Jak postavit matematické poznání na neotřesitelné základy

Martin Rmoutil

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Gymnázium Christiana Dopplera, 20. prosince 2022

Osnova

Početní operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A, B) krav" – dostanu $A + B$
- Věstonická vrubovka (K. Absolon, 1936
- Počítadlo: žetony zastupují krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly zastupující jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Početní operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A, B) krav" – dostanu $A + B$
- Věstonická vrubovka (K. Absolon, 1936
- Počítadlo: žetony zastupují krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly zastupující jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Početní operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A, B) krav“ – dostanu $A + B$
- Věstonická vrubovka (K. Absolon, 1936
- Počítadlo: žetony zastupují krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly zastupující jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Početní operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A, B) krav" – dostanu $A + B$
- Věstonická vrubovka (K. Absolon, 1936
- Počítadlo: žetony zastupují krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly zastupující jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Početní operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A, B) krav" – dostanu $A + B$
- Věstonická vrubovka (K. Absolon, 1936
- Počítadlo: žetony zastupují krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly zastupující jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Početní operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A, B) krav“ – dostanu $A + B$
- Věstonická vrubovka (K. Absolon, 1936
- Počítadlo: žetony zastupují krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly zastupující jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Číslo

Konkrétní objekty (krávy)

↓

Zástupné objekty (žetony)

↓

Symboly reprezentující počty (znaky jako „1“, „2“ apod.)

↓

„Čísla“ (Co *jsou* čísla?)

Číslo

Konkrétní objekty (krávy)

↓

Zástupné objekty (žetony)

↓

Symboly reprezentující počty (znaky jako „1“, „2“ apod.)

↓

„Čísla“ (Co *jsou* čísla?)

Číslo

Konkrétní objekty (krávy)

↓

Zástupné objekty (žetony)

↓

Symboly reprezentující počty (znaky jako „1“, „2“ apod.)

↓

„Čísla“ (Co *jsou* čísla?)

Číslo

Konkrétní objekty (krávy)

↓

Zástupné objekty (žetony)

↓

Symboly reprezentující počty (znaky jako „1“, „2“ apod.)

↓

„Čísla“ (Co *jsou* čísla?)

Číslo

Konkrétní objekty (krávy)

↓

Zástupné objekty (žetony)

↓

Symboly reprezentující počty (znaky jako „1“, „2“ apod.)

↓

„Čísla“ (Co *jsou* čísla?)

Číslo

Konkrétní objekty (krávy)

↓

Zástupné objekty (žetony)

↓

Symboly reprezentující počty (znaky jako „1“, „2“ apod.)

↓

„Čísla“ (Co *jsou* čísla?)

Číslo

Konkrétní objekty (krávy)

$\downarrow$

Zástupné objekty (žetony)

$\downarrow$

Symboly reprezentující počty (znaky jako „1“, „2“ apod.)

$\downarrow$

„Čísla“ (Co *jsou* čísla?)

Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. $||||||$ zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: IX $=$ 9
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. |||||| zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: IX = 9
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. |||||| zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: IX $=$ 9
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. |||||| zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: IX = 9
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. |||||| zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: IX = 9
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: algoritmu.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dával správný výsledek.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné odpovídajícím způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „seděly“.
- A tedy aby „seděly“ i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:
předstírání výpočtu (např. odčítání) $\rightarrow$ podvod.
Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: algoritmu.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dával správný výsledek.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné odpovídajícím způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „seděly“.
- A tedy aby „seděly“ i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:
předstírání výpočtu (např. odčítání) $\rightarrow$ podvod.
Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: algoritmu.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dával správný výsledek.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné odpovídajícím způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „seděly“.
- A tedy aby „seděly“ i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:
předstírání výpočtu (např. odčítání) $\rightarrow$ podvod.
Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně" – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: algoritmu.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dával správný výsledek.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné odpovídajícím způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „seděly".
- A tedy aby „seděly" i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:
předstírání výpočtu (např. odčítání) $\rightarrow$ podvod.
Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: algoritmu.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dával správný výsledek.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné odpovídajícím způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „seděly“.
- A tedy aby „seděly“ i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:
předstírání výpočtu (např. odčítání) $\rightarrow$ podvod.
Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: algoritmu.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dával správný výsledek.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné odpovídajícím způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „seděly“.
- A tedy aby „seděly“ i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:
předstírání výpočtu (např. odčítání) $\rightarrow$ podvod.
Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: algoritmu.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dával správný výsledek.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné odpovídajícím způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „seděly“.
- A tedy aby „seděly“ i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:
předstírání výpočtu (např. odčítání) $\rightarrow$ podvod.
Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – jak vypadají ony šikovné algoritmy

Záleží na **způsobu reprezentace** čísel pomocí symbolů.

- Pokud používáme jeden symbol, je to „snadné“:

$$||| + | = |||| \quad \text{nebo} \quad ||||| + ||||||| = ||||||||||||.$$

- Římské číslice jsou o něco lepší. Ale co složitější operace?

$$MMCMXCIX + DCCLXIX = MMMDCCLXVIII$$

- Operace v pozičním systému: Písemné sčítání, násobení atd. – věříme funkčnosti. Teorii vymyslel někdo před námi.

„počítat správně“ – jak vypadají ony šikovné algoritmy

Záleží na **způsobu reprezentace** čísel pomocí symbolů.

- Pokud používáme jeden symbol, je to „snadné“:

$$|||+|=||||\quad \text{nebo}\quad |||||+||||||||=|||||||||||||.$$

- Římské číslice jsou o něco lepší. Ale co složitější operace?

$$MMCMXCIX + DCCLXIX = MMMDCCLXVIII$$

- Operace v pozičním systému: Písemné sčítání, násobení atd. – věříme funkčnosti. Teorii vymyslel někdo před námi.

„počítat správně“ – jak vypadají ony šikovné algoritmy

Záleží na **způsobu reprezentace** čísel pomocí symbolů.

- Pokud používáme jeden symbol, je to „snadné“:

$$|||+|=||||\quad \text{nebo} \quad |||||+||||||||=|||||||||||||.$$

- Římské číslice jsou o něco lepší. Ale co složitější operace?

$$MMCMXCIX + DCCLXIX = MMMDCCLXVIII$$

- Operace v pozičním systému: Písemné sčítání, násobení atd. – věříme funkčnosti. Teorii vymyslel někdo před námi.

„počítat správně“ – jak vypadají ony šikovné algoritmy

Záleží na **způsobu reprezentace** čísel pomocí symbolů.

- Pokud používáme jeden symbol, je to „snadné“:

$$|||+|=||||\quad \text{nebo}\quad |||||+||||||||=|||||||||||||.$$

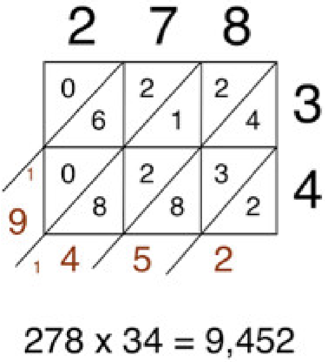
- Římské číslice jsou o něco lepší. Ale co složitější operace?

$$MMCMXCIX + DCCLXIX = MMMDCCLXVIII$$

- Operace v pozičním systému: Písemné sčítání, násobení atd. – věříme funkčnosti. Teorii vymyslel někdo před námi.

Násobení jinak

Jsou i jiné algoritmy, u kterých automaticky přemýšlíme, proč by měly fungovat.



Osnova

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- Přirozená čísla „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě racionální čísla: poměry celých čísel.
- Objev iracionálního čísla způsobil 1. Krizi matematiky. Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- Přirozená čísla „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě racionální čísla: poměry celých čísel.
- Objev iracionálního čísla způsobil 1. Krizi matematiky. Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel". Co jsou čísla?

- Přirozená čísla „chápeme" dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě racionální čísla: poměry celých čísel.
- Objev iracionálního čísla způsobil 1. Krizi matematiky. Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- Přirozená čísla „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě racionální čísla: poměry celých čísel.
- Objev iracionálního čísla způsobil 1. Krizi matematiky.
  Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel". Co jsou čísla?

- Přirozená čísla „chápeme" dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě racionální čísla: poměry celých čísel.
- Objev iracionálního čísla způsobil 1. Krizi matematiky. Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- Přirozená čísla „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě racionální čísla: poměry celých čísel.
- Objev iracionálního čísla způsobil 1. Krizi matematiky. Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil infinitesimální počet – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s nekonečnem. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil infinitesimální počet – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s nekonečnem. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil infinitesimální počet – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s nekonečnem. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil infinitesimální počet – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s nekonečnem. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil infinitesimální počet – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s nekonečnem. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil infinitesimální počet – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s nekonečnem. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Osnova

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel teorie množin.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o mohutnost množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* ⇒ Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel teorie množin.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o mohutnost množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* $\Rightarrow$ Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel teorie množin.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o mohutnost množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* ⇒ Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel teorie množin.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o mohutnost množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* ⇒ Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel teorie množin.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o mohutnost množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* ⇒ Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel teorie množin.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o mohutnost množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* $\Rightarrow$ Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel teorie množin.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o mohutnost množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* ⇒ Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel teorie množin.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o mohutnost množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* ⇒ Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M.

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M.

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M.

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M.

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0,1\},\ 3 = \{0,1,2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M.

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \varnothing,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0, 1\},\ 3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M.

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset,\ 1 = \{0\},\ 2 = \{0, 1\},\ 3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost:* pouze množiny a relace $\in$.
- *Důkazová síla:* ukázala zkušenost.
- *Přehlednost:* máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné".
- *Intuitivnost:* množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra:* „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní."

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost:* pouze množiny a relace $\in$.
- *Důkazová síla:* ukázala zkušenost.
- *Přehlednost:* máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost:* množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra:* „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost:* pouze množiny a relace $\in$.
- *Důkazová síla:* ukázala zkušenost.
- *Přehlednost:* máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost:* množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra:* „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost:* pouze množiny a relace $\in$.
- *Důkazová síla:* ukázala zkušenost.
- *Přehlednost:* máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost:* množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra:* „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost:* pouze množiny a relace $\in$.
- *Důkazová síla:* ukázala zkušenost.
- *Přehlednost:* máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost:* množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra:* „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost:* pouze množiny a relace $\in$.
- *Důkazová síla:* ukázala zkušenost.
- *Přehlednost:* máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost:* množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra:* „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Osnova

Russell: 3. Krize matematiky ⇒ *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
- *Russellův paradox:* $A = \{B : B \notin B\}$
- Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat Naivní teorie množin.
Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky ⇒ *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
- *Russellův paradox:* $A = \{B : B \notin B\}$
- Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat Naivní teorie množin.
Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky ⇒ *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
- *Russellův paradox:* $A = \{B : B \notin B\}$
- Analogie ze života: *Paradox holiče.*

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat Naivní teorie množin.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky ⇒ *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie".
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
- *Russellův paradox:* $A = \{B : B \notin B\}$
- Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat Naivní teorie množin.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky ⇒ *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
- *Russellův paradox:* $A = \{B : B \notin B\}$
- Analogie ze života: *Paradox holiče.*

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat Naivní teorie množin.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky ⇒ *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
- *Russellův paradox:* $A = \{B \colon B \notin B\}$
- Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat Naivní teorie množin.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky ⇒ *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
- *Russellův paradox:* $A = \{B\colon B \notin B\}$
- Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat Naivní teorie množin.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky ⇒ *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
- *Russellův paradox:* $A = \{B : B \notin B\}$
- Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat Naivní teorie množin.
Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M."
- Formalismus: matematika je formální systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát interpretaci, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): *„Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor."* *„Wir müssen wissen — wir werden wissen!"*

Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M."
- Formalismus: matematika je formální systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát interpretaci, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): *„Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor."* *„Wir müssen wissen — wir werden wissen!"*

Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M."
- Formalismus: matematika je formální systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát interpretaci, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): *„Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor." „Wir müssen wissen — wir werden wissen!"*

Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M.“
- Formalismus: matematika je formální systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát interpretaci, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): *„Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.“ „Wir müssen wissen — wir werden wissen!“*

Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M."
- Formalismus: matematika je formální systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát interpretaci, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): *„Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor." „Wir müssen wissen — wir werden wissen!"*

Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M."
- Formalismus: matematika je formální systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát interpretaci, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): *„Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor." „Wir müssen wissen — wir werden wissen!"*

Osnova

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná"). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Děkuji za pozornost!