Jsou všechny spojité funkce hladké?

Martin Rmoutil

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Praha, středa 2. listopadu 2022

Osnova

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Některé milníky v historii matematiky

- Abstraktní číslo
- Poziční systém, číslovka (číslo) 0
- Obecná tvrzení v matematice, pojem **důkazu**
- **Axiómy** (Eukleidés), přesné **definice**
- Úvahy o správné argumentaci, **logika** (Aristoteles)
- Úvahy o nekonečnu
- Algebra, koncept **proměnné** x
- Analytická geometrie (Descartes)
- Koncept funkce
- Zpřesňování pojetí intuitivních pojmů (spojitost, derivace, ...)
- Matematická logika
- Axiomatická výstavba jednotné matematické teorie
- Limity (lidského?) poznání

Jak posunout poznání: vzdát se intuice (občas)

Pozorování

Chceme-li získat hluboké poznatky,

potřebujeme vysokou míru přesnosti.

- Přesné definice: bez nich kolísá význam pojmů.
- Musíme na *něčem* stavět. Logika + axiomy
- Logika je formalizací správného odvozování.
- Tyto ingredience nám dají *důvěru*.
- Díky ní jsme schopni *uvěřit* překvapivým závěrům.

Bez vysoké míry přesnosti bychom věřili spíše své *intuici*.
Ta nás však často klame, brání nám uvěřit nečekaným pravdám.
Právě nečekané pravdy nejčastěji posouvají naše poznání dál.

Jak posunout poznání: vzdát se intuice (občas)

Pozorování

Chceme-li získat hluboké poznatky,

potřebujeme vysokou míru přesnosti.

- Přesné definice: bez nich kolísá význam pojmů.
- Musíme na *něčem* stavět. Logika + axiomy
- Logika je formalizací správného odvozování.
- Tyto ingredience nám dají *důvěru*.
- Díky ní jsme schopni *uvěřit* překvapivým závěrům.

Bez vysoké míry přesnosti bychom věřili spíše své *intuici*.
Ta nás však často klame, brání nám uvěřit nečekaným pravdám.
Právě nečekané pravdy nejčastěji posouvají naše poznání dál.

Jak posunout poznání: vzdát se intuice (občas)

Pozorování

Chceme-li získat hluboké poznatky,

potřebujeme vysokou míru přesnosti.

- Přesné definice: bez nich kolísá význam pojmů.
- Musíme na *něčem* stavět. Logika + axiomy
- Logika je formalizací správného odvozování.
- Tyto ingredience nám dají *důvěru*.
- Díky ní jsme schopni *uvěřit* překvapivým závěrům.

Bez vysoké míry přesnosti bychom věřili spíše své *intuici*.
Ta nás však často klame, brání nám uvěřit nečekaným pravdám.
Právě nečekané pravdy nejčastěji posouvají naše poznání dál.

Jak posunout poznání: vzdát se intuice (občas)

Pozorování

Chceme-li získat hluboké poznatky,

potřebujeme vysokou míru přesnosti.

- Přesné definice: bez nich kolísá význam pojmů.
- Musíme na *něčem* stavět. Logika + axiomy
- Logika je formalizací správného odvozování.
- Tyto ingredience nám dají *důvěru*.
- Díky ní jsme schopni *uvěřit* překvapivým závěrům.

Bez vysoké míry přesnosti bychom věřili spíše své *intuici*.
Ta nás však často klame, brání nám uvěřit nečekaným pravdám.
Právě nečekané pravdy nejčastěji posouvají naše poznání dál.

Jak posunout poznání: vzdát se intuice (občas)

Pozorování

Chceme-li získat hluboké poznatky,

potřebujeme vysokou míru přesnosti.

- Přesné definice: bez nich kolísá význam pojmů.
- Musíme na *něčem* stavět. Logika + axiomy
- Logika je formalizací správného odvozování.
- Tyto ingredience nám dají *důvěru*.
- Díky ní jsme schopni *uvěřit* překvapivým závěrům.

Bez vysoké míry přesnosti bychom věřili spíše své *intuici*.
Ta nás však často klame, brání nám uvěřit nečekaným pravdám.
Právě nečekané pravdy nejčastěji posouvají naše poznání dál.

Jak posunout poznání: vzdát se intuice (občas)

Pozorování

Chceme-li získat hluboké poznatky,

potřebujeme vysokou míru přesnosti.

- Přesné definice: bez nich kolísá význam pojmů.
- Musíme na *něčem* stavět. Logika + axiomy
- Logika je formalizací správného odvozování.
- Tyto ingredience nám dají *důvěru*.
- Díky ní jsme schopni *uvěřit* překvapivým závěrům.

Bez vysoké míry přesnosti bychom věřili spíše své *intuici*.
Ta nás však často klame, brání nám uvěřit nečekaným pravdám.
Právě nečekané pravdy nejčastěji posouvají naše poznání dál.

Jak posunout poznání: vzdát se intuice (občas)

Pozorování

Chceme-li získat hluboké poznatky,

potřebujeme vysokou míru přesnosti.

- Přesné definice: bez nich kolísá význam pojmů.
- Musíme na *něčem* stavět. Logika + axiomy
- Logika je formalizací správného odvozování.
- Tyto ingredience nám dají *důvěru*.
- Díky ní jsme schopni *uvěřit* překvapivým závěrům.

Bez vysoké míry přesnosti bychom věřili spíše své *intuici*.
Ta nás však často klame, brání nám uvěřit nečekaným pravdám.
Právě nečekané pravdy nejčastěji posouvají naše poznání dál.

Jak posunout poznání: vzdát se intuice (občas)

Pozorování

Chceme-li získat hluboké poznatky,

potřebujeme vysokou míru přesnosti.

- Přesné definice: bez nich kolísá význam pojmů.
- Musíme na *něčem* stavět. Logika + axiomy
- Logika je formalizací správného odvozování.
- Tyto ingredience nám dají *důvěru*.
- Díky ní jsme schopni *uvěřit* překvapivým závěrům.

Bez vysoké míry přesnosti bychom věřili spíše své *intuici*.
Ta nás však často klame, brání nám uvěřit nečekaným pravdám.
Právě nečekané pravdy nejčastěji posouvají naše poznání dál.

Krize matematiky - přelomové objevy popírající intuici

1. **Krize M.** – objev iracionálních čísel
2. **Krize M.** – podstata vlastností funkcí, monstra
3. **Krize M.** – paradoxy nekonečna, TM, limity poznání

Tyto krize se týkaly *přesnosti* chápání, vyjadřování, dokazování.

Co jsou reálná čísla?
Co je to spojitost a derivace?
Co je to důkaz?

Krize matematiky - přelomové objevy popírající intuici

1. **Krize M.** – objev iracionálních čísel
2. **Krize M.** – podstata vlastností funkcí, monstra
3. **Krize M.** – paradoxy nekonečna, TM, limity poznání

Tyto krize se týkaly *přesnosti* chápání, vyjadřování, dokazování.

Co jsou reálná čísla?
Co je to spojitost a derivace?
Co je to důkaz?

Krize matematiky - přelomové objevy popírající intuici

1. **Krize M.** – objev iracionálních čísel
2. **Krize M.** – podstata vlastností funkcí, monstra
3. **Krize M.** – paradoxy nekonečna, TM, limity poznání

Tyto krize se týkaly *přesnosti* chápání, vyjadřování, dokazování.

Co jsou reálná čísla?
Co je to spojitost a derivace?
Co je to důkaz?

Krize matematiky - přelomové objevy popírající intuici

1. **Krize M.** – objev iracionálních čísel
2. **Krize M.** – podstata vlastností funkcí, monstra
3. **Krize M.** – paradoxy nekonečna, TM, limity poznání

Tyto krize se týkaly *přesnosti* chápání, vyjadřování, dokazování.

Co jsou reálná čísla?
Co je to spojitost a derivace?
Co je to důkaz?

Krize matematiky - přelomové objevy popírající intuici

1. **Krize M.** – objev iracionálních čísel
2. **Krize M.** – podstata vlastností funkcí, monstra
3. **Krize M.** – paradoxy nekonečna, TM, limity poznání

Tyto krize se týkaly *přesnosti* chápání, vyjadřování, dokazování.

Co jsou reálná čísla?

Co je to spojitost a derivace?

Co je to důkaz?

Krize matematiky - přelomové objevy popírající intuici

1. **Krize M.** – objev iracionálních čísel
2. **Krize M.** – podstata vlastností funkcí, monstra
3. **Krize M.** – paradoxy nekonečna, TM, limity poznání

Tyto krize se týkaly *přesnosti* chápání, vyjadřování, dokazování.

Co jsou reálná čísla?
Co je to spojitost a derivace?
Co je to důkaz?

Krize matematiky - přelomové objevy popírající intuici

1. **Krize M.** – objev iracionálních čísel
2. **Krize M.** – podstata vlastností funkcí, monstra
3. **Krize M.** – paradoxy nekonečna, TM, limity poznání

Tyto krize se týkaly *přesnosti* chápání, vyjadřování, dokazování.

Co jsou reálná čísla?
Co je to spojitost a derivace?
Co je to důkaz?

Osnova

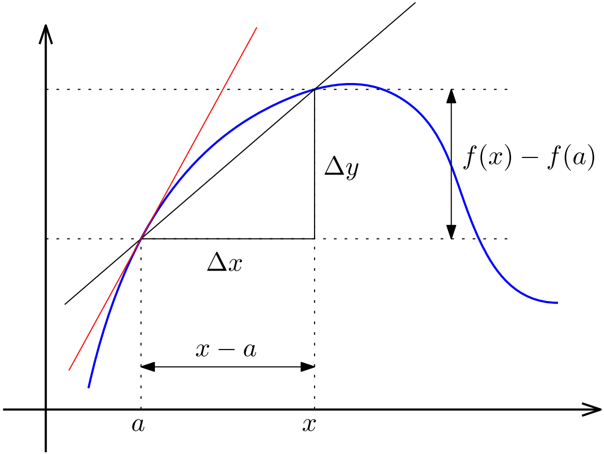
Co je derivace funkce: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

„Tečna je limitním případem sečny.“

Směrnice **sečny** je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Jejich limita je směrnicí **tečny**.

Tečna musí být jednoznačně určená!



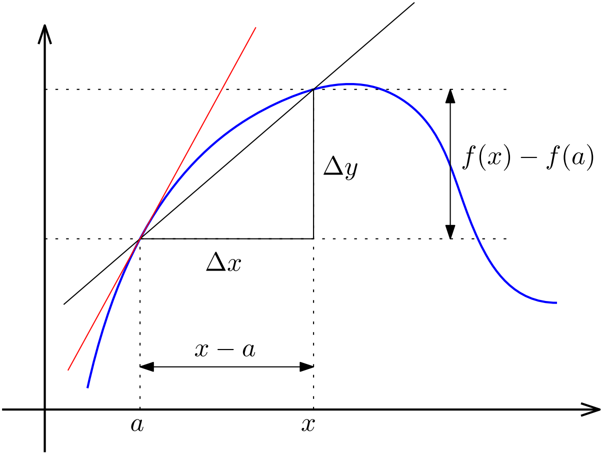
Co je derivace funkce: $f'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

„Tečna je limitním případem sečny.“

Směrnice **sečny** je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Jejich limita je směrnicí **tečny**.

Tečna musí být jednoznačně určená!



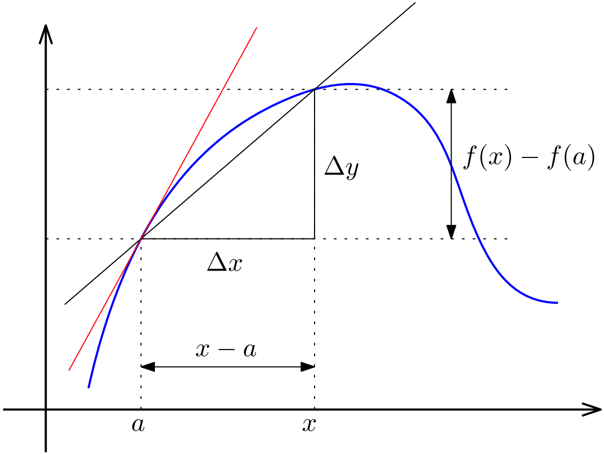
Co je derivace funkce: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

„Tečna je limitním případem sečny.“

Směrnice **sečny** je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Jejich limita je směrnicí **tečny**.

Tečna musí být jednoznačně určená!



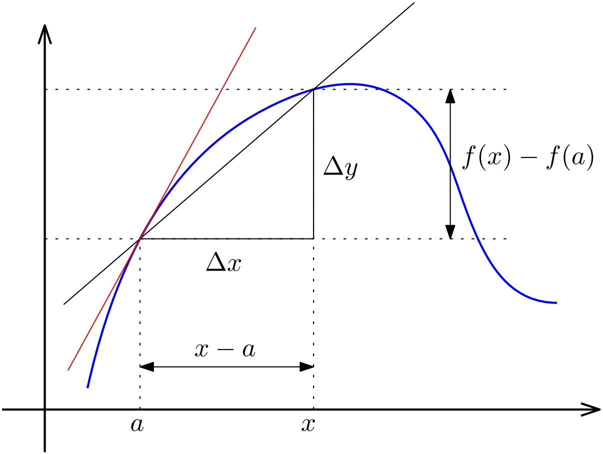
Co je derivace funkce: $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

„Tečna je limitním případem sečny.“

Směrnice **sečny** je $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Jejich limita je směrnicí **tečny**.

Tečna musí být jednoznačně určená!



Kdy derivace neexistuje:

- Když tečna není jednoznačně určená: např. $f(x) = |x|$.
- Když je funkce nespojitá:
  - Derivace může existovat – skok – fce $\operatorname{sgn} x$.
  - Derivace nemusí existovat – Dirichletova fce (je to fce?).

Otázka

Má každá „rozumně zadaná“ funkce derivaci ve „většině“ bodů?

Velcí matematici 18. i 19. století věřili v kladnou odpověď.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813),
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a další

Kdy derivace neexistuje:

- Když tečna není jednoznačně určená: např. $f(x) = |x|$.
- Když je funkce nespojitá:
  - Derivace může existovat – skok – fce $\operatorname{sgn} x$.
  - Derivace nemusí existovat – Dirichletova fce (je to fce?).

Otázka

Má každá „rozumně zadaná“ funkce derivaci ve „většině“ bodů?

Velcí matematici 18. i 19. století věřili v kladnou odpověď.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813),
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a další

Kdy derivace neexistuje:

- Když tečna není jednoznačně určená: např. $f(x) = |x|$.
- Když je funkce nespojitá:
  - Derivace může existovat – skok – fce $\operatorname{sgn} x$.
  - Derivace nemusí existovat – Dirichletova fce (je to fce?).

Otázka

Má každá „rozumně zadaná“ funkce derivaci ve „většině“ bodů?

Velcí matematici 18. i 19. století věřili v kladnou odpověď.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813),
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a další

Kdy derivace neexistuje:

- Když tečna není jednoznačně určená: např. $f(x) = |x|$.
- Když je funkce nespojitá:
  - Derivace může existovat – skok – fce $\operatorname{sgn} x$.
  - Derivace nemusí existovat – Dirichletova fce (je to fce?).

Otázka

Má každá „rozumně zadaná“ funkce derivaci ve „většině“ bodů?

Velcí matematici 18. i 19. století věřili v kladnou odpověď.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813),
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a další

Kdy derivace neexistuje:

- Když tečna není jednoznačně určená: např. $f(x) = |x|$.
- Když je funkce nespojitá:
  - Derivace může existovat – skok – fce $\operatorname{sgn} x$.
  - Derivace nemusí existovat – Dirichletova fce (je to fce?).

Otázka

Má každá „rozumně zadaná“ funkce derivaci ve „většině“ bodů?

Velcí matematici 18. i 19. století věřili v kladnou odpověď.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813),
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a další

Kdy derivace neexistuje:

- Když tečna není jednoznačně určená: např. $f(x) = |x|$.
- Když je funkce nespojitá:
  - Derivace může existovat – skok – fce $\operatorname{sgn} x$.
  - Derivace nemusí existovat – Dirichletova fce (je to fce?).

Otázka

Má každá „rozumně zadaná“ funkce derivaci ve „většině“ bodů?

Velcí matematici 18. i 19. století věřili v kladnou odpověď.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813),
Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a další

Umíme si představit...

- spojitou funkci bez derivace v 1 bodě?
- spojitou funkci bez derivace v n bodech?
- spojitou funkci bez derivace v ∞ bodech?
- spojitou funkci bez derivace?

Je vůbec podstatné, co si umíme představit?

Samozřejmě NE.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Limita.

CAUCHY

Umíme si představit...

- spojitou funkci bez derivace v 1 bodě?
- spojitou funkci bez derivace v n bodech?
- spojitou funkci bez derivace v ∞ bodech?
- spojitou funkci bez derivace?

Je vůbec podstatné, co si umíme představit?

Samozřejmě NE.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Limita.

Cauchy

Umíme si představit...

- spojitou funkci bez derivace v 1 bodě?
- spojitou funkci bez derivace v n bodech?
- spojitou funkci bez derivace v ∞ bodech?
- spojitou funkci bez derivace?

Je vůbec podstatné, co si umíme představit?

Samozřejmě NE.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Limita.

CAUCHY

Umíme si představit...

- spojitou funkci bez derivace v 1 bodě?
- spojitou funkci bez derivace v n bodech?
- spojitou funkci bez derivace v ∞ bodech?
- spojitou funkci bez derivace?

Je vůbec podstatné, co si umíme představit?

Samozřejmě NE.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Limita.

CAUCHY

Umíme si představit...

- spojitou funkci bez derivace v 1 bodě?
- spojitou funkci bez derivace v n bodech?
- spojitou funkci bez derivace v ∞ bodech?
- spojitou funkci bez derivace?

Je vůbec podstatné, co si umíme představit?

Samozřejmě NE.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Limita.

CAUCHY

Umíme si představit...

- spojitou funkci bez derivace v 1 bodě?
- spojitou funkci bez derivace v n bodech?
- spojitou funkci bez derivace v ∞ bodech?
- spojitou funkci bez derivace?

Je vůbec podstatné, co si umíme představit?

Samozřejmě NE.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Limita.

Cauchy

Umíme si představit...

- spojitou funkci bez derivace v 1 bodě?
- spojitou funkci bez derivace v n bodech?
- spojitou funkci bez derivace v ∞ bodech?
- spojitou funkci bez derivace?

Je vůbec podstatné, co si umíme představit?

Samozřejmě NE.

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857). Limita.

CAUCHY

Osnova

Rozumné zadání funkce

Příklady (Vzorcem, vzorcem po částech)

$f(x) = x^2 + 2x + 1, \qquad g(x) = \sin x - e^{x^2} + 1 \qquad$ atd.

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{pokud } x < 0, \\ 0, & \text{pokud } x = 0, \\ 1, & \text{pokud } x > 0. \end{cases}$$

Je Dirichletova funkce takový případ? Pro řadu čísel neznáme její hodnotu. Neexistuje algoritmus, jak ji vyčíslit. (Třeba Eulerova konstanta.)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \doteq 0,5772156649 \quad \overset{?}{\in} \quad \mathbb{Q}.$$

Rozumné zadání funkce

Příklady (Vzorcem, vzorcem po částech)

$$f(x) = x^2 + 2x + 1, \qquad g(x) = \sin x - e^{x^2} + 1 \qquad \text{atd.}$$

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{pokud } x < 0, \\ 0, & \text{pokud } x = 0, \\ 1, & \text{pokud } x > 0. \end{cases}$$

Je Dirichletova funkce takový případ? Pro řadu čísel neznáme její hodnotu. Neexistuje algoritmus, jak ji vyčíslit. (Třeba Eulerova konstanta.)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \doteq 0,5772156649 \quad \overset{?}{\in} \quad \mathbb{Q}.$$

Rozumné zadání funkce

Příklady (Vzorcem, vzorcem po částech)

$f(x) = x^2 + 2x + 1, \qquad g(x) = \sin x - e^{x^2} + 1 \qquad$ atd.

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{pokud } x < 0, \\ 0, & \text{pokud } x = 0, \\ 1, & \text{pokud } x > 0. \end{cases}$$

Je Dirichletova funkce takový případ? Pro řadu čísel neznáme její hodnotu. Neexistuje algoritmus, jak ji vyčíslit. (Třeba Eulerova konstanta.)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \doteq 0,5772156649 \quad \overset{?}{\in} \quad \mathbb{Q}.$$

Rozumné zadání funkce

Příklady (Vzorcem, vzorcem po částech)

$f(x) = x^2 + 2x + 1, \qquad g(x) = \sin x - e^{x^2} + 1 \qquad$ atd.

$$h(x) = \begin{cases} -1, & \text{pokud } x < 0, \\ 0, & \text{pokud } x = 0, \\ 1, & \text{pokud } x > 0. \end{cases}$$

Je Dirichletova funkce takový případ? Pro řadu čísel neznáme její hodnotu. Neexistuje algoritmus, jak ji vyčíslit. (Třeba Eulerova konstanta.)

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \doteq 0{,}5772156649 \quad \overset{?}{\in} \quad \mathbb{Q}.$$

Rozumné zadání funkce II

Co třeba funkce zadané nekonečnou řadou?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{kde } 0! := 1)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \text{sčítáme do nekonečna.}$$

Zde x je parametr; pro každou jeho hodnotu dostaneme nějaký součet řady. Například pro $x = 1$ je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Eulerovo číslo).

Vychází obecně, že $f(x) = e^x$ (exponenciála).

Těžko tedy můžeme tento způsob zadání funkce odmítnout.
Nekonečná řada musí být legitimní způsob, jak zadat funkci.

Rozumné zadání funkce II

Co třeba funkce zadané nekonečnou řadou?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{kde } 0! := 1)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \text{sčítáme do nekonečna.}$$

Zde x je parametr; pro každou jeho hodnotu dostaneme nějaký součet řady. Například pro $x = 1$ je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Eulerovo číslo).

Vychází obecně, že $f(x) = e^x$ (exponenciála).

Těžko tedy můžeme tento způsob zadání funkce odmítnout.
Nekonečná řada musí být legitimní způsob, jak zadat funkci.

Rozumné zadání funkce II

Co třeba funkce zadané nekonečnou řadou?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{(kde } 0! := 1\text{)}$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \text{sčítáme do nekonečna.}$$

Zde x je parametr; pro každou jeho hodnotu dostaneme nějaký součet řady. Například pro $x = 1$ je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Eulerovo číslo).

Vychází obecně, že $f(x) = e^x$ (exponenciála).

Těžko tedy můžeme tento způsob zadání funkce odmítnout.
Nekonečná řada musí být legitimní způsob, jak zadat funkci.

Rozumné zadání funkce II

Co třeba funkce zadané nekonečnou řadou?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{kde } 0! := 1)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \text{sčítáme do nekonečna.}$$

Zde x je parametr; pro každou jeho hodnotu dostaneme nějaký součet řady. Například pro $x = 1$ je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Eulerovo číslo).

Vychází obecně, že $f(x) = e^x$ (exponenciála).

Těžko tedy můžeme tento způsob zadání funkce odmítnout. *Nekonečná řada musí být legitimní způsob, jak zadat funkci.*

Rozumné zadání funkce II

Co třeba funkce zadané nekonečnou řadou?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{kde } 0! := 1)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \text{sčítáme do nekonečna.}$$

Zde x je parametr; pro každou jeho hodnotu dostaneme nějaký součet řady. Například pro $x = 1$ je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Eulerovo číslo).

Vychází obecně, že $f(x) = e^x$ (exponenciála).

Těžko tedy můžeme tento způsob zadání funkce odmítnout.
Nekonečná řada musí být legitimní způsob, jak zadat funkci.

Rozumné zadání funkce II

Co třeba funkce zadané nekonečnou řadou?

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{kde } 0! := 1)$$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad \text{sčítáme do nekonečna.}$$

Zde x je parametr; pro každou jeho hodnotu dostaneme nějaký součet řady. Například pro $x = 1$ je $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ (Eulerovo číslo).

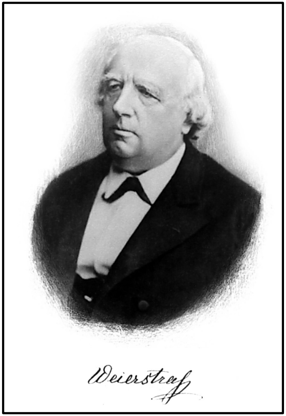
Vychází obecně, že $f(x) = e^x$ (exponenciála).

Těžko tedy můžeme tento způsob zadání funkce odmítnout.
Nekonečná řada musí být legitimní způsob, jak zadat funkci.

Osnova

Weierstrassovo monstrum: Zde $a = 7, b = \frac{5}{6}$

Karl Weierstrass (1815–1897)



Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *monstrum*, pokud je spojitá a zároveň nemá v žádném bodě konečnou derivaci.

Věta (1872)

Nechť $a \in \mathbb{N}$ je liché, $b \in (0, 1)$ a platí $a \cdot b > 1 + \frac{2\pi}{3}$. Pak W je monstrum.

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

Weierstrassovo monstrum: Zde $a = 7, b = \frac{5}{6}$

Karl Weierstrass (1815–1897)

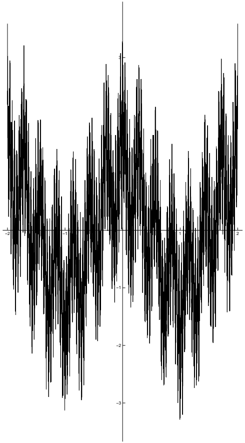
Definice

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *monstrum*, pokud je spojitá a zároveň nemá v žádném bodě konečnou derivaci.

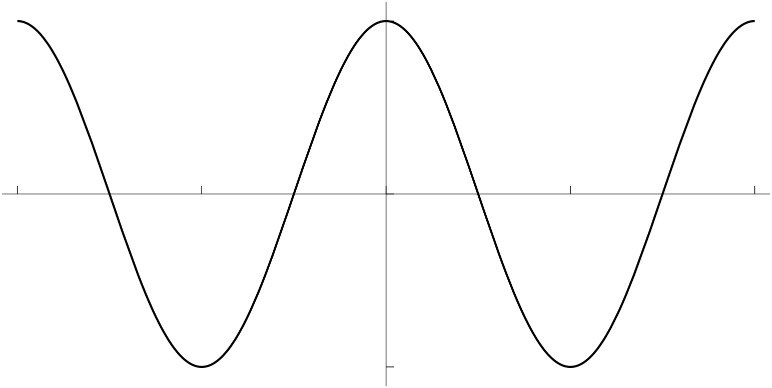
Věta (1872)

Nechť $a \in \mathbb{N}$ *je liché,* $b \in (0,1)$ *a platí* $a \cdot b > 1 + \frac{2\pi}{3}$. *Pak* W *je monstrum.*

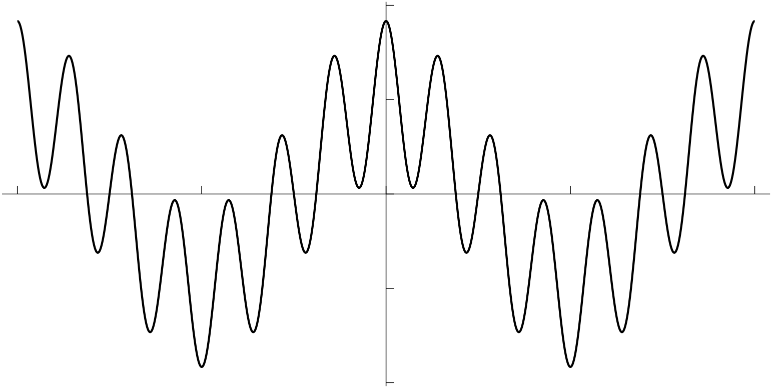
$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$



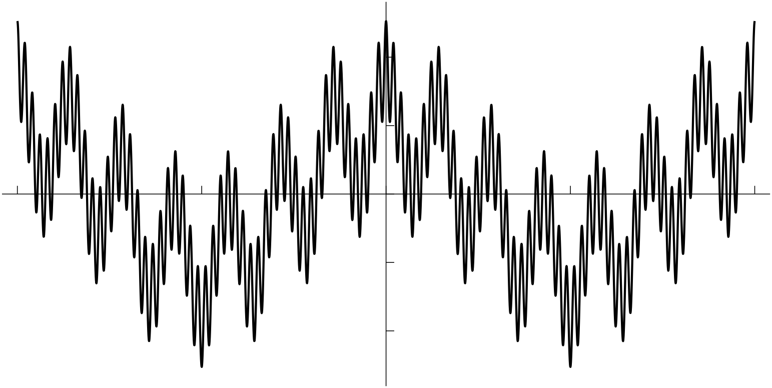
První tři iterace



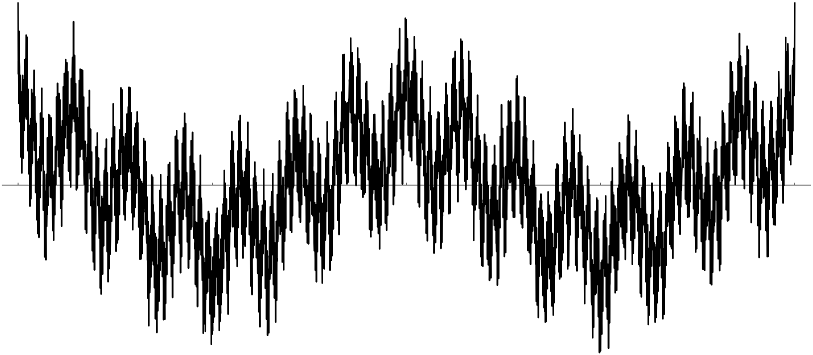
První tři iterace



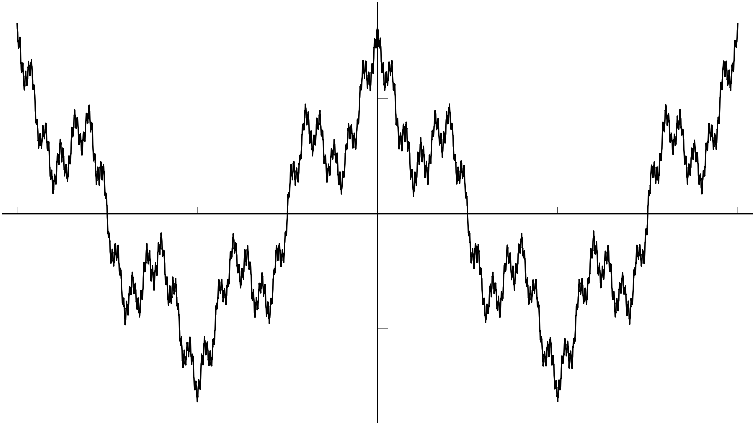
První tři iterace



$a = 7, b = \frac{5}{6}$ — $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$



$a = 5, b = \frac{2}{5}$ — $W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$



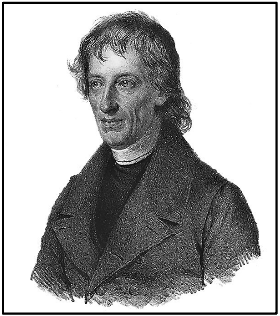
Bolzanova funkce

Jeden z prvních příkladů monstra podal náš Bernard Bolzano (1781–1848).

- Věděl, že to je podivná funkce, ale neuměl dokázat, že to je monstrum. Je z jeho knihy *Functionenlehre* z roku 1834.
- Zabýval se zpřesňováním důkazů v matematice, odbouráváním nepatřičné intuice.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $f(0) < 0 < f(1)$. *Pak existuje bod* $x_0 \in (0, 1)$, *pro nějž* $f(x_0) = 0$.



Bolzano

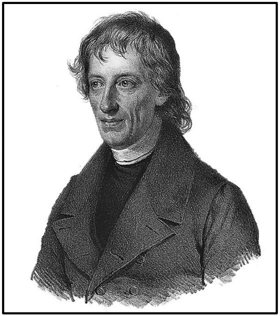
Bolzanova funkce

Jeden z prvních příkladů monstra podal náš Bernard Bolzano (1781–1848).

- Věděl, že to je podivná funkce, ale neuměl dokázat, že to je monstrum. Je z jeho knihy *Functionenlehre* z roku 1834.
- Zabýval se zpřesňováním důkazů v matematice, odbouráváním nepatřičné intuice.

Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $f(0) < 0 < f(1)$. *Pak existuje bod* $x_0 \in (0, 1)$, *pro nějž* $f(x_0) = 0$.



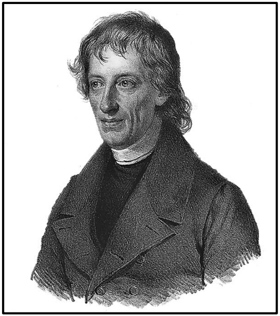
BOLZANO

Bolzanova funkce

Jeden z prvních příkladů monstra podal náš Bernard Bolzano (1781–1848).

• Věděl, že to je podivná funkce, ale neuměl dokázat, že to je monstrum. Je z jeho knihy *Functionenlehre* z roku 1834.

• Zabýval se zpřesňováním důkazů v matematice, odbouráváním nepatřičné intuice.



BOLZANO

Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \langle 0,1\rangle \to \mathbb{R}$ je spojitá a $f(0) < 0 < f(1)$. Pak existuje bod $x_0 \in (0,1)$, pro nějž $f(x_0) = 0$.

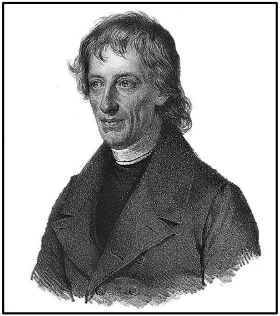
Bolzanova funkce

Jeden z prvních příkladů monstra podal náš Bernard Bolzano (1781–1848).

- Věděl, že to je podivná funkce, ale neuměl dokázat, že to je monstrum. Je z jeho knihy *Functionenlehre* z roku 1834.
- Zabýval se zpřesňováním důkazů v matematice, odbouráváním nepatřičné intuice.

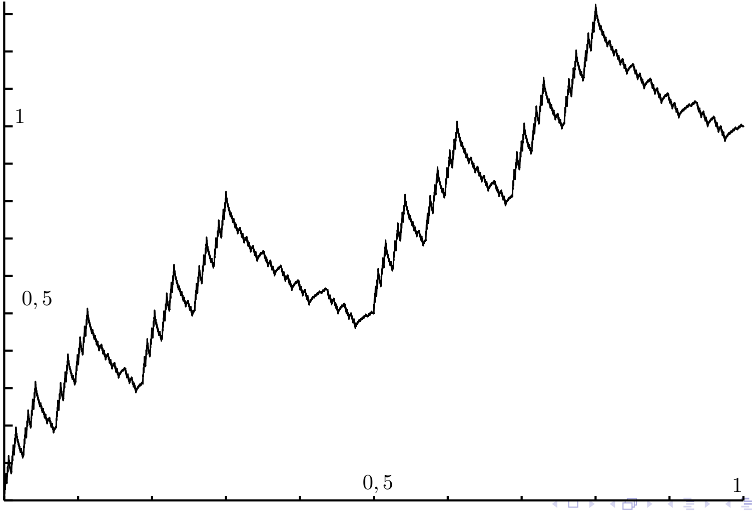
Věta (Bolzanova)

Nechť $f : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R}$ *je spojitá a* $f(0) < 0 < f(1)$. *Pak existuje bod* $x_0 \in (0, 1)$, *pro nějž* $f(x_0) = 0$.



BOLZANO

Bolzanova funkce (1834)



Jsou monstra singulární případy?

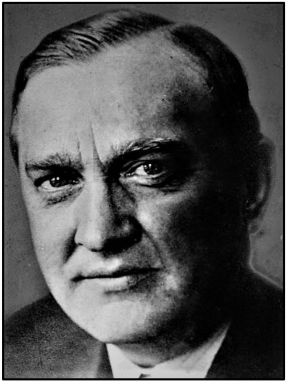
Stefan Banach (1892–1945) dokázal:

Věta (Banach, Mazurkiewicz)

„Většina" spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ *jsou monstra.*

Co je „většina"? Je potřeba naučit se nějak „měřit" velikost množin funkcí.

Sofistikovaným postupem se ukáže, že ne-monster je zanedbatelné množství.



BANACH

Jsou monstra singulární případy?

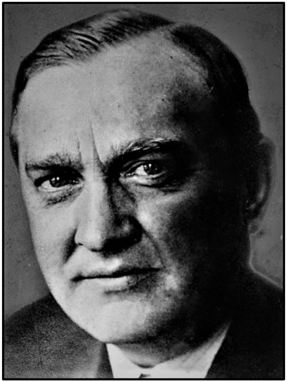
Stefan Banach (1892–1945) dokázal:

Věta (Banach, Mazurkiewicz)

„Většina“ spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ *jsou monstra.*

Co je „většina“? Je potřeba naučit se nějak „měřit“ velikost množin funkcí.

Sofistikovaným postupem se ukáže, že ne-monster je zanedbatelné množství.



BANACH

Jsou monstra singulární případy?

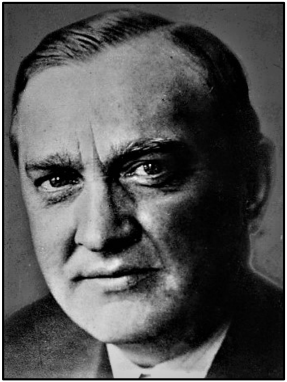
Stefan Banach (1892–1945) dokázal:

Věta (Banach, Mazurkiewicz)

„Většina" spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ *jsou monstra.*

Co je „většina"? Je potřeba naučit se nějak „měřit" velikost množin funkcí.

Sofistikovaným postupem se ukáže, že ne-monster je zanedbatelné množství.



BANACH

Jsou monstra singulární případy?

Stefan Banach (1892–1945) dokázal:

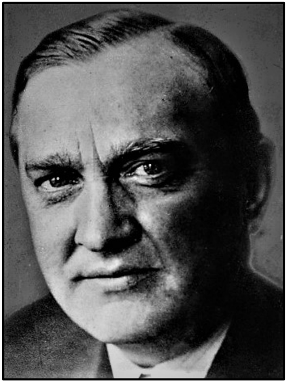
Věta (Banach, Mazurkiewicz)

„Většina“ spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ *jsou monstra.*

Co je „většina“? Je potřeba naučit se nějak „měřit“ velikost množin funkcí.

Sofistikovaným postupem se ukáže, že ne-monster je zanedbatelné množství.

Pro naši intuici velká rána.



BANACH

Jsou monstra singulární případy?

Stefan Banach (1892–1945) dokázal:

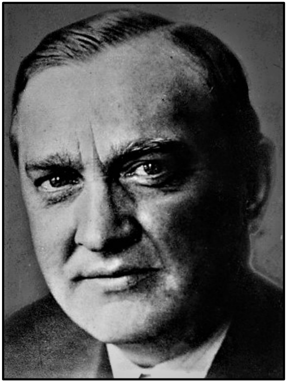
Věta (Banach, Mazurkiewicz)

„Většina“ spojitých funkcí na intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ jsou monstra.

Co je „většina“? Je potřeba naučit se nějak „měřit“ velikost množin funkcí.

Sofistikovaným postupem se ukáže, že ne-monster je zanedbatelné množství.

Pro naši intuici velká rána.



BANACH

Děkuji za pozornost!