x\in\Omega$, $\overline{B_R(x)}\subset\Omega$ a napišme větu o třech potenciálech pro u (už víme, že $u\in C^2(\overline{B_R(\Omega)})$), a pro střed koule x:
(opět dokazujeme pouze pro $d>2$):

$$(d-2)\varkappa_d\,u(x) = -\int_{B_R(x)}\Delta u\,\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\,d\xi + \int_{S_R(x)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\cdot\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\,dS(\xi) - \int_{S_R(x)} u\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\right)dS(\xi). \tag{32}$$

Je-li x střed koule $B_R(x)$, máme ve druhém resp. třetím integrálu

$$\int_{S_R(x)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}} = \frac{1}{R^{d-2}}\int_{S_R(x)}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,dS(\xi) = \frac{1}{R^{d-2}}\int_{B_R(x)}\Delta u(\xi)\,d\xi$$

resp.

$$-\int_{S_R(x)} u\,\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\right)dS(\xi) \overset{(10)}{=} (d-2)R^{1-d}\int_{S_R(x)} u(\xi)\,dS(\xi) \overset{(29)}{=} (d-2)\varkappa_d\,u(x).$$

Celkem tedy, po úpravě, dostaneme z (32)

$$0 = \int_{B_R(x)}\Delta u(\xi)\left(\frac{1}{R^{d-2}} - \frac{1}{|x-\xi|^{d-2}}\right)d\xi. \tag{33}$$

Protože pro každé pevné $\xi \in B_R(x)$ je $|x-\xi|<R$, je závorka v integrálu v (33) kladná pro všechna $\xi \in B_R(x)\setminus\{x\}$. Ukážeme, že (33) implikuje, že $\Delta u(x)=0$. Když například $\Delta u(x)>0$, najdeme nejprve (ze spojitosti u) tak malé $R>0$, aby $\Delta u(\xi)>0$ $\forall \xi \in B_R(x)$. Pak ovšem integrál vpravo v (33) je kladný, což je spor. Podobně dokážeme spor pro $\Delta u(x)<0$, cbd. $\boxtimes$

Pozn.: Pokud v obrácené větě o průměru předpokládáme $u \in C^2(\Omega)$, můžeme ihned přikročit k 2. části důkazu.

Cvičení:

(1) Buď $u \in C(\Omega)$, Ω otevřená, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \{y\}$, přičemž $\Delta u = 0$ v Ω_1, $\Delta u = 0$ v Ω_2, $y \notin \Omega_1 \cup \Omega_2$. Ukažte, že potom nemusí platit $\Delta u = 0$ v Ω. Návod: uvažujte $\Omega = (0,1)$.

(2) Dokažte předchozí větu pro $d=2$.

(3) S využitím sférických souřadnic v $\mathbb{R}^d$ ukažte: Nechť $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ je sféricky symetrická, tj. existuje $\bar f : \langle 0,\infty) \to \mathbb{R}$ taková, že $f(x) = \bar f(|x|)$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$. Nechť navíc existuje $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx$.

Potom
$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \varkappa_d \int_0^\infty \bar f(r)\, r^{d-1}\,dr, \tag{34}$$
kde $\varkappa_d$ je plocha jednotkové sféry v $\mathbb{R}^d$.

(4) „Sférická Fubiniho věta": Nechť existuje $\int_{B_R(x)} f(y)\,dy$. Potom
$$\int_{B_R(x)} f(y)\,dy = \int_0^R \int_{S_r(x)} f(\xi)\,dS(\xi)\,dr. \tag{35}$$

Pozn.: Jak (34) tak (35) lze ukázat vyjádřením integrálu vlevo pomocí sférických souřadnic v $\mathbb{R}^d$. Viz též „Cvičení z PDR č. 1".

3.5. Princip maxima

Tento paragraf poněkud vybočí z tématu „harmonické funkce". Princip maxima (minima) pro ně jsme již ostatně ukázali v paragrafu 3.3. Zde se budeme zabývat obdobným tvrzením pro obecné lineární eliptické rovnice. I zde hraje důležitou roli omezenost množiny, na které princip maxima studujeme.

Buď tedy $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ omezená otevřená množina, a uvažujme

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ a_{ij}, b_j, c, f \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \quad i,j = 1,\dots,d \\ &\text{kde} \\ &\bullet\ a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \qquad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall i,j = 1,\dots,d. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Pro $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ definujme operátor

$$Lu(x) := \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + c(x)u(x), \quad x \in \Omega. \tag{37}$$

V paragrafu 2.4 (viz (74) a par. 2.4 a (37) zde) jsme ukázali, jak převést výraz v (37) na tzv. kanonický tvar v bodě. Nyní budeme postupovat poněkud jinak. Zajímá nás pouze situace, kdy je výraz vpravo v (37) eliptický, specifikujeme tedy jeho elipticitu, a ponecháme operátor L v jeho obecném tvaru.

Def. Nechť platí (36), (37). Řekneme, že L splňuje podmínku elipticity v $\overline{\Omega}$, pokud

$$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j > 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \xi \neq 0,\ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{38}$$

Cvičení. Ukažte: Platí-li (36)–(38), je rovnice $Lu = f$ eliptická ve všech bodech $x \in \Omega$, ve smyslu paragrafu 2.4.

Věta (Zobecněný slabý princip maxima pro eliptické rovnice)
Buď Ω omezená otevřená množina v $\mathbb{R}^d$, buď $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ a nechť platí (36)–(38). Potom platí následující:

(I) Je-li $c \equiv 0$ v Ω a

$$Lu \geq 0 \text{ v } \Omega, \quad \text{potom} \quad \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x), \tag{39}$$

$$Lu \leq 0 \text{ v } \Omega, \quad \text{potom} \quad \min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \min_{x\in\partial\Omega} u(x), \tag{40}$$

$$Lu = 0 \text{ v } \Omega, \quad \text{potom} \quad \min_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \max_{\partial\Omega} u, \; x\in\Omega. \tag{41}$$

(II) Je-li $c \leq 0$ v Ω a

$$Lu \geq 0 \text{ v } \Omega, \quad \text{potom} \quad \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \leq \max_{x\in\partial\Omega} u^{+}(x), \tag{42}$$

$$Lu \leq 0 \text{ v } \Omega, \quad \text{potom} \quad \min_{x\in\overline{\Omega}} u(x) \geq \min_{x\in\partial\Omega} u^{-}(x), \tag{43}$$

$$Lu = 0 \text{ v } \Omega, \quad \text{potom} \quad \max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|. \tag{44}$$

kde $u^{+} = \max(u,0)$, $u^{-} = \min(u,0)$.

Pozn.: • Podmínka (42) říká, že kladného maxima nelze nabýt uvnitř Ω, (43) říká, že záporného minima nelze nabýt uvnitř Ω.

• $Lu \geq 0$ v Ω je totéž jako $Lu = f$ v Ω, kde $f \geq 0$ v Ω.

Pozn.: Podmínku $c \leq 0$ nelze vynechat. Je-li totiž $c \geq 0$, princip maxima (minima) neplatí: Uvažujme rovnici

$$\Delta u + 2u = 0 \quad \text{v } \Omega = (0,2\pi)\times(0,2\pi) \subset \mathbb{R}^2.$$

Funkce $u(x,y) = \sin x \cdot \sin y$ je nulová na $\partial\Omega$ a přitom nabývá kladného maxima i záporného minima uvnitř Ω.

Je otázkou, zda na tuto vlastnost nahlížet jako na „špatnou" či jako na „dobrou". Z jednoho úhlu pohledu je jistě nepříjemné, že je porušen princip maxima, a tedy i jednoznačnost: funkce $u \equiv 0$ je také řešením výše zmíněné úlohy s nulovými hodnotami na hranici.

Jiný úhel pohledu však říká, že právě díky této vlastnosti je možno najít vlastní funkce a vlastní čísla Laplaceova operátoru, tedy netriviální (= nenulové) řešení úlohy

$$-\Delta u = \lambda u \quad \text{v } \Omega$$

$$u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega$$

Zobecněný slabý princip maxima pak říká, že pokud existují vlastní čísla operátoru „$-\Delta$", pak jsou všechna kladná.

Pozorování:

Platí-li (38), lze ukázat dokonce víc: volme $\xi = (0, \dots, 1, \dots 0)$, kde 1 je na k-té pozici,

pak $\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_i \xi_j = a_{kk}(x) > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$. Je-li Ω omezená, je $\overline{\Omega}$ kompaktní, a funkce $a_{kk} \in C(\overline{\Omega})$ nabývá na $\overline{\Omega}$ kladného minima $\overline{a}_k$.

Tedy jsme ukázali, že z (36)-(38) plyne

$$\forall k\ \exists \overline{a}_k > 0, \quad a_{kk}(x) \geq \overline{a}_k > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{45}$$

Tato vlastnost neplatí, je-li Ω neomezená.

Důkaz (zobecněného slabého principu maxima).

(I) Dokážeme pouze (39), neboť (40) se dokáže podobně (případně lze odvodit z (39) přechodem od funkce „u" k funkci „$-u$". (41) je pak důsledkem (39) a (40).

Mějme tedy $c \equiv 0$, a $Lu \geq 0$. Budeme postupovat obdobně jako v důkaze věty o slabém principu maxima pro harmonické funkce.

Volme $\gamma > 0$ tak, aby

$$\gamma^2 a_{11}(x) + \gamma b_1(x) > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{46}$$

To lze vždy zařídit:

máme dle (45): $\gamma^2 a_{11}(x) + \gamma b_1(x) \geq \gamma^2 \overline{a}_1 - \gamma \|b_1\|_\infty =$

$$= \gamma^2\Big(\underbrace{\overline{a}_1}_{>0} - \frac{1}{\gamma}\|b_1\|_\infty\Big) > 0$$

volíme γ tak velké, aby závorka byla kladná.

Volme $\varepsilon > 0$ a položme $u_\varepsilon(x) := u(x) + \varepsilon e^{\gamma x_1}$.

Potom

$$Lu_\varepsilon(x) = \underbrace{Lu(x)}_{\geq 0} + \varepsilon \underbrace{\left(\gamma^2 a_{11}(x) + \gamma b_1(x)\right)}_{>0} e^{\gamma x_1} > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega},\ \forall \varepsilon > 0. \tag{47}$$

Tvrdím, že u_ε splňuje podmínku $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max\limits_{\partial\Omega} u_\varepsilon$. Nechť tomu tak není, nechť se tedy hodnota $\max\limits_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon$ nabývá v bodě $x_0 \in \Omega$. Potom
$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_j}(x_0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, d$, a matice $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)_{i,j=1}^{d,d}$ je negativně definitní.

$$\text{Pak} \quad L u_\varepsilon(x_0) = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x_0) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)}_{\le 0} + 0 + 0 \le 0. \tag{48}$$

$\le 0 \to$ Tento krok vyžaduje jistou znalost z LA. Viz cvičení na důkazem.

Výraz (47) a (48) jsou ovšem ve sporu.
Tedy skutečně je
$$\max_{\overline{\Omega}} u_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon$$
a důkaz je stejný jako v případě slabého principu maxima pro harmonické funkce dokončen limitním přechodem $\varepsilon \to 0+$.

(II) Ukážeme (42), mějme tedy $c \le 0$, $Lu \ge 0$ v omezené otevřené množině Ω.
Je-li $u \le 0$ v Ω, pak $u \le 0$ na $\overline{\Omega}$ (neboť $u \in C(\overline{\Omega})$), a tedy
$$\max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \le 0 = \max_{x \in \partial\Omega} u^+(x), \quad \text{což je (42)}.$$

Buď tedy $\Omega^+ := \Omega \cap \{x \in \Omega, u(x) > 0\} \ne \emptyset$. Potom na množině Ω^+ je
$$\tilde{L} u(x) := \sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{d} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} = \underbrace{L u(x)}_{\ge 0} \underbrace{- c(x) u(x)}_{\ge 0} \ge 0 \quad \text{v } \Omega^+$$
Operátor $\tilde{L}$ neobsahuje člen s $u(x)$, Ω^+ je otevřená a omezená, lze tedy pro $\tilde{L}$ na Ω^+ použít (39), odkud plyne, že
$$\max_{x \in \overline{\Omega^+}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega^+} u(x). \tag{49}$$

Dále je
$$0 < \max_{x \in \overline{\Omega}} u(x) \le \max_{x \in \overline{\Omega^+}} u(x) \overset{(49)}{=} \max_{x \in \partial\Omega^+} u(x) \overset{(*)}{=} \max_{x \in \partial\Omega} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u^+(x).$$

$\emptyset \ne \Omega^+ \subset \Omega$ na $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega^+}$ je $u \le 0$ neboť výraz vlevo je kladný.

Rovnost (*) plyne z této úvahy: pro $x \in \partial\Omega^+ \cap \Omega$ je $u(x) = 0$, jinak by došlo ke sporu s definicí Ω^+ (rozmyslete si). Protože $\max\limits_{x \in \partial\Omega^+} u(x) > 0$, nabývá se na té části hranice $\partial\Omega^+$, která je částí $\partial\Omega$.

(43) se dokáže podobně (případně se přejde k funkci „$-u$" a použije se tvrzení (42)).
Konečně (44) je důsledkem (42) a (43) – rozmyslete si podrobně. $\boxtimes$

Cvičení: Nechť jsou matice A, B rozměru $d \times d$ obě symetrické a negativně definitní. Ukažte, že $\mathrm{Tr}(A \cdot B) \leq 0$.

Návod: Pište $B = \sum\limits_{j=1}^{d} \lambda_j q_j \cdot q_j^T$, kde λ_j jsou vlastní čísla B a q_j jim odpovídající vlastní vektory.

Ukažte pomocí tohoto tvrzení nerovnost v (48).

Pozn: Pro $c \leq 0$ na omezené oblasti dokážeme podobně (stejně jako v případě Laplaceovy rovnice) z principu maxima tvrzení, že ve třídě $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ existuje nejvýše jedno u takové, že pro daná $f \in C(\Omega)$, $\varphi \in C(\partial\Omega)$ je

$$Lu = f \quad \text{v } \Omega \text{ ... omezená otevřená v } \mathbb{R}^d,$$
$$u = \varphi \quad \text{na } \partial\Omega.$$

3.6. Věta Liouvilleova a nerovnost Harnackova

Vracíme se na chvíli ke studiu harmonických funkcí. Následující věta je analogií stejnojmenného tvrzení, které platí pro omezené holomorfní funkce v $\mathbb{C}$.

Věta (Liouville)

Je-li u (alespoň jednostranně) omezená, $u \in H(\mathbb{R}^d)$. Potom u je konstantní v $\mathbb{R}^d$.

Důkaz. Tvrzení dokážeme pro $d > 2$, pro $d = 2$ by se důkaz vedl buď obdobně, nebo s odvoláním na komplexní Liouvilleovu větu – ponecháme jako cvičení obě varianty.

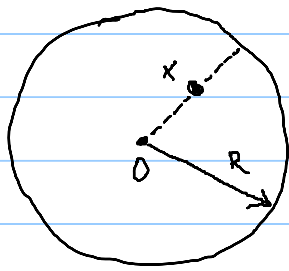
Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že:

- u je omezená zdola (pro u omezenou shora bychom uvažovali $(-u)$)
- $u \geq 0$ (pro obecnou u omezenou zdola, $u \geq c$, uvažíme $u - c \geq 0$, přičemž $u \in H(\mathbb{R}^d) \iff u - c \in H(\mathbb{R}^d)$).

Zvolíme pevně $0 \neq x \in \mathbb{R}^d$ a ukážeme $u(x) = u(0)$. Tím bude jasné, že $u = \text{konst}$ v $\mathbb{R}^d$.

Volme $R > |x|$. Pak platí:

$$u(x) = \frac{1}{\varkappa_d R} \int_{S_R(0)} u(\xi) \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^d} \, dS(\xi), \tag{50}$$



neboť integrál vpravo je Poissonův a tedy definuje na $B_R(0)$ řešení Laplaceovy rovnice, které nabývá na $S_R(0)$ hodnoty rovné u. Z jednoznačnosti řešení Laplaceovy rovnice je toto řešení rovno u.

Dále platí (viz obrázek)

$$R - |x| \leq |x - \xi| \leq R + |x| \qquad \forall \xi \in S_R(0),$$

odkud plyne

$$\frac{R^2 - |x|^2}{(R + |x|)^d} \leq \frac{R^2 - |x|^2}{|x - \xi|^d} \leq \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^d} \qquad \Big/ \cdot \frac{u(\xi)}{\varkappa_d R} \geq 0 \Big/ \int_{S_R(0)}$$

s využitím (50),

$$\frac{R^2-|x|^2}{(R+|x|)^d}\cdot\frac{1}{\varkappa_d R}\underbrace{\int_{S_R(0)} u(\xi)\,dS(\xi)}_{\substack{u(0)\varkappa_d R^{d-1} \\ \text{dle věty o průměru}}} \le u(x) \le \frac{R^2-|x|^2}{(R-|x|)^d}\cdot\frac{1}{\varkappa_d R}\underbrace{\int_{S_R(0)} u(\xi)\,dS(\xi)}_{\substack{u(0)\varkappa_d R^{d-1} \\ \text{dle věty o průměru}}}$$

tj.

$$u(0)\cdot\frac{R^{d-2}(R^2-|x|^2)}{(R+|x|)^d} \le u(x) \le u(0)\cdot\frac{R^{d-2}(R^2-|x|^2)}{(R+|x|)^d}. \qquad (51)$$

Protože $u\in H(\mathbb{R}^d)$ lze uvedenou úvahu provést pro libovolné $R>|x|$. Na základě toho lze v (51) provést limitní přechod $R\to\infty$, což dává

$$u(0)\le u(x)\le u(0), \quad \boxed{\text{cbd.}}$$

<u>Poznámka</u>

Pokud je pouze $u\in H(B_R(0))$, $u>0$, lze přesto odvodit nerovnosti (51), jak plyne z důkazu předchozí věty. Těmto nerovnostem se někdy říká nerovnosti Harnackova typu, nebo zjednodušeně Harnackovy nerovnosti. Ukazují, že i omezená harmonická funkce na množině menší než celý prostor „nemůže růst libovolně rychle". Následující dvě tvrzení patří svým charakterem do této skupiny (Harnackových) nerovností.

(1) Nechť $u\in H(B_R(0))$, $u>0$ na $B_R(0)$. Buďte $x,y\in B_r(0)$, kde $r<R$. Potom

$$\frac{u(x)}{u(y)}\le\frac{R^2}{R^2-r^2}\left(\frac{R+r}{R-r}\right)^d. \qquad (52)$$

Cvičení: dokažte odsud Liouvilleovu větu (návod: $u\in H(\mathbb{R}^d)\Rightarrow u\in H(B_R(0))$ $\forall R>0$)

(2) Buď $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ otevřená, $u\in H(\Omega)$, $u>0$. Potom

$$\forall K\subset\Omega,\ K \text{ kompaktní},\ \exists c>0,\ \forall x,y\in K,\ \frac{u(x)}{u(y)}\le c. \qquad (53)$$

Na závěr tohoto paragrafu zformulujeme (bez důkazu) tři tzv. Harnackovy věty. Jejich důkazy je možno nalézt v knize Teorie potenciálu (a najít v učebním textu J. Netuky k této přednášce).

$\boxed{\text{Věta}}$ (1. Harnackova)

Ω omezená oblast, $u_n \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u_n = 0$ v Ω, $u_n = g_n$ na $\partial\Omega$.

Nechť dále $g_n \rightrightarrows g$ na $\partial\Omega$.

Potom
- $\exists\, u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ v Ω, $u = g$ na $\partial\Omega$
- $u_n \rightrightarrows u$ na $\overline{\Omega}$
- $u_n, u \in C^\infty(\Omega)$, $D^\alpha u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} D^\alpha u$ v Ω.

$\boxed{\text{Věta}}$ (2. Harnackova)

Ω oblast, $u_n \in C^2(\Omega)$, $\Delta u_n = 0$ v Ω.

Nechť dále $\exists\, x_0 \in \Omega$, $u_n(x_0) \to u(x_0)$, a u_n je monotónní posl. fcí.

Potom
- $u_n \overset{loc}{\rightrightarrows} u$ v Ω
- $\Delta u = 0$ v Ω

$\boxed{\text{Věta}}$ (tzv. kompaktnost posl. harm. fcí, nebo „3. Harnackova")

Ω oblast v $\mathbb{R}^d$, $u_n \in C^2(\Omega)$, $\Delta u_n = 0$ v Ω.

Nechť dále $|u_n| \leq M$ stejnoměrně v $x \in \Omega$ a $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje $u_{n_k} \overset{loc}{\rightrightarrows} u$ v Ω, $\Delta u = 0$.

3.7. Dirichletova úloha pro Laplaceovu rovnici na omezené otevřené množině

V tomto paragrafu se budeme zabývat řešitelností Dirichletovy úlohy (18) na omezené otevřené množině Ω, pro $f \equiv 0$ v Ω, $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$.

Již víme, že klasické řešení u, pokud existuje, je ve třídě $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ určeno jednoznačně, a že vlastnosti hranice $\partial\Omega$ nehrají v tomto tvrzení žádnou roli. Naopak omezenost Ω byla pro jednoznačnost podstatná.

V dalším uvidíme, že při důkazu existence klasického řešení, zejména při důkazu nabývání okrajové podmínky φ, jsou vlastnosti hranice $\partial\Omega$ podstatné. V těchto úvahách bude hrát důležitou roli existence jisté speciální funkce, zvané bariéra.

Def. Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená množina s neprázdnou hranicí $\partial\Omega$. Buď $\xi \in \partial\Omega$.

(A) Funkci $w(x) = w_\xi(x) \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ nazveme bariéra v ξ, pokud platí

$$\left.\begin{array}{lll} (1) & \Delta w \le 0 & \text{na } \Omega, \\ (2) & w > 0 & \text{na } \overline{\Omega} \setminus \{\xi\}, \\ (3) & w(\xi) = 0. & \end{array}\right\} \quad (54)$$

(B) Bod $\xi \in \partial\Omega$ nazveme regulárním bodem Ω (vzhledem k Laplaceově operátoru), pokud v ξ existuje bariéra w_ξ ve smyslu předchozí definice.

Důležitost pojmu regulární bod, resp. bariéra, ukazuje následující věta.

$\boxed{\text{Věta}}$ Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená omezená množina s neprázdnou hranicí. Potom následující dva výroky jsou ekvivalentní:

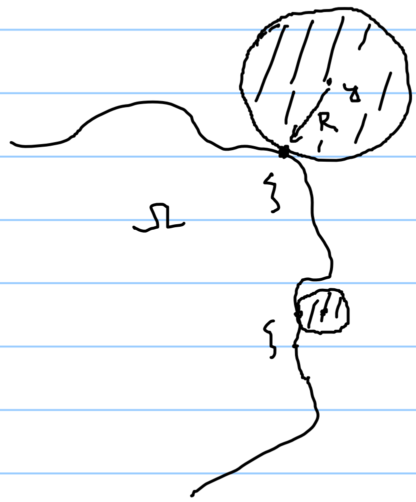
(a) $\forall \varphi \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ existuje $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, $\Delta u = 0$ v Ω, $u = \varphi$ na $\partial\Omega$

(b) všechny body $\xi \in \partial\Omega$ jsou regulárními body Ω.

Pozn. Vzniká samozřejmě důležitá otázka vhodného kritéria regularity bodu $\xi \in \partial\Omega$ (tj. vhodné, snadno ověřitelné postačující podmínky regularity bodu). Této problematice věnujme následující cvičení.

Cvičení:

- Řekneme, že otevřená množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ má vlastnost vnější koule v $\xi \in \partial\Omega$, pokud $\exists B_R(y) \subset \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ taková, že $\overline{B_R(y)} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$.



Ukažte: nechť má otevřená množina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ vlastnost vnější koule v $\xi \in \partial\Omega$, $B_R(y)$ budiž příslušná koule. Definujme

$$w_\xi(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{R^{d-2}} - \dfrac{1}{|x-y|^{d-2}}, & d > 2, \\[2ex] \ln\dfrac{1}{R} - \ln\dfrac{1}{|x-y|}, & d = 2. \end{cases} \tag{55}$$

Potom w_ξ je bariéra v ξ, a tedy bod $\xi \in \partial\Omega$ je regulárním bodem.

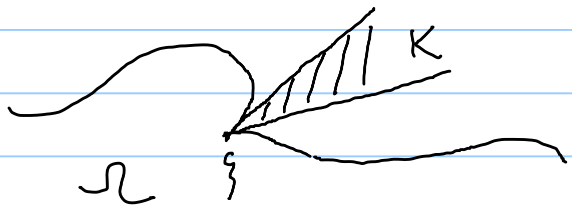
- Buď $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ otevřená množina, $\Omega \in C^2$. Potom Ω má vlastnost otevřené koule v každém bodě $\xi \in \partial\Omega$. Stejné tvrzení platí i v případě, kdy $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ je otevřená konvexní množina*) (nakreslete si!). Ukažte obě tvrzení jako cvičení.

*) Pozor: nikoli „uzávěr je konvexní", to by splňoval např. kruh bez středu.

Poznámka: • Z výše uvedených úvah plyne, že pro $\Omega \in C^2$ nebo pro Ω otevřenou konvexní existuje klasické řešení D.Ú. pro Laplaceovu rovnici, pro libovolnou spojitou okrajovou podmínku.

• Existují další kritéria, zaručující regularitu bodu $\xi \in \partial\Omega$, resp. existenci řešení D.Ú. pro Lapl. rovnici.

K tomu používáme tzv. vlastnost vnějšího kužele v bodě $\xi \in \partial\Omega$. Tato vlastnost požaduje existenci otevřeného kužele $K \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ takového, že ξ je jeho vrcholem, a $\overline{K} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$. Lze opět ukázat (tento důkaz je však mimo naše současné možnosti, viz tedy např. [·]), že má-li Ω ve všech hraničních bodech ξ vlastnost vnějšího kužele, existuje na Ω klasické řešení D.Ú. pro Lapl. rovnici, a to $\forall \varphi \in C(\partial\Omega)$.

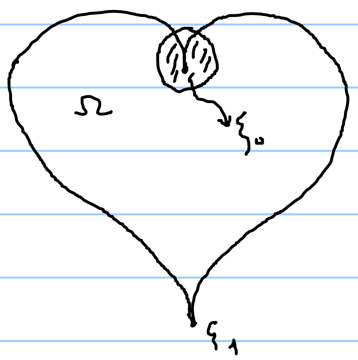


• Naopak lze ukázat, že pokud $\xi \in \partial\Omega$ není regulární bod, pak je jeho Lebesgueova hustota vůči Ω rovna 1, tj.

$$\lim_{r \to 0+} \frac{\lambda_d(B_r(\xi) \cap \Omega)}{\lambda_d(B_r(\xi))} = 1, \tag{56}$$

kde λ_d je příslušná d-dimenzionální Lebesgueova míra.

Př. Bod ξ_0 na obrázku níže je kandidátem na neregulární bod – lze však ukázat – viz [Gilbarg–Trudinger], že v $\mathbb{R}^2$ je bod ξ_0 regulární a v $\mathbb{R}^3$ (je-li Ω chápána rotačně symetrická) není.



Ve všech ostatních bodech $\xi \in \partial\Omega$ (včetně bodu ξ_1) má Ω vlastnost vnější koule, (přijatelně: nejsou to body hustoty 1 vůči Ω), tedy jsou všechny tyto body regulární.

<u>Důkaz (věty ze str. 97)</u>

(a) ⇒ (b): Buď $\xi \in \partial\Omega$ pevný. Volme $\varphi(x) := |x-\xi|$, $x \in \partial\Omega$, a nalezněme $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Delta u = 0$ v Ω, $u = \varphi$ na $\partial\Omega$. Potom u je bariéra v ξ.

(b) ⇒ (a). Naznačíme zde tzv. <u>Perronovu metodu</u> důkazu existence řešení. Jde o metodu, patřící do teorie potenciálu a čtenáře tedy odkazujeme na tuto přednášku. Perronův důkaz má dva kroky, a sice (I) konstrukce u (s přihlédnutím k φ) takového, že

$\Delta u = 0$ v Ω – tuto část značně odbudeme

(II) důkaz, že $u = \varphi$ na $\partial\Omega$ – tuto část ukážeme, abychom viděli roli bariéry.

<u>Ad (I)</u>: Definujme

$$A := \{ v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ \Delta v \geq 0 \text{ v } \Omega,\ v \leq \varphi \text{ na } \partial\Omega \},$$
$$B := \{ v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}),\ \Delta v \leq 0 \text{ v } \Omega,\ v \geq \varphi \text{ na } \partial\Omega \}.$$

Prvkům z A říkáme subřešení D.ú., prvkům z B superřešení. Funkci $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, splňující $\Delta v \geq 0$ v Ω, říkáme subharmonická v Ω, podobně $v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, splňující $\Delta v \leq 0$ v Ω, říkáme superharmonická v Ω.

Máme $c_A := \min_{x \in \partial\Omega} \varphi(x) \Rightarrow c_A \in A$, tedy $A \neq \emptyset$, podobně $B \neq \emptyset$ neboť $c_B := \max_{x \in \partial\Omega} \varphi(x) \in B$.

Dále se musí ukázat: • $v \leq w \quad \forall v \in A\ \forall w \in B$, odkud plyne $v \leq c_B = \text{konst}\ \forall v \in A$, $w \geq c_A = \text{konst}\ \forall w \in B$, tedy prvky A jsou funkce shora omezené a prvky B fce zdola omezené.

Na základě toho je funkce, definovaná ve všech bodech $x \in \Omega$ jako

$$u(x) := \sup_{v \in A} v(x)$$

dobře definovaná, konečná funkce. Lze také ukázat, že $u(x) := \inf_{w \in B} w(x)$.

Důkaz kroku (I) je pak nahrazen tím, že o této funkci ukážeme $u \in C^2(\Omega)$ a $\Delta u = 0$. Pozor, to dá ještě značnou práci! (viz kniha Renardy–Rogers).

ad (II): Buď $\xi \in \partial\Omega$ pevný regulární bod a $w(x)$ bariéra v ξ. Zvolme $\varepsilon > 0$ a najděme ze spojitosti φ takové $\delta_1 > 0$, že

$$x \in \partial\Omega,\ |x-\xi| < \delta_1 \implies |\varphi(x) - \varphi(\xi)| < \varepsilon. \qquad (57)$$

Položme dále $M := \max_{x \in \partial\Omega} |\varphi(x)| < +\infty$ a najděme $K > 0$ tak, že

$$x \in \overline{\Omega},\ |x-\xi| \geq \delta_1 \implies w(x) \geq \frac{2M}{K} > 0. \qquad (58)$$

To lze učinit neboť $w > 0$ na $\overline{\Omega} \setminus B_\delta(\xi)$, a má tedy na této (kompaktní) množině positivní minimum.

Budeme pro pevné $\xi \in \partial\Omega$, $\varepsilon > 0$ a $K > 0$ zvolené výše, zkoumat funkci $\varphi(\xi) + \varepsilon + Kw(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Pro $x \in \Omega$ dostaneme

$$\Delta_x\big(\varphi(\xi) + \varepsilon + K w(x)\big) = K \Delta w(x) \leq 0, \quad x \in \Omega. \qquad (59)$$

Pro $x \in \partial\Omega$ mohou nastat dvě možnosti:

(i) $|x-\xi| < \delta_1$, pak $\varphi(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon$

(ii) $|x-\xi| \geq \delta_1$, pak $\varphi(x) = \varphi(\xi) + \varphi(x) - \varphi(\xi) \leq \varphi(\xi) + 2M \overset{(58)}{\leq}$
$\leq \varphi(\xi) + K w(x)$

Shrnutím obou případů dostaneme:

$$x \in \partial\Omega \implies \varphi(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + K w(x). \qquad (60)$$

Z (59), (60) plyne, že $\varphi(\xi) + \varepsilon + K w(x) \in B$, kde množina B byla definována v části (I). Podobně ukážeme, že $\varphi(\xi) - \varepsilon - K w(x) \in A$.

Z konstrukce u v části (I) důkazu tedy dostaneme, že

$$\varphi(\xi) - \varepsilon - K w(x) \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + \varepsilon + K w(x), \quad x \in \Omega. \qquad (61)$$

Protože $\lim_{\substack{x \to \xi \\ x \in \Omega}} w(x) = 0$ lze nalézt $\delta_2 > 0$ takové, že $x \in \Omega \cap B_{\delta_2}(\xi) \implies$
$\implies |K w(x)| < \varepsilon$. Pro $x \in \Omega \cap B_\delta(\xi)$, kde $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, tedy je

$$\varphi(\xi) - 2\varepsilon \leq u(x) \leq \varphi(\xi) + 2\varepsilon$$

tj.

$$|u(x) - \varphi(\xi)| < 2\varepsilon. \qquad (62)$$

Tedy jsme pro $\xi \in \partial\Omega$ a $\varepsilon > 0$ nalezli $\delta > 0$, že pro $x \in \Omega \cap B_\delta(\xi)$ platí (62).

To ovšem znamená, že $\lim_{\substack{x \in \Omega \\ x \to \xi}} u(x) = \varphi(\xi)$, cbd. $\boxtimes$

4. EVOLUČNÍ ROVNICE

V této kapitole se budeme věnovat dvěma nejdůležitějším evolučním rovnicím, a sice rovnici vedení tepla – typickému zástupci parabolických rovnic, a vlnové rovnici, která je reprezentantem rovnic hyperbolických.

4.1. Rovnice vedení tepla (RVT)

<u>Definice</u> Buď $T>0, a>0, d\geq 1$, a nechť $Q_T := (0,T)\times\mathbb{R}^d$. Buďte dále $f\in C(Q_T)$, $g\in C(\mathbb{R}^d)$ dané funkce. Řekneme, že $u: \overline{Q_T}\to\mathbb{R}$ řeší Cauchyovu úlohu pro RVT s pravou stranou f a počáteční podmínkou g, v klasickém smyslu, pokud

(a) $u\in C(\overline{Q_T})$, $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\in C(Q_T)$, $\forall j=1,\dots,d$,

(b)
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - a^2\Delta u(t,x) &= f(t,x), && \forall (t,x)\in Q_T,\\ u(0,x) &= g(x), && x\in\mathbb{R}^d \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

<u>Pozn.</u>: Díky linearitě jak rovnice, tak i tvaru počáteční podmínky v (1) platí následující <u>princip superpozice řešení</u>: Je-li u_1 klasické řešení úlohy (1) pro $f\equiv 0$, a je-li u_2 je klasické řešení úlohy (1) pro $g\equiv 0$, je $u := u_1+u_2$ klasické řešení úlohy (1). Takto také budeme řešení u hledat.

V následující větě ukážeme (za jistých omezujících předpokladů na f,g) existenci klasického řešení pro RVT, které budeme dokonce schopni napsat v explicitním tvaru.

Věta Buď (ve situace, popsané v předchozí definici) navíc
- $f\in C^2(Q_T)$ omezená v Q_T spolu se všemi svými derivacemi až

do 2. řádu včetně,

- $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ omezená v $\mathbb{R}^d$.

Definujme pro $(t,x) \in Q_T$ (tj. speciálně pro $t>0$):

$$u_1(t,x) := \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}\, d\xi , \tag{2}$$

$$u_2(t,x) := \frac{1}{(4\pi a^2)^{d/2}} \int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(\tau,\xi)\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}}\, d\xi\, d\tau . \tag{3}$$

Buď dále

$$u(t,x) := \begin{cases} u_1(t,x) + u_2(t,x), & (t,x) \in Q_T, \\ g(x), & t=0,\ x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{4}$$

Potom u je klasickým řešením (1) ve smyslu předchozí definice. Dále platí $\|u_1\|_{\mathcal{C}(\overline{Q}_T)} \leq \|g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}$, $\|u_2\|_{\mathcal{C}(\overline{Q}_T)} \leq T\|f\|_{\mathcal{C}(\overline{Q}_T)}$, a tedy

$$\|u\|_{\mathcal{C}(\overline{Q}_T)} \leq \|g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} + T\|f\|_{\mathcal{C}(\overline{Q}_T)} , \tag{5}$$

tj. u je omezená na $\overline{Q}_T$ a závisí spojitě na datech úlohy.
Navíc je

- $u_1 \in \mathcal{C}^\infty(Q_T) \cap \mathcal{C}(\overline{Q}_T)$, dokonce $u_1 \in \mathcal{C}^\infty(Q_\infty) \cap \mathcal{C}(\overline{Q}_\infty)$, (6)
- $u_2 \in \mathcal{C}(\overline{Q}_T)$, $\frac{\partial u_2}{\partial t} \in \mathcal{C}(Q_T)$,
  $D^\alpha u_2 \in \mathcal{C}(Q_T)$, pro všechny multiindexy $\alpha = (0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$. (7)

<u>Pozn.</u>:
- Pokud je navíc $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ a $f \equiv 0$ v Q_T, máme

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx \qquad \forall t>0, \tag{8}$$

tedy „celkové množství tepla" v $\mathbb{R}^d$ je (při nepřítomnosti zdrojů) konstantní v čase.

- Z výše provedených úvah také plyne, že pokud je $f \equiv 0$, je řešení u úlohy (1) třídy $\mathcal{C}^\infty(Q_T) \cap \mathcal{C}(\overline{Q}_T)$, neboť $u = u_1$ pro $f \equiv 0$.

• Definujme
$$G(t,x) := \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{d/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \quad , \quad t>0,\, x\in\mathbb{R}^d, \qquad (9)$$

tzv. fundamentální řešení rovnice vedení tepla. Potom (2) resp. (3) lze psát:
$$u_1(t,x) = g(x) \underset{(x)}{*} G(t,x) \quad , \quad (t,x)\in Q_T, \qquad (2')$$
resp.
$$u_2(t,x) = Y(t)f(t,x) \underset{(t,x)}{*} Y(t)G(t,x) \quad , \quad (t,x)\in Q_T, \qquad (3')$$

kde „$\underset{(x)}{*}$" je konvoluce v proměnné x, „$\underset{(t,x)}{*}$" je konvoluce v proměnných (t,x), a
$$Y(t) = \begin{cases} 1 & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$
je tzv. Heavisideova funkce.

Pozn. (* – pro znalé teorie distribucí)
Pomocí vztahů (2'), (3') lze definovat u_1, u_2 ve všech případech, kdy mají odpovídající konvoluce smysl (nejobecněji například i pro jisté třídy distribucí). Dalším přirozeným krokem je jak pochopitelné hledání odpovědi na otázku, jestli je funkce $u := u_1 + u_2$ stále ještě řešením problému (1), případně v jakém smyslu. Tato problematika však přesahuje rámec tohoto učebního textu. Zájemce odkazujeme na [...].

Důkaz (věty ze str. 101).
I. Nejprve se budeme věnovat vlastnostem funkcí G a u_1.
(i) Zřejmě je $G\in C^\infty((0,\infty)\times\mathbb{R}^d)$, dále $G(t,-x) = G(t,x) > 0$, $\forall x\in\mathbb{R}^d$, $\forall t>0$.
(ii) Není těžké ukázat $\lim_{t\to 0+} G(t,x) = 0$ $\forall x\neq 0$, $\lim_{t\to 0+} G(t,0) = +\infty$.
(iii) Budiž $t>0$, $y\in\mathbb{R}^d$ pevná. Spočteme
$$\int_{\mathbb{R}^d} G(t,x-y)\,dx = \frac{1}{(4\pi a^2 t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}}\,dx =: I .$$

V posledním integrálu provedeme substituci $x-y = 2az\sqrt{t}$ s jakobiánem $\left|\frac{DX}{DZ}\right| = (4a^2 t)^{d/2}$, a dostaneme

$$I = \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x-y)\,dx = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2}\,dz = 1, \qquad \forall t>0, y\in\mathbb{R}^d. \quad (10)$$

Odtud lze také ihned ukázat (8): je-li $f\equiv 0$, je $u = u_1$. Z (10) dále plyne že $G(t,\cdot)\in L^1(\mathbb{R}^d)$ $\forall t>0$, je-li tedy $g\in L^1(\mathbb{R}^d)$, plyne z vlastností konvoluce (2'), že $u = u_1 \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Tedy je pro všechna $t>0$

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,G(t,x-y)\,dy\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} g(y) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^d} G(t,x-y)\,dx}_{=1 \text{ dle } (10)}\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} g(y)\,dy, \text{ cbd.}$$

(iv) Platí

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,x) - a^2 \Delta G(t,x) = 0, \text{ kdykoli } t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,$$

jak se lze přesvědčit přímým derivováním v (9).

Odtud ihned plyne, derivováním (2) dle parametrů t, x (pravidla podrobně, nenajmenujme na nalezení integrabilních majorant):

- $u_1 \in C^\infty(Q_T)$, dokonce pro libovolné $T>0$, tedy $u_1\in C^\infty(Q_\infty)$
- $\frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2\Delta u_1 = 0$ v Q_T, dokonce v Q_∞.

(v) Ukážeme, že u_1 nabývá pro $t=0$ počáteční podmínku g. Volme $t>0$ a $y\in\mathbb{R}^d$ pevně a mějme

$$u_1(t,y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(\xi)\,G(t,y-\xi)\,d\xi = \frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} g(y-2az\sqrt{t})\,e^{-z^2}\,dz,$$

pomocí substituce $y-\xi = 2az\sqrt{t}$, $\left|\frac{D\xi}{Dz}\right| = (4a^2t)^{d/2}$ (srov. (10)).

Za integračním znaménkem je, díky spojitosti g,

$$\lim_{(t,y)\to(0+,x)} g(y-2az\sqrt{t}) = g(x),$$

a díky omezenosti g je funkce ce^{-z^2} integrabilní majorantou pro tento limitní přechod.

Dostaneme tedy

$$\lim_{(t,y)\to(0+,x)} u_1(t,y) = g(x)\,\frac{1}{\pi^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2}\,dz = g(x). \qquad (11)$$

Je tedy $u_1 \in \mathcal{C}(\langle 0,T) \times \mathbb{R}^d)$ a $u_1(0,x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.
Existence vlastní limity $\lim_{(t,y)\to(T-,x)} u_1(t,y)$ pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ plyne snadno přímo z (2) – de facto umíte definovat u_1 na $(0,\infty) \times \mathbb{R}^d$, a, jak jsme si již uvědomili, dokonce $u_1 \in \mathcal{C}^\infty(Q_\infty)$. To spolu s (11) ukazuje, že dokonce $u_1 \in \mathcal{C}(\overline{Q_\infty})$.
Ukázali jsme tedy, že u_1 řeší úlohu (1) pro $f \equiv 0$ v klasickém smyslu.

(vi) Konečně je, pro $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ omezenou, pro pevné $t > 0$ a libovolné $x \in \mathbb{R}^d$

$$|u_1(t,x)| \leq \|g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x-\xi)\,d\xi \overset{(10)}{=} \|g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}.$$

Pro $t = 0$ je $u_1(0,\cdot) = g$ v $\mathbb{R}^d$, máme tedy celkově

$$\|u_1\|_{\mathcal{C}(\overline{Q_T})} \leq \|g\|_{\mathcal{C}(\mathbb{R}^d)}, \qquad (12)$$

což je odpovídající část odhadu (5).

(II) Ve druhé části ukážeme, že u_2 řeší úlohu (1) pro $f \not\equiv 0$ a $g \equiv 0$.
(i) Z vlastností integrálu s parametrem dostaneme (provedte podrobně), že $u_2 \in \mathcal{C}(\langle 0,T\rangle \times \mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha u_2 \in \mathcal{C}(Q_T)$, pro všechny multiindexy $\alpha = (0,\alpha_1,\dots,\alpha_d)$.
Všimněte si, že u_2 nelze (na rozdíl od u_1) pro $t > T$ ani definovat, neboť funkce f je definována jen pro $t < T$.
$\frac{\partial u_2}{\partial t}$ nelze spočítat technikou derivování podle parametru, spočteme ji tedy (později) přímo.
(ii) Buď $t > 0$ a $y \in \mathbb{R}^d$ libovolný a provedeme v integrálu (3) pro $u_2(t,y)$ substituci $y - \xi = 2az\sqrt{t-\tau}$ s jakobiánem

$$\left|\frac{D\xi}{Dz}\right| = \left(4a^2(t-\tau)\right)^{d/2}.$$

Dostaneme

$$u_2(t,y) = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} f\left(\tau, y - 2az\sqrt{t-\tau}\right) dz\, d\tau \,. \tag{13}$$

Odtud ihned, díky omezenosti f, plyne

$$|u_2(t,y)| \leq t \cdot \|f\|_{C(\overline{Q_T})} \leq T \|f\|_{C(\overline{Q_T})}, \quad (t,y) \in Q_T, \tag{14}$$

což je druhá část odhadu (5). První nerovnost v (14) však také ukazuje, že pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$ je

$$\lim_{(t,y)\to(0+,x)} u_2(t,y) = 0, \tag{15}$$

máme tedy $u_2 \in C(\overline{Q_T})$, a $u_2(0,x) = 0 \;\forall x \in \mathbb{R}^d$.

(iii) Zbývá dokázat, že $\frac{\partial u_2}{\partial t} \in C(Q_T)$ a to, že u_2 řeší rovnici (1) s pravou stranou f.
Nejprve spočteme $\frac{\partial u_2}{\partial t}$. Volme $t \in (0,T)$ a $h_0 > 0$ takové, aby $t+h \in (0,T)$ pro všechna $h \in (-h_0, h_0)$. Dále buď $x \in \mathbb{R}^d$ a počítejme

$$\frac{u_2(t+h,x) - u_2(t,x)}{h} \overset{(13)}{=} \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} \underbrace{\frac{f\left(\tau, x - 2az\sqrt{t+h-\tau}\right) - f\left(\tau, x - 2az\sqrt{t-\tau}\right)}{h}}_{=:A} dz\, d\tau$$

$$+ \frac{1}{h}\frac{1}{\pi^{d/2}} \int_t^{t+h} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} f\left(\tau, x - 2az\sqrt{t+h-\tau}\right) dz\, d\tau =: I_1 + I_2 \,.$$

Zabývejme se nejprve integrálem I_2. Podle věty o střední hodnotě pro vnější integrál $\int_t^{t+h} d\tau$ dostaneme, že existuje $\tau_h^* \in (t, t+h)$ takové, že

$$I_2 = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} \underbrace{f\left(\tau_h^*, x - 2az\sqrt{t+h-\tau_h^*}\right)}_{\downarrow} dz \longrightarrow f(t,x) \quad \text{pro } h \to 0 \,. \tag{16}$$

$f(t,x)$ pro $h \to 0$, díky spojitosti f. Protože f je omezená, je ce^{-z^2} integrabilní majorantou pro limitní přechod za znamením integrálu.

K integrálu I_1: Označíme-li pro pevné τ, x, z, t, $\varphi(h) := f\left(\tau, x - 2az\sqrt{t+h-\tau}\right)$, existuje podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě $\xi_h \in (0,h)$ takové, že

$$A = \frac{\varphi(h)-\varphi(0)}{h} = \varphi'(\xi_h) = \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\tau, \overbrace{x - 2az\sqrt{t+\xi_h-\tau}}^{=:\,y}) \cdot \overbrace{\frac{(-az_j)}{\sqrt{t+\xi_h-\tau}}}^{\frac{\partial y_j}{\partial h}\big/_{h=\xi_h}}}$$

$$\Big\downarrow\ h \to 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(\tau, x - 2az\sqrt{t-\tau}) \cdot \frac{(-az_j)}{\sqrt{t-\tau}}$$

Limitní přechod za znamením integrálu I_1 je odůvodněn podobně jako výše: první derivace f jsou omezené, tedy je funkce tvaru $\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} C|z|e^{-z^2}$ integrabilní majorantou.

V tomto vyjádření I_1 ještě provedeme integraci per partes v prostorové proměnné z, využívajíce přitom skutečnosti, že $(-z_j e^{-z^2}) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z_j}(e^{-z^2})$. Hraniční člen při per partes vyjdou nulové díky funkci e^{-z^2} a omezenosti f:

$$I_1 = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial y_j}(\tau, x-2az\sqrt{t-\tau}) \cdot \frac{(-az_j)}{\sqrt{t-\tau}}\, dz\, d\tau \overset{p.p.}{=}$$

$$= -\frac{1}{\pi^{d/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}(\tau, x-2az\sqrt{t-\tau}) \cdot \frac{(-a)}{\sqrt{t-\tau}} \cdot 2a\sqrt{t-\tau} \cdot \frac{1}{2} e^{-z^2}\, dz\, d\tau =$$

$$= \frac{a^2}{\pi^{d/2}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} e^{-z^2} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2}(\tau, x-2az\sqrt{t-\tau})\, dz\, d\tau = a^2 \Delta u_2(t,x).$$

Poslední rovnost plyne přímo z (13), dvojím derivováním dle parametru.

Celkově tedy je

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = f(t,x) + a^2 \Delta u_2(t,x) \in \mathcal{C}(Q_T),$$

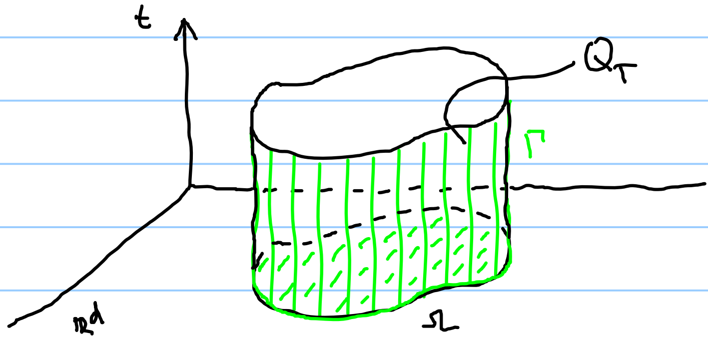
což zároveň ukazuje, že u_2 řeší rovnici (1). Tím je důkaz dokončen.

$\boxed{X}$

<u>Poznámka</u>. Předpoklad $f \in \mathcal{C}^2$ lze zeslabit na $f \in \mathcal{C}^1$, pouhé $f \in \mathcal{C}$ však nestačí (viz [John – Nečas]).

Tím jsme dokázali existenci řešení a jeho spojitou závislost na datech. Jednoznačnost bude plynout z principu maxima pro RVT. Ten dokážeme nejprve v případě omezené oblasti, teprve poté pro Cauchyovu úlohu.

<u>Definice</u> Buď $T>0$, $a>0$, $d\geq 1$, a nechť $Q_T := (0,T)\times\Omega$, kde $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ je omezená otevřená množina. Označme $\Gamma := (\{0\}\times\overline{\Omega})\cup(\langle 0,T\rangle\times\partial\Omega)$ tzv. parabolickou hranici Q_T (viz obr.)



$\Gamma =$ povrch „hrnce" $\overline{Q}_T$ „bez pokličky"

Buďte dále $f\in\mathcal{C}(Q_T)$, $g\in\mathcal{C}(\Gamma)$ dané funkce. Řekneme, že $u:\overline{Q}_T\to\mathbb{R}$ řeší okrajově-počáteční úlohu pro RVT na Q_T, s pravou stranou f a okrajově-počáteční podmínkou g, v klasickém smyslu, pokud

(a) $u\in\mathcal{C}(\overline{Q}_T)$, $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\in\mathcal{C}(\overline{Q}_T\setminus\Gamma)$ $\forall j=1,\dots,d$,

(b)
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(t,x)-a^2\Delta u(t,x) &= f(t,x), && \forall (t,x)\in Q_T,\\ u(t,x) &= g(t,x), && \forall (t,x)\in\Gamma. \end{aligned}\right\}\quad (17)$$

<u>Pozn</u>: Podmínka $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\in\mathcal{C}(\overline{Q}_T\setminus\Gamma)$ $\forall j=1,\dots,d$, požaduje, aby příslušné derivace byly spojitě rozšiřitelné vnitřkem Q_T na „horní pokličku" válce $\overline{Q}_T$.

Tuto vlastnost klasického řešení využijeme v důkaze následující věty.

Věta (slabý princip maxima pro RVT na omezené množině)

Buď v situaci předchozí definice u klasické řešení úlohy (17) <u>pro $f\equiv 0$</u>. Potom

$$\max_{\overline{Q}_T} u = \underset{\substack{\Gamma\\ \parallel\\ \max_\Gamma g}}{\max u}, \qquad \min_{\overline{Q}_T} u = \underset{\substack{\Gamma\\ \parallel\\ \min_\Gamma g}}{\min u}. \qquad (18)$$

<u>Důkaz</u>. $\overline{Q_T}$ i Γ jsou kompaktní v $\mathbb{R}^{d+1}$ a $u \in C(\overline{Q_T})$ resp. $u \in C(\Gamma)$. Všechna maxima a minima z (18) se proto nabývají.

Tvrzení (18) dokážeme pouze pro maximum, důkaz pro minimum by se vedl obdobně, resp. bychom aplikovali tvrzení o maximu na funkci $(-u)$.

Buď tedy $M := \max\limits_{\overline{Q_T}} u$, $m := \max\limits_{\Gamma} u$ a nechť (pro spor) je $m < M$.

Hodnota M se proto nabývá v bodě $(t_0, x_0) \in \overline{Q_T} \setminus \Gamma$.

Označme $L := \operatorname{diam}(\Omega) < \infty$ a definujme na $\overline{Q_T}$ funkci

$$v(t,x) := u(t,x) + \frac{M-m}{2} \cdot \frac{|x-x_0|^2}{L^2} . \tag{19}$$

Zřejmě $v \in C(\overline{Q_T})$ a tedy v nabývá svého maxima na $\overline{Q_T}$. Ukážeme, že toto maximum se nabývá v bodě $(t_1, x_1) \in \overline{Q_T} \setminus \Gamma$. Je totiž

- $v(t_0, x_0) = u(t_0, x_0) = M$,
- $(t,x) \in \Gamma \Rightarrow v(t,x) \le u(t,x) + \frac{M-m}{2} \underset{\substack{\uparrow \\ (t,x)\in\Gamma}}{\le} m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M$,

maximum se tedy nemůže nabývat v bodě Γ.

Vlastnosti u implikují $\frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \in C(\overline{Q_T} \setminus \Gamma)$, proto v bodě maxima $(t_1, x_1) \in \overline{Q_T} \setminus \Gamma$ je

- $\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}(t_1, x_1) \le 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta v(t_1, x_1) \le 0$
- $\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) \ge 0$ (přesněji, pokud $t_1 < T$, je $\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) = 0$, pokud však $t_1 = T$, je obecně $\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) \ge 0$ – rozmyslete si)

Celkově tedy je $\frac{\partial v}{\partial t}(t_1, x_1) - a^2 \Delta v(t_1, x_1) \ge 0$, nicméně přímý výpočet dává ve všech bodech $(t,x) \in \overline{Q_T} \setminus \Gamma$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = \underbrace{\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u}_{=0} - a^2 \frac{M-m}{2} \cdot \frac{2d}{L^2} = -\frac{a^2 d}{L^2}(M-m) < 0 ,$$

což je spor, dokazující větu. $\boxtimes$

Důsledky předchozí věty

(1) Buďte u_1 resp. u_2 klasická řešení úlohy (17) s daty f, g_1 resp. f, g_2. Potom
$$\|u_1 - u_2\|_{C(\overline{Q_T})} \leq \|g_1 - g_2\|_{C(\Gamma)} \qquad (20)$$

Důkaz: Funkce $u_1 - u_2$ splňuje předpoklad předchozí věty.

(2) Úloha (17) má nejvýše 1 klasické řešení.

Důkaz. Buďte u_1, u_2 dvě taková, která řeší úlohu (17) s daty f, g. Podle předchozího tvrzení je ale zřejmě pravá strana ve (20) nulová, tedy $u_1 = u_2$.

Pozn: Existenci klasického řešení úlohy (17) se zde zabývat nebudeme. V některých speciálních případech umíme řešení dokonce najít v uzavřeném tvaru (například ve tvaru nekonečné řady, Fourierovou metodou, na speciálních oblastech). Z jistého úhlu pohledu je pro nás důležitější tvrzení o jednoznačnosti (plynoucí z principu maxima): jsme ubezpečeni, že pokud se nám podaří nějakou metodou nalézt klasické řešení, nalezli jsme tím všechna řešení.

Formulujme nyní princip maxima pro Cauchyovu úlohu (1).

Věta (slabý princip maxima pro Cauchyovu úlohu pro RVT)
Buď $u \in C(\overline{Q_T})$ klasické řešení Cauchyovy úlohy pro RVT (1) ve smyslu definice ze str. 101, pro $f \equiv 0$ a $g \in C(\mathbb{R}^d)$ omezenou fci. Nechť u je navíc omezená na $\overline{Q_T}$. Potom

$$\inf_{\mathbb{R}^d} g \leq u(t,x) \leq \sup_{\mathbb{R}^d} g \qquad \forall (t,x) \in \overline{Q_T} \qquad (21)$$

Pozn: • Princip maxima pro Cauchyovu úlohu jsme tedy ustanovili ve třídě omezených řešení. Stejně jako výše odtud tedy plyne jednoznačnost klasického řešení Cauchyovy úlohy pro RVT ve třídě omezených funkcí.

- Uvedená tvrzení lze zobecnit na širší třídu funkcí: lze ukázat (viz např. [John–Nečas]), že pokud $|u(t,x)| \leq c_1 e^{c_2 x^2}$ pro vhodná c_1, c_2 a $(t,x) \in \overline{Q_T}$, opět platí princip maxima a tedy jednoznačnost řešení ve třídě funkcí s uvedeným růstem. Zároveň lze ukázat, že ve třídě funkcí s růstem $e^{x^{2+\varepsilon}}$ už princip maxima (a tedy ani jednoznačnost) neplatí. Uvažujeme-li tedy jsme hladké funkce bez omezení jejich růstu, není Cauchyova úloha pro RVT korektně definována (připouští více řešení, alespoň jedno z nich s růstem alespoň $e^{x^{2+\varepsilon}}$). Vzpomeňte si na paragraf o charakteristických plochách, kde jsme konstatovali, že jedním z problémů RVT je to, že počáteční podmínka se zadává na charakteristické ploše, což může působit problémy s korektností dané úlohy.

Dokažme nyní větu z předchozí strany:

Důkaz: Provedeme pouze pro sup. Označme $m := \sup_{\mathbb{R}^d} g \in \mathbb{R}$, neb g omezená. Označme dále

$$M := \sup_{Q_T} u \in \mathbb{R}, \text{ neb } u \text{ je omezená}.$$

Předpokládejme pro spor, že $m < M$. Pak $\exists \varepsilon > 0$, $\exists (t_0, x_0) \in (0,T) \times \mathbb{R}^d$ takové, že

$$u(t_0, x_0) > m + \varepsilon .$$

Položme

$$w(t,x) := 2ta^2 + \frac{|x|^2}{d} \geq 0 \quad \text{v} \quad \overline{Q_T} \tag{22}$$

pak

$$w(t_0, x_0) > 0 \tag{23}$$

a přitom pro všechna $(t,x) \in Q_T$ je

$$\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w = 2a^2 - \frac{a^2}{d} \cdot 2d = 0 . \tag{24}$$

Definujme dále

$$v(t,x) := m + \varepsilon \frac{w(t,x)}{w(t_0,x_0)} - u(t,x) \quad \text{v } \overline{Q_T}\,. \tag{25}$$

Je

$$v(t_0,x_0) = m + \varepsilon - u(t_0,x_0) < 0\,. \tag{26}$$

$$v(0,x) = \underbrace{\frac{\varepsilon}{w(t_0,x_0)}}_{\geqslant 0\ (23)} \frac{|x|^2}{d} + \underbrace{m - g(x)}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d\,. \tag{27}$$

Dále máme $\forall (t,x) \in Q_T$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = \frac{\varepsilon}{w(t_0,x_0)} \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \Delta w\right)}_{\substack{=0\\(24)}} - \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u\right)}_{=0} = 0\,. \tag{28}$$

Spočtěme ještě hodnoty $v(t,x)$ pro $|x| = R$, kde R zvolíme později. Je:

$$v(t,x) = m + \frac{\varepsilon}{w(t_0,x_0)}\left(2ta^2 + \frac{R^2}{d}\right) \underbrace{- u(t,x)}_{\geqslant -M}$$

$$\geqslant \underbrace{m - M}_{<0} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{d \cdot w(t_0,x_0)}}_{>0} R^2 > 0 \qquad \text{pro } t \in (0,T),\ |x| = R \tag{29}$$

R dostatečně velké.

Volme nyní $R > 0$ tak velké, aby platilo (29) a současně, aby $x_0 \in B_R(0)$, a vyšetřujme úlohu typu (14) pro fci v, na $(0,T) \times B_R(0)$.

Vidíme, že

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \Delta v = 0 \qquad \text{v } (0,T) \times B_R(0) \qquad (\text{viz } (28))$$

a

$$v \geqslant 0 \qquad \text{na parabolické hranici } \Gamma \text{ oblasti } (0,T) \times B_R(0)$$

– viz (27), (29),

ale přitom existuje $(t_0,x_0) \in (0,T\rangle \times B_R(0)$ (tedy mimo parabolickou hranici) takový, že

$$v(t_0,x_0) < 0 \qquad (\text{viz } (26))\,.$$

To je spor se slabým principem maxima pro RVT na omezené množině.

Tím je věta dokázána.

$\boxtimes$

Závěrečné poznámky:

(i) Řešení Cauchyovy úlohy (1), dané vztahy (2)–(4), je podle [5] omezené na $\overline{Q_T}$ (pro f, g omezené). Jde tedy o právě ono (ve třídě omezených funkcí) jednoznačně určené řešení, o kterém hovoří poznámka za předchozí větou. Ve smyslu této poznámky dokonce víme, že toto řešení (tedy řešení dané vztahy (2)–(4)) je jediné i ve třídě funkcí „s růstem nejvýše e^{x^2}“.

(ii) Řešení, dané vztahy (2)–(4) má však jednu nepříjemnou „nefyzikální“ vlastnost, kterou lze předvést už pro $d=1$ a pro $f \equiv 0$. Uvažujme počáteční podmínku $g \in C(\mathbb{R})$ s kompaktním nosičem, tj. existuje $R>0$ takové, že $g(x) = u(0,x) = 0$ pro $|x|>R$. Nechť dále $g \geq 0$ v $\mathbb{R}$ a nechť existuje $\langle a,b\rangle \subset (-R,R)$, že $g(x) > 0$ pro $x \in \langle a,b\rangle$.

Pro $t>0$ je řešení úlohy (1) s těmito daty dáno vztahem

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2 t}}\, d\xi \qquad (30)$$

(srov. (2)). Z (30) a vlastností g plyne, že $u(t,x) > 0$ $\forall t>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. To ovšem znamená, že pro libovolně malé $t>0$ a libovolně velké $x \in \mathbb{R}$ je „teplota“ $u(t,x)$ kladná, tedy že informace o nenulové teplotě v $(-R,R)$ se rozšířila do celého prostoru, pro libovolně malý čas t. Tato nekonečná rychlost šíření informace, která je součástí naší RVT, odporuje fyzikální představě o šíření tepla prostorem.

To ukazuje, že náš matematický model šíření tepla, pomocí kterého jsme odvodili v kapitole 1 rovnici vedení tepla, není zcela v pořádku, neboť některé jeho výsledky odporují pozorování.

Abychom si rozuměli: nezpochybňujeme tím matematickou kvalitu RVT, je to jedna z PDR, pro kterou máme korektní a dostatečně bohatou matematickou teorii. Spíše se snažíme upozornit na to, že ve fázi „odvození (jakékoli) rovnice", tj. ve fázi tzv. matematického modelování (fyzikální, biologické...) reality může dojít ke zjednodušením nebo dokonce k nesprávně formulovaným principům, jejichž matematickým důsledkem je „ne zcela přesná rovnice". Rigorózní matematické studium takové rovnice je v pořádku, to je přesná práce matematika. Při aplikaci matematických výsledků „zpět do praxe" bychom však neměli dogmaticky trvat na tom, že „v přírodě" se děje vše přesně podle toho, co jsme spočetli.

RVT, tak jak jsme ji odvodili a studovali, není tedy zcela přesným popisem toho, jak se teplo šíří. Existují i jiné, mnohem složitější a přesnější modely (viz [...]), které jsou však nelineární a jejich řešení se hledá resp. studuje podstatně obtížněji. V tom je nesporná výhoda „naší RVT": jde o lineární rovnici, tedy rovnici snadno řešitelnou. Zároveň se ukazuje, že RVT sice nedává přesné rozložení teploty, že však je velmi dobrou aproximací skutečnosti. Uvědomíme-li si, že veškeré matematické modelování není nic jiného než snaha právě o nalezení velmi dobré aproximace skutečnosti, vezmeme možná opět „naši" RVT na milost.

4.2. Vlnová rovnice

Poslední paragraf tohoto učebního textu věnujeme vlnové rovnici (dále jen VR)

Def. (Cauchyova úloha pro vlnovou rovnici)
Buď $T>0$, $c>0$, $d\geq 1$ a nechť $Q_T := (0,T)\times\mathbb{R}^d$. Buďte dále $f\in C(Q_T)$, $g_0\in C^2(\mathbb{R}^d)$, $g_1\in C^1(\mathbb{R}^d)$ dané funkce. Řekneme, že $u:\overline{Q_T}\to\mathbb{R}$ řeší Cauchyovu úlohu pro RVT s pravou stranou f a počátečními podmínkami g_0, g_1 v klasickém smyslu, pokud

(a) $u\in C^2(\overline{Q_T})$ (31)

(b)
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x)-\Delta u(t,x) = f(t,x), \qquad \forall (t,x)\in Q_T, \tag{32}$$
$$u(0,x) = g_0(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d, \tag{33}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g_1(x), \qquad x\in\mathbb{R}^d. \tag{34}$$

Pozn.:
Rovnice (32) modeluje šíření vlny rychlostí $c>0$ prostorem, podmínka (33) stanoví počáteční polohu a (34) počáteční rychlost vlny. Z této fyzikální interpretace se zdá, že úloha by mohla být korektně zadána. To, že počáteční podmínky (33)–(34) jsou postaveny logicky, lze také nahlédnout studiem úloh (32)–(34) z pohledu věty Cauchy-Kovalevské, dávající pro analytické f, g_0, g_1 lokální existenci a jednoznačnost analytického řešení úloh (32)–(34).
Všimněte si následujícího:

- Pro použití věty C-K. potřebujeme vědět, že p.p. nejsou zadány na charakteristické ploše. Připomeňte si (viz kapitola 2), že charakteristickými plochami VR jsou kuželové plochy, jejichž normálové vektory $\vec{\nu}=(\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_d)$ splňují

$$v_0^2 = c^2 \sum_{j=1}^{d} v_j^2 . \qquad (35)$$

Podmínky (33)–(34) tedy nejsou zadány na charakteristických plochách a větu C.-K. je skutečně možno použít.

- V důsledku toho si uvědomte, že věta C.-K. dávala existenci řešení na symetrickém intervalu v časoprostoru, tedy i pro „čas menší než $t=0$". Je tedy možno VR uvažovat i pro „záporně plynoucí čas", tj. studovat historii vlny.
- Uvědomte si, že podobné úvahy nebylo možno provést pro RVT, neboť tam se poč. podm. zadávala na charakteristické ploše.

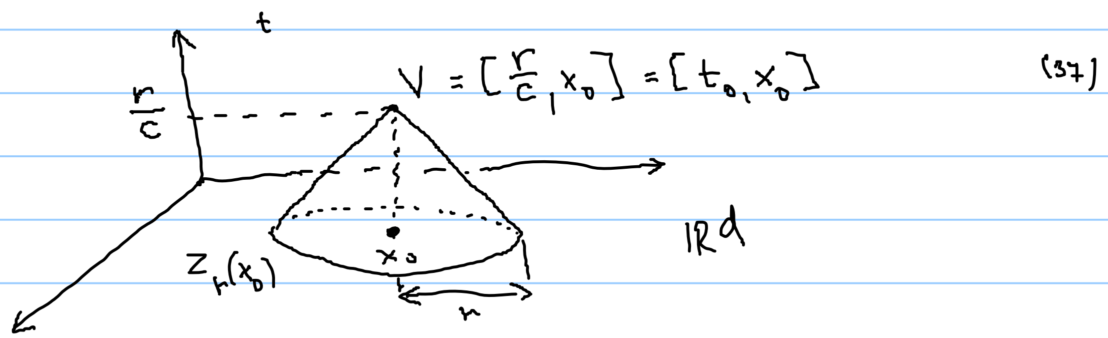
Následující věta vyjadřuje skutečnost, že kuželové plochy jsou charakteristické plochy pro VR, tedy mají také roli ploch „po kterých se šíří informace o řešení". Tuto naši heuristickou interpretaci charakteristických ploch však de facto odůvodníme až v důkaze následující věty. Věta je také zároveň tvrzením, jehož bezprostředním důsledkem bude jednoznačnost řešení úloh (31)–(34).

Nejprve však zavedeme označení pro tzv. charakteristický kužel VR (někdy též „vlnový kužel").

Buď $x_0 \in \mathbb{R}^d$, $0 < r < cT$. Označme (pro pevné $c > 0$ dané rovnicí (32))

$$Z_r(x_0) := \{(t,x) \in Q_T,\ 0 < ct < r,\ |x - x_0| < r - ct\} \qquad (36)$$

(otevřený) kužel o středu x_0, poloměru základny r, a výšce $\frac{r}{c}$:



Všimněte si: kužel $Z_r(x_0)$ je (při pevném c) určen jednoznačně svou základnou, tedy bodem x_0 a poloměrem r, ale také například jeho vrcholem $V = [\frac{r}{c}, x_0]$, ze kterého lze „spustit" $Z_r(x_0)$ jediným způsobem.

$\boxed{\text{Věta}}$ (O jednoznačnosti pro vlnový kužel)

Buď $r>0$, $x_0\in\mathbb{R}^d$, $c>0$, $u:\overline{Z_r(x_0)}\to\mathbb{R}$ taková, že

(i) $u\in C^2(\overline{Z_r(x_0)})$ (38)

(ii) $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=0$ v $Z_r(x_0)$ (39)

$u(0,x)=\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=0$ pro $|x-x_0|<r$ (40)

Potom $u\equiv 0$ v $\overline{Z_r(x_0)}$.

Poznámka.

Uvědomte si, že klasické řešení Cauchyovy úlohy (31)–(34) pro $f\equiv 0$, $g_0=g_1\equiv 0$, splňuje (38)–(40). Speciálně tedy: funkce u, splňující podmínku (31), splňuje i podmínku (37), a to pro každý kužel $Z_r(x_0)\subset Q_T$. Důvod, proč je předchozí věta formulována takto, je především ten, že jsme chtěli zdůraznit její lokálnost (a tedy její eventuální použití pro úlohy na omezených oblastech: je-li $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ omezená, hraje pak roli Q_T sjednocení všech kuželů $Z_r(x_0)$, jejichž základna leží v Ω).

Věta má tento bezprostřední důsledek.

$\boxed{\text{Věta}}$ (jednoznačnost Cauchyovy úlohy pro VR)

Klasické řešení úlohy (38)–(40), pokud existuje, je určeno jednoznačně.

Důkaz: Buďte v a w dvě taková řešení, položme $u := v-w$.

Buď $(t_0,x_0)\in Q_T$ libovolný. Ukážeme-li $u(t_0,x_0)=0$, budeme hotovi.

Buď nyní $Z_r(x_0)$ jednoznačně určený kužel s vrcholem (t_0,x_0).
Potom $Z_r(x_0)\subset Q_T$ a u splňuje všechny předpoklady předchozí věty (ověřte).

Tedy $u\equiv 0$ v $\overline{Z_r(x_0)}$, speciálně $u(t_0,x_0)=0$ cbd. $\boxtimes$

Pozn.: Všimněte si, že (na rozdíl od rovnice vedení tepla) není potřeba a priori předpokládat nějakou omezenost řešení u atd. Dostáváme výrok o jednoznačnosti řešení úloh (32)–(34) ve třídě všech funkcí, splňují-cích (31).

Zbývá tedy dokázat větu o jednoznačnosti pro vlnový kužel.

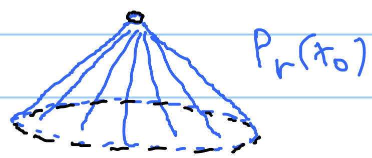
Důkaz. Nejprve si rozmyslíme, co stačí dokázat ke tomu, abychom ukázali, že $u \equiv 0$ v $\overline{Z_r(x_0)}$.

(α) Stačí ukázat, že $u(\frac{r}{c}, x_0) = 0$, u je nulové ve vrcholu vlnového kužele. Totiž: každý bod $(t_1, x_1) \in Z_r(x_0)$ je vrcholem nějakého vlnového kužele, na kterém u také splňuje předpoklady věty.

Umíme-li ukázat $u(t_1, x_1) = 0$ ve vrcholu (každého takové-ho) kužele, ukázali jsme $u \equiv 0$ v $\overline{Z_r(x_0)}$.

(β) K tomu stačí ukázat, že $u(t,x) = \underset{\text{konst.}}{k}$ na plášti kužele $\overline{Z_r(x_0)}$, tj. na množině

$$P_r(x_0) = \{(t,x) \in Q_T,\ 0 < ct < r,\ |x - x_0| = r - ct\}. \qquad (41)$$



Totiž: protože $u \in C(\overline{Z_r(x_0)})$, je hodnota konstanty k rovna hodnotě u na podstavě kužele $\{[0,x],\ |x - x_0| \le r\}$, tedy nule, a tak-ke ze stejného důvodu spojitosti na $\overline{Z_r(x_0)}$ je tedy i hodnota ve vrcholu kužele nulová, cbd.

(γ) Konečně, k tomu stačí ukázat, že *)

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{m}}(t,x) = 0 \qquad \forall (t,x) \in P_r(x_0) \tag{42}$$

kde $\vec{m}$ je vektor tečný k $P_r(x_0)$ v bodě $(t,x) \in P_r(x_0)$ – tzv. vektor povrchy. Skutečně (42) implikuje, že $u = \text{konst}$ na $P_r(x_0)$.

Ukažme tedy, že platí (42).

Označme $\displaystyle J(u) := \int_{Z_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}\underbrace{\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u\right)}_{=0 \text{ v } Z_r(x_0)} dx\,dt = 0.$

$J(u)$ upravíme pomocí identit (ověřte je):

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right)$$

a dostaneme (po vynásobení dvojkou)

$$0 = \underbrace{\int_{Z_r(x_0)} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right] dx\,dt}_{=:I_1} - \underbrace{2\sum_{j=1}^{d}\int_{Z_r(x_0)} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) dx\,dt}_{=:I_2}. \tag{43}$$

V (43) použijeme větu Gauss–Green–Ostrogradského (připomenu:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial x_k}\,dx = \int_{\partial\Omega} F \nu_k\,dS \quad, \text{ pro } F \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{44}$$

kde ν_k je odpovídající souřadnice jednotkového vektoru vnější normály $\vec{\nu}$ k Ω v bodech $\partial\Omega$).

Při aplikaci (44) uvážíme jednak, že

$$\partial Z_r(x_0) = P_r(x_0) \cup S_r(x_0) \cup N, \tag{45}$$

---

*) Značení vektoru povrchy $\vec{m}$ není zcela obvyklé, je však např. použito ve skriptech [John – Nečas]

kde $P_r(x_0)$ je plášť $Z_r(x_0)$ (bez podstavy),

$$S_r(x_0) = \{[0,x],\ |x-x_0|<r\} \quad \text{je podstava } Z_r(x_0), \tag{46}$$

a N = množina dvourozměrné míry nula (a sice vrchol kužele a obvod podstavy).

Dále uvážíme, že

$$\vec{\nu} = (-1,0,0,\dots,0) \qquad \text{na } S_r(x_0), \tag{47}$$

$$\vec{\nu} = (\nu_0,\nu_1,\dots,\nu_d) \perp \vec{m} \qquad \text{na } P_r(x_0). \tag{48}$$

První integrál v (43) je tedy roven

$$I_1 = -\int_{S_r(x_0)} \underbrace{\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]}_{=\,0}\Bigg|_{t=0} dx + \int_{P_r(x_0)} \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]\nu_0 \, dS.$$

0 pro $t=0$, neboť $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ pro $t=0$ dle předpokladů
a $\frac{\partial u}{\partial x_j}=0$ pro $t=0$ plyne z toho,
že $u\equiv 0$ pro $t=0$

Rovnost (43) tedy přejde v

$$\int_{P_r(x_0)} \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]\nu_0 \, dS - 2\sum_{j=1}^{d}\int_{P_r(x_0)} \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\cdot \nu_j \, dS = 0. \tag{49}$$

V této chvíli (konečně) využijeme toho, že plocha $P_r(x_0)$ je charakteristickou plochou vlnové rovnice (32) – připomeňte si definici char. plochy a srovnejte ji s def. charakteristického kužele (36). Tedy pro normálový vektor $\vec{\nu}$ k $P_r(x_0)$ platí (35):

$$\nu_0^2 = c^2 \sum_{j=1}^{d} \nu_j^2, \tag{50}$$

přičemž $\vec{\nu} \neq 0$, tedy i $\nu_0 \neq 0$.

Dosadíme (50) do části (49) a dostaneme:

$$\frac{1}{\nu_0}\int_{P_r(x_0)} \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 c^2 \sum_{j=1}^{d}\nu_j^2 + \sum_{j=1}^{d}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \nu_0^2 - 2\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_j\nu_0\right] dS = 0$$

neboli po úpravě

$$\sum_{j=1}^{d} \int_{P_r(x_0)} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \nu_j^2 - 2\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_0\nu_j + \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 \nu_0^2 \right] dS = 0$$

čili je

$$\sum_{j=1}^{d} \int_{P_r(x_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\nu_j - \frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_0\right)^2 dS = 0. \qquad (51)$$

Protože integrand v (51) je nezáporný a spojitý na $P_r(x_0)$, musí být nutně identicky nulový na celém $P_r(x_0)$.

Tedy je

$$\frac{\partial u}{\partial t}\nu_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}\nu_0 \qquad \forall (t,x)\in P_r(x_0),\ \forall j=1,\dots,d. \qquad (52)$$

Vynásobíme (52) m_j (j-tá složka vektoru površky na $P_r(x_0)$) a sečteme přes všechna $j=1,\dots,d$. Protože $\vec{\nu} \perp \vec{m}$, je $\sum_{j=1}^{d} \nu_j m_j = 0$ a my dostaneme

$$0 = \nu_0 \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_j} m_j = \nu_0 \frac{\partial u}{\partial \vec{m}} \qquad \forall (t,x)\in P_r(x_0).$$

Protože $\nu_0 \neq 0$, plyne odtud $\frac{\partial u}{\partial \vec{m}}(t,x) = 0$ $\forall (t,x)\in P_r(x_0)$, cbd.

$\boxtimes$

Zbývá pohovořit se o existenci řešení zmíněné Cauchyovy úlohy pro vlnovou rovnici. Stejně jako v případě rovnice vedení tepla i zde je možno řešení napsat v uzavřeném tvaru, tj. „vzorečkem". Na následující straně uvádíme v tabulce příslušný tvar těchto řešení pro $d = 1,2,3$, tedy v nejčastěji používaných dimenzích. Pro $d=1$ jde o tzv. d'Alembertův vzorec, jehož odvození není obtížné (a bylo děláno na cvičeních). Všimněte si, že řešení Cauchyovy úlohy pro VR má v různých dimenzích odlišný tvar. Rovněž požadavky na hladkost dat, které zaručí to, že u je <u>klasickým</u> řešením, se liší v závislosti na dimenzi.

To, že uvedené vzorce definují klasické řešení Cauchyovy úlohy pro VR, nebudeme dokazovat. Zájemce odkazujeme na sekci 2.4 v knize L. C. Evans: PDE, 1998.

Podle toho, co jsme dokázali na začátku tohoto paragrafu, jsou tato řešení jediná ve třídě klasických řešení.

Dimenze	Hladkost dat	Řešení
d=1:	$g_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$	$u(t,x) = \frac{1}{2}\Big(g_0(x-ct) + g_0(x+ct)\Big)$
	$g_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$	$+ \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g_1(y)\,\mathrm{d}y$
	$f \in \mathcal{C}^1(\langle 0,+\infty) \times \mathbb{R})$	$+ \frac{c}{2} \int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\tau,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau$
d=2:	$g_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$	$u(t,x) = \frac{1}{2\pi c}\frac{\partial}{\partial t} \int_{\lvert y\rvert \le ct} \frac{g_0(x-y)}{\sqrt{c^2t^2 - y^2}}\,\mathrm{d}y$
	$g_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$	$+ \frac{1}{2\pi c} \int_{\lvert y\rvert \le ct} \frac{g_1(x-y)}{\sqrt{c^2t^2 - y^2}}\,\mathrm{d}y$
	$f \in \mathcal{C}^1(\langle 0,+\infty) \times \mathbb{R}^2)$	$+ \frac{c}{2\pi} \int_0^t \int_{\lvert y\rvert \le c\tau} \frac{f(t-\tau, x-y)}{\sqrt{c^2\tau^2 - y^2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau$
d=3:	$g_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$	$u(t,x) = \frac{1}{4\pi ct} \int_{S_{ct}(0)} \Big(\frac{g_0}{ct} + \frac{\partial g_0}{\partial n}\Big)(x-y)\,\mathrm{d}S(y)$
	$g_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$	$+ \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S_{ct}(0)} g_1(x-y)\,\mathrm{d}S(y)$
	$f \in \mathcal{C}^2(\langle 0,+\infty) \times \mathbb{R}^3)$	$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{ct} \int_{S_r(0)} \frac{f\Big(t-\frac{r}{c}, x-y\Big)}{r}\,\mathrm{d}S(y)\,\mathrm{d}r$

(Howgh.)

Pozn: Uvedené poznámky k přednášce PDR I (NDIR044) vznikaly v reálném čase jako rozšířené přípravy na uvedenou přednášku, a to ve dnech 25.9.2009 – 11.1.2010.
Rukopis pravděpodobně vykazuje všechny negativní znaky „psaní v reálném čase, s drobnými zpětnými opravami".
Autor se za to omlouvá, stejně jako se omlouvá za nepříliš čitelný rukopis – jiným nevládne.

M.R., 11.1.10

(Velmi) drobné úpravy prodělal text v prosinci 2010 a lednu 2011. V podstatě šlo pouze o kosmetické změny.

M.R., o rok později

Některé další úpravy (např. přidání str. 18b a oprava několika překlepů) byly učiněny 25.12.2012

M.R.