

Implikace: různá její pojetí a jak je chápat

Martin Rmoutil

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Praha, *čtvrtek* 22. září 2022

Osnova

- 1 Co zhruba učíme
- 2 Co raději neučíme
- 3 Jiné potíže s \Rightarrow
- 4 Implicitní obecný kvantifikátor

Výroky a složené výroky

Výrok je vyjádření, které je z principu buďto pravdivé, nebo nepravdivé. Je-li A výrok, značíme $\text{prh}(A)$ pravdivostní hodnotu A , přičemž

$$\text{prh}(A) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } A \text{ nepravdivý výrok,} \\ 1, & \text{je-li } A \text{ pravdivý výrok.} \end{cases}$$

Výroky A , B lze spojovat pomocí logických spojek, např. \Rightarrow , \wedge , \vee atd. Dostáváme tak složené výroky $A \Rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$. Negaci výroku A značíme $\neg A$.

Chování logických spojek vzhledem k pravdivostní hodnotě (tj. jejich sémantiku) lze popsat slovy. Například konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, když jsou pravdivé oba výroky A i B .

Lze psát i $\text{prh}(A \wedge B) = \text{prh}(A) \cdot \text{prh}(B)$. Dále např.:

$\text{prh}(\neg A) = 1 - \text{prh}(A)$ nebo $\text{prh}(A \vee B) = \max(\text{prh}(A), \text{prh}(B))$.

Výroky a složené výroky

Výrok je vyjádření, které je z principu buďto pravdivé, nebo nepravdivé. Je-li A výrok, značíme $\text{prh}(A)$ pravdivostní hodnotu A , přičemž

$$\text{prh}(A) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } A \text{ nepravdivý výrok,} \\ 1, & \text{je-li } A \text{ pravdivý výrok.} \end{cases}$$

Výroky A , B lze spojovat pomocí logických spojek, např. \Rightarrow , \wedge , \vee atd. Dostáváme tak složené výroky $A \Rightarrow B$, $A \wedge B$, $A \vee B$. Negaci výroku A značíme $\neg A$.

Chování logických spojek vzhledem k pravdivostní hodnotě (tj. jejich sémantiku) lze popsat slovy. Například konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, když jsou pravdivé oba výroky A i B . Lze psát i $\text{prh}(A \wedge B) = \text{prh}(A) \cdot \text{prh}(B)$. Dále např.:
 $\text{prh}(\neg A) = 1 - \text{prh}(A)$ nebo $\text{prh}(A \vee B) = \max(\text{prh}(A), \text{prh}(B))$.

Výroky a složené výroky

Výrok je vyjádření, které je z principu buďto pravdivé, nebo nepravdivé. Je-li A výrok, značíme $\text{prh}(A)$ pravdivostní hodnotu A , přičemž

$$\text{prh}(A) = \begin{cases} 0, & \text{je-li } A \text{ nepravdivý výrok,} \\ 1, & \text{je-li } A \text{ pravdivý výrok.} \end{cases}$$

Výroky A, B lze spojovat pomocí logických spojek, např. $\Rightarrow, \wedge, \vee$ atd. Dostáváme tak složené výroky $A \Rightarrow B, A \wedge B, A \vee B$. Negaci výroku A značíme $\neg A$.

Chování logických spojek vzhledem k pravdivostní hodnotě (tj. jejich sémantiku) lze popsat slovy. Například konjunkce $A \wedge B$ je pravdivá tehdy a jen tehdy, když jsou pravdivé oba výroky A i B . Lze psát i $\text{prh}(A \wedge B) = \text{prh}(A) \cdot \text{prh}(B)$. Dále např.:
 $\text{prh}(\neg A) = 1 - \text{prh}(A)$ nebo $\text{prh}(A \vee B) = \max(\text{prh}(A), \text{prh}(B))$.

Sémantika implikace

Nejspíš nikoho napoprvé neuspokojí definice vzorcem:

$$\text{prh}(A \Rightarrow B) = \max(\text{prh}(B), 1 - \text{prh}(A));$$

je potřeba vysvětlení. Nuže:

Dva výroky A , B lze pravdivě spojit do složeného výroku $A \Rightarrow B$, pokud B logicky plyne z A . Jinými slovy, má-li být implikace $A \Rightarrow B$ pravdivá, a platí-li A , musí platit i B .

Můžeme zkoušet další podobné slovní opisy; nakonec to ale obvykle vzdáme a význam implikace vyjádříme tabulkou pravdivostních hodnot, která „nedává prostor pochybnostem“:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Pozn.: Správně by v tabulce mělo být místo A , B , $A \Rightarrow B$ uvedeno $\text{prh}(A)$, $\text{prh}(B)$, $\text{prh}(A \Rightarrow B)$.

Sémantika implikace

Nejspíš nikoho napoprvé neuspokojí definice vzorcem:

$$\text{prh}(A \Rightarrow B) = \max(\text{prh}(B), 1 - \text{prh}(A));$$

je potřeba vysvětlení. Nuže:

Dva výroky A , B lze pravdivě spojit do složeného výroku $A \Rightarrow B$, pokud B logicky plyne z A . Jinými slovy, má-li být implikace $A \Rightarrow B$ pravdivá, a platí-li A , musí platit i B .

Můžeme zkoušet další podobné slovní opisy; nakonec to ale obvykle vzdáme a význam implikace vyjádříme tabulkou pravdivostních hodnot, která „nedává prostor pochybnostem“:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Pozn.: Správně by v tabulce mělo být místo A , B , $A \Rightarrow B$ uvedeno $\text{prh}(A)$, $\text{prh}(B)$, $\text{prh}(A \Rightarrow B)$.

Sémantika implikace

Nejspíš nikoho napoprvé neuspokojí definice vzorcem:

$$\text{prh}(A \Rightarrow B) = \max(\text{prh}(B), 1 - \text{prh}(A));$$

je potřeba vysvětlení. Nuže:

Dva výroky A , B lze pravdivě spojit do složeného výroku $A \Rightarrow B$, pokud B logicky plyne z A . Jinými slovy, má-li být implikace $A \Rightarrow B$ pravdivá, a platí-li A , musí platit i B .

Můžeme zkoušet další podobné slovní opisy; nakonec to ale obvykle vzdáme a význam implikace vyjádříme tabulkou pravdivostních hodnot, která „nedává prostor pochybnostem“:

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Pozn.: Správně by v tabulce mělo být místo A , B , $A \Rightarrow B$ uvedeno $\text{prh}(A)$, $\text{prh}(B)$, $\text{prh}(A \Rightarrow B)$.

Další slovní formulace $A \Rightarrow B$

- 1 Jestliže platí A , pak platí B .
- 2 Z A vyplývá B .
- 3 Předpoklad A má za následek závěr B .
- 4 Podmínka A je postačující pro B .
- 5 K tomu, aby platilo B , stačí A .
- 6 Podmínka B je nutná pro platnost A .
- 7 K tomu, aby A , je nutné, aby B .
- 8 Pokud A , pak nutně B .

Pravdivost výroku „Předpoklad A má za následek závěr B .“ tedy závisí čistě na pravdivostních hodnotách A a B .

Další slovní formulace $A \Rightarrow B$

- 1 Jestliže platí A , pak platí B .
- 2 Z A vyplývá B .
- 3 Předpoklad A má za následek závěr B .
- 4 Podmínka A je postačující pro B .
- 5 K tomu, aby platilo B , stačí A .
- 6 Podmínka B je nutná pro platnost A .
- 7 K tomu, aby A , je nutné, aby B .
- 8 Pokud A , pak nutně B .

Pravdivost výroku „Předpoklad A má za následek závěr B .“ tedy závisí čistě na pravdivostních hodnotách A a B .

Osnova

- 1 Co zhruba učíme
- 2 Co raději neučíme
- 3 Jiné potíže s \Rightarrow
- 4 Implicitní obecný kvantifikátor

Jednoduchý osvětlující názorný příkládeček 1

Dosaďme za A a B následující výroky:

$A \sim$ „ $2 + 2 = 4$ “;

$B \sim$ „New York je velké město.“

Dostaneme tak složený výrok:

„Jestliže $2 + 2 = 4$, pak New York je velké město.“

Protože se jistě shodneme, že A i B jsou pravdivé výroky, musíme se shodnout i na pravdivosti uvedené implikace (poslední řádek tabulky).

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Jednoduchý osvětlující názorný příkládeček 1

Dosaďme za A a B následující výroky:

$A \sim$ „ $2 + 2 = 4$ “;

$B \sim$ „New York je velké město.“

Dostaneme tak složený výrok:

„Jestliže $2 + 2 = 4$, pak New York je velké město.“

Protože se jistě shodneme, že A i B jsou pravdivé výroky, musíme se shodnout i na pravdivosti uvedené implikace (poslední řádek tabulky).

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Jednoduchý osvětlující názorný příkládeček 1

Dosaďme za A a B následující výroky:

$A \sim$ „ $2 + 2 = 4$ “;

$B \sim$ „New York je velké město.“

Dostaneme tak složený výrok:

„Jestliže $2 + 2 = 4$, pak New York je velké město.“

Protože se jistě shodneme, že A i B jsou pravdivé výroky, musíme se shodnout i na pravdivosti uvedené implikace (poslední řádek tabulky).

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Další, neméně „názorné“ příklady

Které z následujících implikací jsou pravdivé?

- 1 Jestliže $2 + 2 = 5$, pak New York je malé město.
- 2 Jestliže $2 + 2 = 5$, pak New York je velké město.
- 3 Jestliže $2 + 2 = 4$, pak New York je malé město.
- 4 Jestliže $2 + 2 = 4$, pak New York je velké město.

Další, neméně „názorné“ příklady

Které z následujících implikací jsou pravdivé?

- 1 Jestliže $2 + 2 = 5$, pak New York je malé město.
- 2 Jestliže $2 + 2 = 5$, pak New York je velké město.
- 3 Jestliže $2 + 2 = 4$, pak New York je malé město.
- 4 Jestliže $2 + 2 = 4$, pak New York je velké město.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Předchozí slide se Vám líbil \implies tento Vás nadchne.

Následující implikace jsou pravdivé:

- K tomu, aby New York bylo velké město, stačí, aby $2 + 2 = 5$.
- K tomu, aby $2 + 2 = 5$, je nutné, aby New York bylo malé město.
- Předpoklad, že $2 + 2 = 4$, má za následek, že NY je velké město.
- Jestliže $2 + 2 = 5$, pak covid je nebezpečná nemoc.

A takto bychom mohli pokračovat. Je snad zřejmé, že uvedené slovní formulace jsou zavádějící, neboť se zdají předpokládat nějakou *souvislost mezi předpokladem a závěrem implikace*.

Ta však nemusí v žádném rozumném smyslu existovat (kauzálním, časovém či aspoň obsahovém).

Je proto snad lepší vyhnout se slovům jako „plyne“, „následek“ apod., která takovou souvislost mezi A a B mohou evokovat.

Předchozí slide se Vám líbil \implies tento Vás nadchne.

Následující implikace jsou pravdivé:

- K tomu, aby New York bylo velké město, stačí, aby $2 + 2 = 5$.
- K tomu, aby $2 + 2 = 5$, je nutné, aby New York bylo malé město.
- Předpoklad, že $2 + 2 = 4$, má za následek, že NY je velké město.
- Jestliže $2 + 2 = 5$, pak covid je nebezpečná nemoc.

A takto bychom mohli pokračovat. Je snad zřejmé, že uvedené slovní formulace jsou zavádějící, neboť se zdají předpokládat nějakou *souvislost mezi předpokladem a závěrem implikace*.

Ta však nemusí v žádném rozumném smyslu existovat (kauzálním, časovém či aspoň obsahovém).

Je proto snad lepší vyhnout se slovům jako „plyne“, „následek“ apod., která takovou souvislost mezi A a B mohou evokovat.

Předchozí slide se Vám líbil \implies tento Vás nadchne.

Následující implikace jsou pravdivé:

- K tomu, aby New York bylo velké město, stačí, aby $2 + 2 = 5$.
- K tomu, aby $2 + 2 = 5$, je nutné, aby New York bylo malé město.
- Předpoklad, že $2 + 2 = 4$, má za následek, že NY je velké město.
- Jestliže $2 + 2 = 5$, pak covid je nebezpečná nemoc.

A takto bychom mohli pokračovat. Je snad zřejmé, že uvedené slovní formulace jsou zavádějící, neboť se zdají předpokládat nějakou *souvislost mezi předpokladem a závěrem implikace*.

Ta však nemusí v žádném rozumném smyslu existovat (kauzálním, časovém či aspoň obsahovém).

Je proto snad lepší vyhnout se slovům jako „plyne“, „následek“ apod., která takovou souvislost mezi A a B mohou evokovat.

Předchozí slide se Vám líbil \implies tento Vás nadchne.

Následující implikace jsou pravdivé:

- K tomu, aby New York bylo velké město, stačí, aby $2 + 2 = 5$.
- K tomu, aby $2 + 2 = 5$, je nutné, aby New York bylo malé město.
- Předpoklad, že $2 + 2 = 4$, má za následek, že NY je velké město.
- Jestliže $2 + 2 = 5$, pak covid je nebezpečná nemoc.

A takto bychom mohli pokračovat. Je snad zřejmé, že uvedené slovní formulace jsou zavádějící, neboť se zdají předpokládat nějakou *souvislost mezi předpokladem a závěrem implikace*.

Ta však nemusí v žádném rozumném smyslu existovat (kauzálním, časovém či aspoň obsahovém).

Je proto snad lepší vyhnout se slovům jako „plyne“, „následek“ apod., která takovou souvislost mezi A a B mohou evokovat.

Předchozí slide se Vám líbil \implies tento Vás nadchne.

Následující implikace jsou pravdivé:

- K tomu, aby New York bylo velké město, stačí, aby $2 + 2 = 5$.
- K tomu, aby $2 + 2 = 5$, je nutné, aby New York bylo malé město.
- Předpoklad, že $2 + 2 = 4$, má za následek, že NY je velké město.
- Jestliže $2 + 2 = 5$, pak covid je nebezpečná nemoc.

A takto bychom mohli pokračovat. Je snad zřejmé, že uvedené slovní formulace jsou zavádějící, neboť se zdají předpokládat nějakou *souvislost mezi předpokladem a závěrem implikace*.

Ta však nemusí v žádném rozumném smyslu existovat (kauzálním, časovém či aspoň obsahovém).

Je proto snad lepší vyhnout se slovům jako „plyne“, „následek“ apod., která takovou souvislost mezi A a B mohou evokovat.

Předchozí slide se Vám líbil \implies tento Vás nadchne.

Následující implikace jsou pravdivé:

- K tomu, aby New York bylo velké město, stačí, aby $2 + 2 = 5$.
- K tomu, aby $2 + 2 = 5$, je nutné, aby New York bylo malé město.
- Předpoklad, že $2 + 2 = 4$, má za následek, že NY je velké město.
- Jestliže $2 + 2 = 5$, pak covid je nebezpečná nemoc.

A takto bychom mohli pokračovat. Je snad zřejmé, že uvedené slovní formulace jsou zavádějící, neboť se zdají předpokládat nějakou *souvislost mezi předpokladem a závěrem implikace*.

Ta však nemusí v žádném rozumném smyslu existovat (kauzálním, časovém či aspoň obsahovém).

Je proto snad lepší vyhnout se slovům jako „plyne“, „následek“ apod., která takovou souvislost mezi A a B mohou evokovat.

Materiální implikace \times striktní implikace. (trocha teorie)

Materiální implikace: $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ je dána tabulkou.

Pro toto pojetí implikace je typické, že jeho pravdivostní hodnota závisí výlučně na pravdivostních hodnotách A a B .

Známe-li hodnoty $\text{prh}(A)$ a $\text{prh}(B)$, rozhodnout o pravdivostní hodnotě $A \Rightarrow B$ je tedy (triviální) mechanický proces.

Striktní implikace: Poněkud volně definovaný pojem, který požaduje nějaký druh souvislosti mezi A a B .

Každá smysluplná (resp. pravdivá) striktní implikace je zároveň smysluplná (resp. pravdivá) materiální implikace. Ne naopak.

Dříve uvedené „nesmyslné“ implikace nejsou striktní, jsou ale materiální.

- „Pokud prší, mám s sebou deštník.“

je příklad striktní (a tedy i materiální) implikace.

Materiální implikace \times striktní implikace. (trocha teorie)

Materiální implikace: $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ je dána tabulkou.

Pro toto pojetí implikace je typické, že jeho pravdivostní hodnota závisí výlučně na pravdivostních hodnotách A a B .

Známe-li hodnoty $\text{prh}(A)$ a $\text{prh}(B)$, rozhodnout o pravdivostní hodnotě $A \Rightarrow B$ je tedy (triviální) mechanický proces.

Striktní implikace: Poněkud volně definovaný pojem, který požaduje nějaký druh souvislosti mezi A a B .

Každá smysluplná (resp. pravdivá) striktní implikace je zároveň smysluplná (resp. pravdivá) materiální implikace. Ne naopak.

Dříve uvedené „nesmyslné“ implikace nejsou striktní, jsou ale materiální.

- „Pokud prší, mám s sebou deštník.“

je příklad striktní (a tedy i materiální) implikace.

Materiální implikace \times striktní implikace. (trocha teorie)

Materiální implikace: $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ je dána tabulkou.

Pro toto pojetí implikace je typické, že jeho pravdivostní hodnota závisí výlučně na pravdivostních hodnotách A a B .

Známe-li hodnoty $\text{prh}(A)$ a $\text{prh}(B)$, rozhodnout o pravdivostní hodnotě $A \Rightarrow B$ je tedy (triviální) mechanický proces.

Striktní implikace: Poněkud volně definovaný pojem, který požaduje nějaký druh souvislosti mezi A a B .

Každá smysluplná (resp. pravdivá) striktní implikace je zároveň smysluplná (resp. pravdivá) materiální implikace. Ne naopak.

Dříve uvedené „nesmyslné“ implikace nejsou striktní, jsou ale materiální.

- „Pokud prší, mám s sebou deštník.“

je příklad striktní (a tedy i materiální) implikace.

Materiální implikace \times striktní implikace. (trocha teorie)

Materiální implikace: $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ je dána tabulkou.

Pro toto pojetí implikace je typické, že jeho pravdivostní hodnota závisí výlučně na pravdivostních hodnotách A a B .

Známe-li hodnoty $\text{prh}(A)$ a $\text{prh}(B)$, rozhodnout o pravdivostní hodnotě $A \Rightarrow B$ je tedy (triviální) mechanický proces.

Striktní implikace: Poněkud volně definovaný pojem, který požaduje nějaký druh souvislosti mezi A a B .

Každá smysluplná (resp. pravdivá) striktní implikace je zároveň smysluplná (resp. pravdivá) materiální implikace. Ne naopak.

Dříve uvedené „nesmyslné“ implikace nejsou striktní, jsou ale materiální.

- „Pokud prší, mám s sebou deštník.“

je příklad striktní (a tedy i materiální) implikace.

Materiální implikace \times striktní implikace. (trocha teorie)

Materiální implikace: $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ je dána tabulkou.

Pro toto pojetí implikace je typické, že jeho pravdivostní hodnota závisí výlučně na pravdivostních hodnotách A a B .

Známe-li hodnoty $\text{prh}(A)$ a $\text{prh}(B)$, rozhodnout o pravdivostní hodnotě $A \Rightarrow B$ je tedy (triviální) mechanický proces.

Striktní implikace: Poněkud volně definovaný pojem, který požaduje nějaký druh souvislosti mezi A a B .

Každá smysluplná (resp. pravdivá) striktní implikace je zároveň smysluplná (resp. pravdivá) materiální implikace. Ne naopak.

Dříve uvedené „nesmyslné“ implikace nejsou striktní, jsou ale materiální.

- „Pokud prší, mám s sebou deštník.“

je příklad striktní (a tedy i materiální) implikace.

Materiální implikace \times striktní implikace. (trocha teorie)

Materiální implikace: $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ je dána tabulkou.

Pro toto pojetí implikace je typické, že jeho pravdivostní hodnota závisí výlučně na pravdivostních hodnotách A a B .

Známe-li hodnoty $\text{prh}(A)$ a $\text{prh}(B)$, rozhodnout o pravdivostní hodnotě $A \Rightarrow B$ je tedy (triviální) mechanický proces.

Striktní implikace: Poněkud volně definovaný pojem, který požaduje nějaký druh souvislosti mezi A a B .

Každá smysluplná (resp. pravdivá) striktní implikace je zároveň smysluplná (resp. pravdivá) materiální implikace. Ne naopak.

Dříve uvedené „nesmyslné“ implikace nejsou striktní, jsou ale materiální.

- „Pokud prší, mám s sebou deštník.“

je příklad striktní (a tedy i materiální) implikace.

Materiální implikace \times striktní implikace. (trocha teorie)

Materiální implikace: $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ je dána tabulkou.

Pro toto pojetí implikace je typické, že jeho pravdivostní hodnota závisí výlučně na pravdivostních hodnotách A a B .

Známe-li hodnoty $\text{prh}(A)$ a $\text{prh}(B)$, rozhodnout o pravdivostní hodnotě $A \Rightarrow B$ je tedy (triviální) mechanický proces.

Striktní implikace: Poněkud volně definovaný pojem, který požaduje nějaký druh souvislosti mezi A a B .

Každá smysluplná (resp. pravdivá) striktní implikace je zároveň smysluplná (resp. pravdivá) materiální implikace. Ne naopak.

Dříve uvedené „nesmyslné“ implikace nejsou striktní, jsou ale materiální.

- „Pokud prší, mám s sebou deštník.“
je příklad striktní (a tedy i materiální) implikace.

Smysluplná (ryze) materiální implikace:

Pokud vyřešíš tento matematický problém, pak sním svůj klobouk.

Implikace je „zřejmě“ **pouze materiální**, neboť nenajdeme rozumnou souvislost mezi řešením mat. problému a konzumací klobouku.

- Nelžu, jejím vyslovením tedy implikaci prohlašuji za pravdivou.
- Zdravý rozum přitom dá, že za žádných okolností nehodlám konzumovat svůj klobouk; závěr implikace je tedy nepravdivý.

Nahlédneme-li do tabulky pravdivostních hodnot implikace, zjistíme, že je v ní jediný řádek, pro nějž $\text{prh}(A \Rightarrow B) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, a ten obsahuje $\text{prh}(A) = 0$.

Vyslovením této impl. tedy vyjadřuji své přesvědčení, že neplatí A , tj. „nevyřešíš tento matematický problém“.

Smysluplná (ryze) materiální implikace:

Pokud vyřešíš tento matematický problém, pak sním svůj klobouk.

Je jasné, co takovým výrokem chci říct. Pojd'me si to ale rozebrat. Co plyne z toho, že vyslovím tuto implikaci?

- Nelžu, jejím vyslovením tedy implikaci prohlašuji za pravdivou.
- Zdravý rozum přitom dá, že za žádných okolností nehodlám konzumovat svůj klobouk; závěr implikace je tedy nepravdivý.

Nahlédneme-li do tabulky pravdivostních hodnot implikace, zjistíme, že je v ní jediný řádek, pro nějž $\text{prh}(A \Rightarrow B) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, a ten obsahuje $\text{prh}(A) = 0$.

Vyslovením této impl. tedy vyjadřuji své přesvědčení, že neplatí A , tj. „nevyřešíš tento matematický problém“.

Smysluplná (ryze) materiální implikace:

Pokud vyřešíš tento matematický problém, pak sním svůj klobouk.

Je jasné, co takovým výrokiem chci říct. Pojd'me si to ale rozebrat. Co plyne z toho, že vyslovím tuto implikaci?

- Nelžu, jejím vyslovením tedy implikaci prohlašuji za pravdivou.
- Zdravý rozum přitom dá, že za žádných okolností nehodlám konzumovat svůj klobouk; závěr implikace je tedy nepravdivý.

Nahlédneme-li do tabulky pravdivostních hodnot implikace, zjistíme, že je v ní jediný řádek, pro nějž $\text{prh}(A \Rightarrow B) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, a ten obsahuje $\text{prh}(A) = 0$.

Vyslovením této impl. tedy vyjadřuji své přesvědčení, že neplatí A , tj. „nevyřešíš tento matematický problém“.

Smysluplná (ryze) materiální implikace:

Pokud vyřešíš tento matematický problém, pak sním svůj klobouk.

Je jasné, co takovým výrokiem chci říct. Pojd'me si to ale rozebrat. Co plyne z toho, že vyslovím tuto implikaci?

- Nelžu, jejím vyslovením tedy implikaci prohlašuji za pravdivou.
- Zdravý rozum přitom dá, že za žádných okolností nehodlám konzumovat svůj klobouk; závěr implikace je tedy nepravdivý.

Nahlédneme-li do tabulky pravdivostních hodnot implikace, zjistíme, že je v ní jediný řádek, pro nějž $\text{prh}(A \Rightarrow B) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, a ten obsahuje $\text{prh}(A) = 0$.

Vyslovením této impl. tedy vyjadřuji své přesvědčení, že neplatí A , tj. „nevyřešíš tento matematický problém“.

Smysluplná (ryze) materiální implikace:

Pokud vyřešíš tento matematický problém, pak sním svůj klobouk.

Je jasné, co takovým výrokiem chci říct. Pojd'me si to ale rozebrat. Co plyne z toho, že vyslovím tuto implikaci?

- Nelžu, jejím vyslovením tedy implikaci prohlašuji za pravdivou.
- Zdravý rozum přitom dá, že za žádných okolností nehodlám konzumovat svůj klobouk; závěr implikace je tedy nepravdivý.

Nahlédneme-li do tabulky pravdivostních hodnot implikace, zjistíme, že je v ní jediný řádek, pro nějž $\text{prh}(A \Rightarrow B) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, a ten obsahuje $\text{prh}(A) = 0$.

Vyslovením této impl. tedy vyjadřuji své přesvědčení, že neplatí A , tj. „nevyřešíš tento matematický problém“.

Smysluplná (ryze) materiální implikace:

Pokud vyřešíš tento matematický problém, pak sním svůj klobouk.

Je jasné, co takovým výrokiem chci říct. Pojdme si to ale rozebrat. Co plyne z toho, že vyslovím tuto implikaci?

- Nelžu, jejím vyslovením tedy implikaci prohlašuji za pravdivou.
- Zdravý rozum přitom dá, že za žádných okolností nehodlám konzumovat svůj klobouk; závěr implikace je tedy nepravdivý.

Nahlédneme-li do tabulky pravdivostních hodnot implikace, zjistíme, že je v ní jediný řádek, pro nějž $\text{prh}(A \Rightarrow B) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, a ten obsahuje $\text{prh}(A) = 0$.

Vyslovením této impl. tedy vyjadřuji své přesvědčení, že neplatí A , tj. „nevyřešíš tento matematický problém“.

Osnova

- 1 Co zhruba učíme
- 2 Co raději neučíme
- 3 Jiné potíže s \Rightarrow**
- 4 Implicitní obecný kvantifikátor

Záměna \Rightarrow a \Leftrightarrow : těžké dětství syna matematikova

Tatínek svému nezbednému synkovi vyslovil následující ultimátum:

Jestli nesníš oběd, nedostaneš zmrzlinu!

Asi tušíte, jak to dopadlo.

- Které ze sousedčinyých odpoledních úsudků jsou správné?
 - a Sousedka vidí synáčka bez zmrzliny a prohlásí:
„Koukám, že jsi dnes nesnědl oběd, ty darebáku!“
 - b Sousedka vidí synáčka se zmrzlinou a prohlásí:
„Vidím, že jsi dnes hezky jedl oběd, ty hodný hochu.“

Záměna \Rightarrow a \Leftrightarrow : těžké dětství syna matematikova

Tatínek svému nezbednému synkovi vyslovil následující ultimátum:

Jestli nesníš oběd, nedostaneš zmrzlinu!

Asi tušíte, jak to dopadlo. Synáček nesprávně předpokládal, že platí opačná (konverzní) implikace, a po obědě byl zklamán.

- Které ze sousedčinych odpoledních úsudků jsou správné?
 - a Sousedka vidí synáčka bez zmrzliny a prohlásí:
„Koukám, že jsi dnes nesnědl oběd, ty darebáku!“
 - b Sousedka vidí synáčka se zmrzlinou a prohlásí:
„Vidím, že jsi dnes hezky jedl oběd, ty hodný hochu.“

Záměna \Rightarrow a \Leftrightarrow : těžké dětství syna matematikova

Tatínek svému nezbednému synkovi vyslovil následující ultimátum:

Jestli nesníš oběd, nedostaneš zmrzlinu!

Asi tušíte, jak to dopadlo. Synáček nesprávně předpokládal, že platí opačná (konverzní) implikace, a po obědě byl zklamán.

- Které ze sousedčiných odpoledních úsudků jsou správné?
 - a Sousedka vidí synáčka bez zmrzliny a prohlásí:
„Koukám, že jsi dnes nesnědl oběd, ty darebáku!“
 - b Sousedka vidí synáčka se zmrzlinou a prohlásí:
„Vidím, že jsi dnes hezky jedl oběd, ty hodný hochu.“

Záměna \Rightarrow a \Leftrightarrow : těžké dětství syna matematikova

Tatínek svému nezbednému synkovi vyslovil následující ultimátum:

Jestli nesníš oběd, nedostaneš zmrzlinu!

Asi tušíte, jak to dopadlo. Synáček nesprávně předpokládal, že platí opačná (konverzní) implikace, a po obědě byl zklamán.

- Které ze sousedčiných odpoledních úsudků jsou správné?
 - a Sousedka vidí synáčka bez zmrzliny a prohlásí:
„Koukám, že jsi dnes nesnědl oběd, ty darebáku!“
 - b Sousedka vidí synáčka se zmrzlinou a prohlásí:
„Vidím, že jsi dnes hezky jedl oběd, ty hodný hochu.“

Co neumí někteří naši studenti koncem 1. semestru

1) Uvažujme následující (neformálně vyslovenou) implikaci:

Když prší, mám u sebe deštník.

Otázka: Tvrdím-li výše uvedené, co musí nastat, abych byl usvědčen ze lži, resp. z omylu?

2) Představme si, že jistý politik kandidující do PS před volbami vysloví následující slib:

Bude-li konjunktura, snížíme daně.

Předpokládejme, že tento politik volby vyhrál a stal se premiérem.

Otázka: Jaká situace by musela nastat, aby média mohla právem obvinít onoho politika z neplnění předvolebních slibů?

Existují studenti M. na MFF, kteří nedokáží tyto otázky správně zodpovědět, a to ani s velkým množstvím času na rozmyšlenou.

Co neumí někteří naši studenti koncem 1. semestru

1) Uvažujme následující (neformálně vyslovenou) implikaci:

Když prší, mám u sebe deštník.

Otázka: Tvrdím-li výše uvedené, co musí nastat, abych byl usvědčen ze lži, resp. z omylu?

2) Představme si, že jistý politik kandidující do PS před volbami vysloví následující slib:

Bude-li konjunktura, snížíme daně.

Předpokládejme, že tento politik volby vyhrál a stal se premiérem.

Otázka: Jaká situace by musela nastat, aby média mohla právem obvinít onoho politika z neplnění předvolebních slibů?

Existují studenti M. na MFF, kteří nedokáží tyto otázky správně zodpovědět, a to ani s velkým množstvím času na rozmyšlenou.

Co neumí někteří naši studenti koncem 1. semestru

1) Uvažujme následující (neformálně vyslovenou) implikaci:

Když prší, mám u sebe deštník.

Otázka: Tvrdím-li výše uvedené, co musí nastat, abych byl usvědčen ze lži, resp. z omylu?

2) Představme si, že jistý politik kandidující do PS před volbami vysloví následující slib:

Bude-li konjunktura, snížíme daně.

Předpokládejme, že tento politik volby vyhrál a stal se premiérem.

Otázka: Jaká situace by musela nastat, aby média mohla právem obvinít onoho politika z neplnění předvolebních slibů?

Existují studenti M. na MFF, kteří nedokáží tyto otázky správně zodpovědět, a to ani s velkým množstvím času na rozmyšlenou.

Co neumí někteří naši studenti koncem 1. semestru

1) Uvažujme následující (neformálně vyslovenou) implikaci:

Když prší, mám u sebe deštník.

Otázka: Tvrdím-li výše uvedené, co musí nastat, abych byl usvědčen ze lži, resp. z omylu?

2) Představme si, že jistý politik kandidující do PS před volbami vysloví následující slib:

Bude-li konjunktura, snížíme daně.

Předpokládejme, že tento politik volby vyhrál a stal se premiérem.

Otázka: Jaká situace by musela nastat, aby média mohla právem obvinít onoho politika z neplnění předvolebních slibů?

Existují studenti M. na MFF, kteří nedokáží tyto otázky správně zodpovědět, a to ani s velkým množstvím času na rozmyšlenou.

Co neumí někteří naši studenti koncem 1. semestru

1) Uvažujme následující (neformálně vyslovenou) implikaci:

Když prší, mám u sebe deštník.

Otázka: Tvrdím-li výše uvedené, co musí nastat, abych byl usvědčen ze lži, resp. z omylu?

2) Představme si, že jistý politik kandidující do PS před volbami vysloví následující slib:

Bude-li konjunktura, snížíme daně.

Předpokládejme, že tento politik volby vyhrál a stal se premiérem.

Otázka: Jaká situace by musela nastat, aby média mohla právem obvinít onoho politika z neplnění předvolebních slibů?

Existují studenti M. na MFF, kteří nedokáží tyto otázky správně zodpovědět, a to ani s velkým množstvím času na rozmyšlenou.

Konjugované výroky I

Uvažujme implikaci $A \Rightarrow B$, kde A, B jsou libovolné výroky. Víme, že $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ nesouvisí s $\text{prh}(B \Rightarrow A)$: jedna implikace může být pravdivá a druhá ne. Například pokud $\text{prh}(A) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, první implikace neplatí, zatímco druhá ano.

Na druhou stranu z tabulky pravdivostních hodnot snadno odvodíme, že

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Jinými slovy: pro libovolné výroky A, B je

$$\text{prh}(A \Rightarrow B) = \text{prh}(\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Konečně můžeme uvažovat ještě implikaci $\neg A \Rightarrow \neg B$. Ta je podle předchozího ekvivalentní s $B \Rightarrow A$, a tedy její pravdivost nesouvisí s pravdivostí $A \Rightarrow B$ (resp. s pravdivostí $\neg B \Rightarrow \neg A$).

Konjugované výroky I

Uvažujme implikaci $A \Rightarrow B$, kde A, B jsou libovolné výroky. Víme, že $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ nesouvisí s $\text{prh}(B \Rightarrow A)$: jedna implikace může být pravdivá a druhá ne. Například pokud $\text{prh}(A) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, první implikace neplatí, zatímco druhá ano.

Na druhou stranu z tabulky pravdivostních hodnot snadno odvodíme, že

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Jinými slovy: pro libovolné výroky A, B je

$$\text{prh}(A \Rightarrow B) = \text{prh}(\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Konečně můžeme uvažovat ještě implikaci $\neg A \Rightarrow \neg B$. Ta je podle předchozího ekvivalentní s $B \Rightarrow A$, a tedy její pravdivost nesouvisí s pravdivostí $A \Rightarrow B$ (resp. s pravdivostí $\neg B \Rightarrow \neg A$).

Konjugované výroky I

Uvažujme implikaci $A \Rightarrow B$, kde A, B jsou libovolné výroky. Víme, že $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ nesouvisí s $\text{prh}(B \Rightarrow A)$: jedna implikace může být pravdivá a druhá ne. Například pokud $\text{prh}(A) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, první implikace neplatí, zatímco druhá ano.

Na druhou stranu z tabulky pravdivostních hodnot snadno odvodíme, že

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Jinými slovy: pro libovolné výroky A, B je

$$\text{prh}(A \Rightarrow B) = \text{prh}(\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Konečně můžeme uvažovat ještě implikaci $\neg A \Rightarrow \neg B$. Ta je podle předchozího ekvivalentní s $B \Rightarrow A$, a tedy její pravdivost nesouvisí s pravdivostí $A \Rightarrow B$ (resp. s pravdivostí $\neg B \Rightarrow \neg A$).

Konjugované výroky I

Uvažujme implikaci $A \Rightarrow B$, kde A, B jsou libovolné výroky. Víme, že $\text{prh}(A \Rightarrow B)$ nesouvisí s $\text{prh}(B \Rightarrow A)$: jedna implikace může být pravdivá a druhá ne. Například pokud $\text{prh}(A) = 1$ a $\text{prh}(B) = 0$, první implikace neplatí, zatímco druhá ano.

Na druhou stranu z tabulky pravdivostních hodnot snadno odvodíme, že

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Jinými slovy: pro libovolné výroky A, B je

$$\text{prh}(A \Rightarrow B) = \text{prh}(\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Konečně můžeme uvažovat ještě implikaci $\neg A \Rightarrow \neg B$. Ta je podle předchozího ekvivalentní s $B \Rightarrow A$, a tedy její pravdivost nesouvisí s pravdivostí $A \Rightarrow B$ (resp. s pravdivostí $\neg B \Rightarrow \neg A$).

Konjugované výroky II

Celkem tedy 4 hlavní implikace vzniknou z výroků A , B a logických spojek \neg , \Rightarrow :

- 1 $A \Rightarrow B$ – základní tvar;
- 2 $B \Rightarrow A$ – konverzní tvar;
- 3 $\neg A \Rightarrow \neg B$ – inverzní tvar;
- 4 $\neg B \Rightarrow \neg A$ – kontrapozitivní tvar.

$$A \Rightarrow B$$

$$\neg A \Rightarrow \neg B$$

$$B \Rightarrow A$$

$$\neg B \Rightarrow \neg A$$

Přitom platí:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{a také}$$

$$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B).$$

Konjugované výroky II

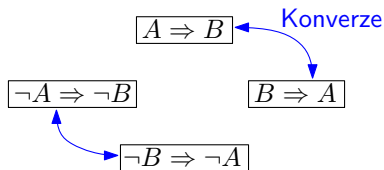
Celkem tedy 4 hlavní implikace vzniknou z výroků A , B a logických spojek \neg , \Rightarrow :

- 1 $A \Rightarrow B$ – základní tvar;
- 2 $B \Rightarrow A$ – konverzní tvar;
- 3 $\neg A \Rightarrow \neg B$ – inverzní tvar;
- 4 $\neg B \Rightarrow \neg A$ – kontrapozitivní tvar.

Přitom platí:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{a také}$$

$$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B).$$



Konjugované výroky II

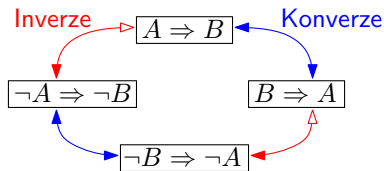
Celkem tedy 4 hlavní implikace vzniknou z výroků A , B a logických spojek \neg , \Rightarrow :

- 1 $A \Rightarrow B$ – základní tvar;
- 2 $B \Rightarrow A$ – konverzní tvar;
- 3 $\neg A \Rightarrow \neg B$ – inverzní tvar;
- 4 $\neg B \Rightarrow \neg A$ – kontrapozitivní tvar.

Přitom platí:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{a také}$$

$$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B).$$



Konjugované výroky II

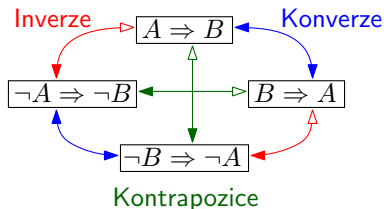
Celkem tedy 4 hlavní implikace vzniknou z výroků A , B a logických spojek \neg , \Rightarrow :

- 1 $A \Rightarrow B$ – základní tvar;
- 2 $B \Rightarrow A$ – konverzní tvar;
- 3 $\neg A \Rightarrow \neg B$ – inverzní tvar;
- 4 $\neg B \Rightarrow \neg A$ – kontrapozitivní tvar.

Přitom platí:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{a také}$$

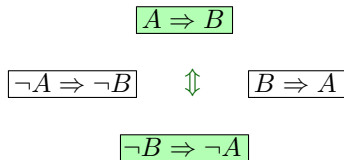
$$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B).$$



Konjugované výroky II

Celkem tedy 4 hlavní implikace vzniknou z výroků A , B a logických spojek \neg , \Rightarrow :

- 1 $A \Rightarrow B$ – základní tvar;
- 2 $B \Rightarrow A$ – konverzní tvar;
- 3 $\neg A \Rightarrow \neg B$ – inverzní tvar;
- 4 $\neg B \Rightarrow \neg A$ – kontrapozitivní tvar.



Přitom platí:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{a také}$$
$$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B).$$

Konjugované výroky II

Celkem tedy 4 hlavní implikace vzniknou z výroků A , B a logických spojek \neg , \Rightarrow :

- 1 $A \Rightarrow B$ – základní tvar;
- 2 $B \Rightarrow A$ – konverzní tvar;
- 3 $\neg A \Rightarrow \neg B$ – inverzní tvar;
- 4 $\neg B \Rightarrow \neg A$ – kontrapozitivní tvar.

Přitom platí:

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A) \quad \text{a také}$$

$$(B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B).$$

$$\boxed{A \Rightarrow B} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{B \Rightarrow A}$$
$$\boxed{\neg A \Rightarrow \neg B} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$$

O jistotě v nejistotě...

V srpnu jsem se od svého téměř dvouletého syna Izáka dozvěděl:

Dominik nemá rád polívku. \implies Izáček ji nebude jíst.

Doplňující informace.:

- 1 Dominik je Izáčkův kamarád.
- 2 Netušíme, jestli Dominik má, nebo nemá rád polívku.
- 3 Izáčkovy prohlášení bylo nicméně prokazatelně pravdivé.

Otázka A: Co z těchto informací plyne o průběhu oběda?

Otázka B: Lze rozhodnout, jestli nezbedný synek dostal zmrzlinu?

Otázka C: Pokud bychom doplnili (nepravdivý) předpoklad, že Izáček polívku snědl, dozvěděli bychom se něco o Dominikovi?

O jistotě v nejistotě...

V srpnu jsem se od svého téměř dvouletého syna Izáka dozvěděl:

Dominik nemá rád polívku. \implies Izáček ji nebude jíst.

Doplňující informace.:

- 1** Dominik je Izáčkův kamarád.
- 2 Netušíme, jestli Dominik má, nebo nemá rád polívku.
- 3 Izáčkovu prohlášení bylo nicméně prokazatelně pravdivé.

Otázka A: Co z těchto informací plyne o průběhu oběda?

Otázka B: Lze rozhodnout, jestli nezbedný synek dostal zmrzlinu?

Otázka C: Pokud bychom doplnili (nepravdivý) předpoklad, že Izáček polívku snědl, dozvěděli bychom se něco o Dominikovi?

O jistotě v nejistotě...

V srpnu jsem se od svého téměř dvouletého syna Izáka dozvěděl:

Dominik nemá rád polívku. \Rightarrow Izáček ji nebude jíst.

Doplňující informace.:

- 1** Dominik je Izáčkův kamarád.
- 2** Netušíme, jestli Dominik má, nebo nemá rád polívku.
- 3** Izáčkovy prohlášení bylo nicméně prokazatelně pravdivé.

Otázka A: Co z těchto informací plyne o průběhu oběda?

Otázka B: Lze rozhodnout, jestli nezbedný synek dostal zmrzlinu?

Otázka C: Pokud bychom doplnili (nepravdivý) předpoklad, že Izáček polívku snědl, dozvěděli bychom se něco o Dominikovi?

O jistotě v nejistotě...

V srpnu jsem se od svého téměř dvouletého syna Izáka dozvěděl:

Dominik nemá rád polívku. \Rightarrow Izáček ji nebude jíst.

Doplňující informace.:

- 1** Dominik je Izáčkův kamarád.
- 2** Netušíme, jestli Dominik má, nebo nemá rád polívku.
- 3** Izáčkovu prohlášení bylo nicméně prokazatelně pravdivé.

Otázka A: Co z těchto informací plyne o průběhu oběda?

Otázka B: Lze rozhodnout, jestli nezbedný synek dostal zmrzlinu?

Otázka C: Pokud bychom doplnili (nepravdivý) předpoklad, že Izáček polívku snědl, dozvěděli bychom se něco o Dominikovi?

O jistotě v nejistotě...

V srpnu jsem se od svého téměř dvouletého syna Izáka dozvěděl:

Dominik nemá rád polívku. \implies Izáček ji nebude jíst.

Doplňující informace.:

- 1** Dominik je Izáčkův kamarád.
- 2** Netušíme, jestli Dominik má, nebo nemá rád polívku.
- 3** Izáčkovu prohlášení bylo nicméně prokazatelně pravdivé.

Otázka A: Co z těchto informací plyne o průběhu oběda?

Otázka B: Lze rozhodnout, jestli nezbedný synek dostal zmrzlinu?

Otázka C: Pokud bychom doplnili (nepravdivý) předpoklad, že Izáček polívku snědl, dozvěděli bychom se něco o Dominikovi?

O jistotě v nejistotě...

V srpnu jsem se od svého téměř dvouletého syna Izáka dozvěděl:

Dominik nemá rád polívku. \implies Izáček ji nebude jíst.

Doplňující informace.:

- 1** Dominik je Izáčkův kamarád.
- 2** Netušíme, jestli Dominik má, nebo nemá rád polívku.
- 3** Izáčkovu prohlášení bylo nicméně prokazatelně pravdivé.

Otázka A: Co z těchto informací plyne o průběhu oběda?

Otázka B: Lze rozhodnout, jestli nezbedný synek dostal zmrzlinu?

Otázka C: Pokud bychom doplnili (nepravdivý) předpoklad, že Izáček polívku snědl, dozvěděli bychom se něco o Dominikovi?

O jistotě v nejistotě...

V srpnu jsem se od svého téměř dvouletého syna Izáka dozvěděl:

Dominik nemá rád polívku. \implies Izáček ji nebude jíst.

Doplňující informace.:

- 1** Dominik je Izáčkův kamarád.
- 2** Netušíme, jestli Dominik má, nebo nemá rád polívku.
- 3** Izáčkovu prohlášení bylo nicméně prokazatelně pravdivé.

Otázka A: Co z těchto informací plyne o průběhu oběda?

Otázka B: Lze rozhodnout, jestli nezbedný synek dostal zmrzlinu?

Otázka C: Pokud bychom doplnili (nepravdivý) předpoklad, že Izáček polívku snědl, dozvěděli bychom se něco o Dominikovi?

Osnova

- 1 Co zhruba učíme
- 2 Co raději neučíme
- 3 Jiné potíže s \Rightarrow
- 4 Implicitní obecný kvantifikátor

Motivační příklad

Uvažujme následující implikaci:

$$x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Otázka: Je to pravda, nebo není?

Pojďme se na tuto otázku podívat podrobně.

Motivační příklad

Uvažujme následující implikaci:

$$x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Otázka: Je to pravda, nebo není?

Pojďme se na tuto otázku podívat podrobně.

Motivační příklad

Uvažujme následující implikaci:

$$x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Otázka: Je to pravda, nebo není?

Pojďme se na tuto otázku podívat podrobně.

Výroková funkce – predikát

Označme následující vyjádření symbolem $P(n)$:

Přírozené číslo n je prvočíslo.

Jedná se o výrok? Pokud je Vaše odpověď ano, musíte věřit, že ona výpověď má určitou pravdivostní hodnotu.

Evidentně $\text{prh}(P(1)) = 0$, zatímco $\text{prh}(P(2)) = 1$, takže vidíme, že $P(n)$ není výrok, zatímco $P(1), P(2), P(3), P(4), \dots$ výroky jsou.

Pro konkrétní hodnoty proměnné n tedy dostáváme konkrétní výroky $P(n)$. Je proto namísto $P(n)$ nazývat *výrokovou funkcí* (tj. *predikátem*).

Výroková funkce – predikát

Označme následující vyjádření symbolem $P(n)$:

Přírozené číslo n je prvočíslo.

Jedná se o výrok? Pokud je Vaše odpověď ano, musíte věřit, že ona výpověď má určitou pravdivostní hodnotu.

Evidentně $\text{prh}(P(1)) = 0$, zatímco $\text{prh}(P(2)) = 1$, takže vidíme, že $P(n)$ není výrok, zatímco $P(1), P(2), P(3), P(4), \dots$ výroky jsou.

Pro konkrétní hodnoty proměnné n tedy dostáváme konkrétní výroky $P(n)$. Je proto namísto $P(n)$ nazývat *výrokovou funkcí* (tj. *predikátem*).

Výroková funkce – predikát

Označme následující vyjádření symbolem $P(n)$:

Přírozené číslo n je prvočíslo.

Jedná se o výrok? Pokud je Vaše odpověď ano, musíte věřit, že ona výpověď má určitou pravdivostní hodnotu.

Evidentně $\text{prh}(P(1)) = 0$, zatímco $\text{prh}(P(2)) = 1$, takže vidíme, že $P(n)$ není výrok, zatímco $P(1), P(2), P(3), P(4), \dots$ výroky jsou.

Pro konkrétní hodnoty proměnné n tedy dostáváme konkrétní výroky $P(n)$. Je proto namísto $P(n)$ nazývat *výrokovou funkcí* (tj. *predikátem*).

Výroková funkce – predikát

Označme následující vyjádření symbolem $P(n)$:

Přírozené číslo n je prvočíslo.

Jedná se o výrok? Pokud je Vaše odpověď ano, musíte věřit, že ona výpověď má určitou pravdivostní hodnotu.

Evidentně $\text{prh}(P(1)) = 0$, zatímco $\text{prh}(P(2)) = 1$, takže vidíme, že $P(n)$ není výrok, zatímco $P(1), P(2), P(3), P(4), \dots$ výroky jsou.

Pro konkrétní hodnoty proměnné n tedy dostáváme konkrétní výroky $P(n)$. Je proto namísto $P(n)$ nazývat *výrokovou funkcí* (tj. *predikátem*).

Místo dosazení konkrétní hodnoty za n ...

Existuje ještě jeden základní způsob, jak z $P(n)$ udělat výrok: přidat kvantifikaci proměnné n .

Můžeme tak dostat výroky

$$\forall n: P(n), \quad \text{resp.} \quad \exists n: P(n).$$

Otázka: Jaká je pravdivostní hodnota těchto výroků?

Proměnná n ve výrazu $P(n)$ se nazývá *volná* proměnná (zhruba řečeno). Přidáním „ $\forall n$ “ nebo „ $\exists n$ “ z ní učiníme proměnnou *vázanou* a z celého výrazu výrok.

Místo dosazení konkrétní hodnoty za n ...

Existuje ještě jeden základní způsob, jak z $P(n)$ udělat výrok: přidat kvantifikaci proměnné n .

Můžeme tak dostat výroky

$$\forall n: P(n), \quad \text{resp.} \quad \exists n: P(n).$$

Otázka: Jaká je pravdivostní hodnota těchto výroků?

Proměnná n ve výrazu $P(n)$ se nazývá *volná* proměnná (zhruba řečeno). Přidáním „ $\forall n$ “ nebo „ $\exists n$ “ z ní učiníme proměnnou *vázanou* a z celého výrazu výrok.

Místo dosazení konkrétní hodnoty za n ...

Existuje ještě jeden základní způsob, jak z $P(n)$ udělat výrok: přidat kvantifikaci proměnné n .

Můžeme tak dostat výroky

$$\forall n: P(n), \quad \text{resp.} \quad \exists n: P(n).$$

Otázka: Jaká je pravdivostní hodnota těchto výroků?

Proměnná n ve výrazu $P(n)$ se nazývá *volná* proměnná (zhruba řečeno). Přidáním „ $\forall n$ “ nebo „ $\exists n$ “ z ní učiníme proměnnou *vázanou* a z celého výrazu výrok.

Místo dosazení konkrétní hodnoty za n ...

Existuje ještě jeden základní způsob, jak z $P(n)$ udělat výrok: přidat kvantifikaci proměnné n .

Můžeme tak dostat výroky

$$\forall n: P(n), \quad \text{resp.} \quad \exists n: P(n).$$

Otázka: Jaká je pravdivostní hodnota těchto výroků?

Proměnná n ve výrazu $P(n)$ se nazývá *volná* proměnná (zhruba řečeno). Přidáním „ $\forall n$ “ nebo „ $\exists n$ “ z ní učiníme proměnnou *vázanou* a z celého výrazu výrok.

Implikace s proměnnou

Podívejme se nyní znovu na implikaci:

$$x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

to jest řečeno slovy:

Jestliže x je racionální číslo, pak x je reálné číslo.

Otázka: Jedná se o výrok? (Lhostejno, který zápis uvažujeme.)

Implikace s proměnnou

Podívejme se nyní znovu na implikaci:

$$x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

to jest řečeno slovy:

Jestliže x je racionální číslo, pak x je reálné číslo.

Otázka: Jedná se o výrok? (Lhostejno, který zápis uvažujeme.)

Implikace s proměnnou

Podívejme se nyní znovu na implikaci:

$$x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

to jest řečeno slovy:

Jestliže x je racionální číslo, pak x je reálné číslo.

Otázka: Jedná se o výrok? (Lhostejno, který zápis uvažujeme.)

Odpověď: Striktně vzato ne; jde o výrokovou funkci s volnou proměnnou x .

Implikace s proměnnou

Podívejme se nyní znovu na implikaci:

$$x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

to jest řečeno slovy:

Jestliže x je racionální číslo, pak x je reálné číslo.

Otázka: Jedná se o výrok? (Lhostejno, který zápis uvažujeme.)

Odpověď: Striktně vzato ne; jde o výrokovou funkci s volnou proměnnou x . Zároveň však máme velmi silnou tendenci zápis (1) chápat jako výrok (a to pravdivý). Jak to, když neznáme x ?

„Samozřejmý kvantifikátor“ v implikaci $[x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}]$

Ve skutečnosti tuto implikaci chápeme jako výrok

$$\forall x: x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}. \quad (1kv)$$

V tomto smyslu je tedy pravdivá, zatímco opačnou implikaci

$$x \in \mathbb{R} \implies x \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

vnímáme jako nepravdivou (víme, že ex. iracionální čísla).

Všimněme si ovšem, že výrok

$$\exists x: x \in \mathbb{R} \implies x \in \mathbb{Q} \quad (2kv)$$

je pravdivý (dosad' $x = 1$ nebo $x = i$), ačkoliv (2) chápeme jako nepravdivou. Automaticky tedy doplňujeme skutečně jen „ \forall “

„Samozřejmý kvantifikátor“ v implikaci $[x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}]$

Ve skutečnosti tuto implikaci chápeme jako výrok

$$\forall x: x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}. \quad (1kv)$$

V tomto smyslu je tedy pravdivá, zatímco opačnou implikaci

$$x \in \mathbb{R} \implies x \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

vnímáme jako nepravdivou (víme, že ex. iracionální čísla).

Všimněme si ovšem, že výrok

$$\exists x: x \in \mathbb{R} \implies x \in \mathbb{Q} \quad (2kv)$$

je pravdivý (dosad' $x = 1$ nebo $x = i$), ačkoliv (2) chápeme jako nepravdivou. Automaticky tedy doplňujeme skutečně jen „ \forall “

„Samozřejmý kvantifikátor“ v implikaci $[x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{R}]$

Ve skutečnosti tuto implikaci chápeme jako výrok

$$\forall x: x \in \mathbb{Q} \implies x \in \mathbb{R}. \quad (1kv)$$

V tomto smyslu je tedy pravdivá, zatímco opačnou implikaci

$$x \in \mathbb{R} \implies x \in \mathbb{Q} \quad (2)$$

vnímáme jako nepravdivou (víme, že ex. iracionální čísla).

Všimněme si ovšem, že výrok

$$\exists x: x \in \mathbb{R} \implies x \in \mathbb{Q} \quad (2kv)$$

je pravdivý (dosad' $x = 1$ nebo $x = i$), ačkoliv (2) chápeme jako nepravdivou. Automaticky tedy doplňujeme skutečně jen „ \forall “.

Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je středa.

Zkusme si implikaci z nadpisu přeformulovat:

Jestliže x je pondělí, pak den po x je středa.

Tuto implikaci vnímáme jako nepravdivou, protože po doplnění „ $\forall x$ “ vznikne nepravdivý výrok.

Na druhou stranu: Dnes je čtvrtek, takže antecedent neplatí, a implikace proto platí. Šest dní v týdnu je tato implikace pravdivá.

Naše chápání pravdivosti uvedeného výroku tedy záleží na tom, jestli si v duchu doplníme, nebo nedoplníme obecný kvantifikátor.

Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je středa.

Zkusme si implikaci z nadpisu přeformulovat:

Jestliže x je pondělí, pak den po x je středa.

Tuto implikaci vnímáme jako nepravdivou, protože po doplnění „ $\forall x$ “ vznikne nepravdivý výrok.

Na druhou stranu: Dnes je čtvrtek, takže antecedent neplatí, a implikace proto platí. Šest dní v týdnu je tato implikace pravdivá.

Naše chápání pravdivosti uvedeného výroku tedy záleží na tom, jestli si v duchu doplníme, nebo nedoplníme obecný kvantifikátor.

Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je středa.

Zkusme si implikaci z nadpisu přeformulovat:

Jestliže x je pondělí, pak den po x je středa.

Tuto implikaci vnímáme jako nepravdivou, protože po doplnění „ $\forall x$ “ vznikne nepravdivý výrok.

Na druhou stranu: Dnes je čtvrtek, takže antecedent neplatí, a implikace proto platí. Šest dní v týdnu je tato implikace pravdivá.

Naše chápání pravdivosti uvedeného výroku tedy záleží na tom, jestli si v duchu doplníme, nebo nedoplníme obecný kvantifikátor.

Dnes je pátek, zítra je sobota.

Uvažujme následující implikace a porovnejme je s tabulkou vpravo.

- i** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je středa.
- ii Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je pátek.
- iii Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je středa.
- iv Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je pátek.

Všimněme si, že pouze 4. implikace platí každý den.

Otázka: Kolik dní v týdnu jsou pravdivé následující?

- Jestliže dnes je víkend, pak zítra je čtvrtek.
- Jestliže dnes je všední den, pak zítra je Čt.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dnes je pátek, zítra je sobota.

Uvažujme následující implikace a porovnejme je s tabulkou vpravo.

- i** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je středa.
- ii** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je pátek.
- iii** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je středa.
- iv** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je pátek.

Všimněme si, že pouze 4. implikace platí každý den.

Otázka: Kolik dní v týdnu jsou pravdivé následující?

- Jestliže dnes je víkend, pak zítra je čtvrtek.
- Jestliže dnes je všední den, pak zítra je Čt.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dnes je pátek, zítra je sobota.

Uvažujme následující implikace a porovnejme je s tabulkou vpravo.

- i** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je středa.
- ii** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je pátek.
- iii** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je středa.
- iv** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je pátek.

Všimněme si, že pouze 4. implikace platí každý den.

Otázka: Kolik dní v týdnu jsou pravdivé následující?

- Jestliže dnes je víkend, pak zítra je čtvrtek.
- Jestliže dnes je všední den, pak zítra je Čt.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dnes je pátek, zítra je sobota.

Uvažujme následující implikace a porovnejme je s tabulkou vpravo.

- i** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je středa.
- ii** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je pátek.
- iii** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je středa.
- iv** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je pátek.

Všimněme si, že pouze 4. implikace platí každý den.

Otázka: Kolik dní v týdnu jsou pravdivé následující?

- Jestliže dnes je víkend, pak zítra je čtvrtek.
- Jestliže dnes je všední den, pak zítra je Čt.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dnes je pátek, zítra je sobota.

Uvažujme následující implikace a porovnejme je s tabulkou vpravo.

- i** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je středa.
- ii** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je pátek.
- iii** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je středa.
- iv** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je pátek.

Všimněme si, že pouze 4. implikace platí každý den.

Otázka: Kolik dní v týdnu jsou pravdivé následující?

- Jestliže dnes je víkend, pak zítra je čtvrtek.
- Jestliže dnes je všední den, pak zítra je Čt.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Dnes je pátek, zítra je sobota.

Uvažujme následující implikace a porovnejme je s tabulkou vpravo.

- i** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je středa.
- ii** Jestliže dnes je pondělí, pak zítra je pátek.
- iii** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je středa.
- iv** Jestliže dnes je čtvrtek, pak zítra je pátek.

Všimněme si, že pouze 4. implikace platí každý den.

Otázka: Kolik dní v týdnu jsou pravdivé následující?

- Jestliže dnes je víkend, pak zítra je čtvrtek.
- Jestliže dnes je všední den, pak zítra je Čt.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

S kvantifikátorem VS. bez něj

Uvažujme následující dvě implikace:

$$(I) \quad x > 0 \Rightarrow x^2 > 0; \quad (II) \quad x^2 > 0 \Rightarrow x > 0.$$

Otázky: Jak se mění jejich pravdivostní hodnota dosazením $x = 5$, $x = -5$, po doplnění existenčního a po doplnění obecného kvantifikátoru?

S kvantifikátorem VS. bez něj

Uvažujme následující dvě implikace:

$$(I) \quad x > 0 \Rightarrow x^2 > 0; \quad (II) \quad x^2 > 0 \Rightarrow x > 0.$$

Otázky: Jak se mění jejich pravdivostní hodnota dosazením $x = 5$, $x = -5$, po doplnění existenčního a po doplnění obecného kvantifikátoru?

Při každé návštěvě Měsíce jsem si dal pivo: čistá pravda.

Děkuji za pozornost!