

Jak postavit matematické poznání na neotřesitelné základy

Martin Rmoutil

Matematicko-fyzikální fakulta UK

GVP, 5. dubna 2022

Osnova

- 1 **Počty – Aritmetika**
- 2 Pevnější základy
- 3 Teorie množin
- 4 Závěr: Logika – Absolutní jistota?

Počtení operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A , B) krav“ – dostanu $A + B$
- Počítadlo: žetony *zastupují* krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly *zastupující* jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Počtení operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A , B) krav“ – dostanu $A + B$
- Počítadlo: žetony *zastupují* krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly *zastupující* jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Počtení operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A , B) krav“ – dostanu $A + B$
- Počítadlo: žetony **zastupují** krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly **zastupující** jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Počtení operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A , B) krav“ – dostanu $A + B$
- Počítadlo: žetony **zastupují** krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly **zastupující** jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Počtení operace

Co je sčítání?

- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A , B) krav“ – dostanu $A + B$
- Počítadlo: žetony **zastupují** krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly **zastupující** jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

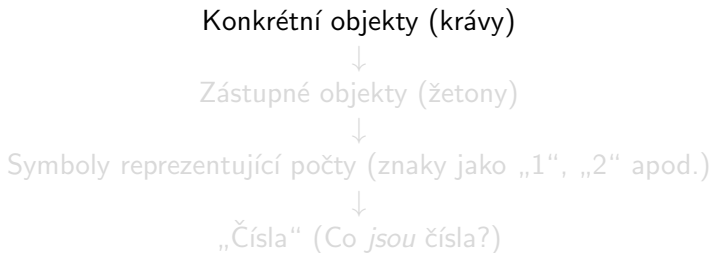
Počtení operace

Co je sčítání?

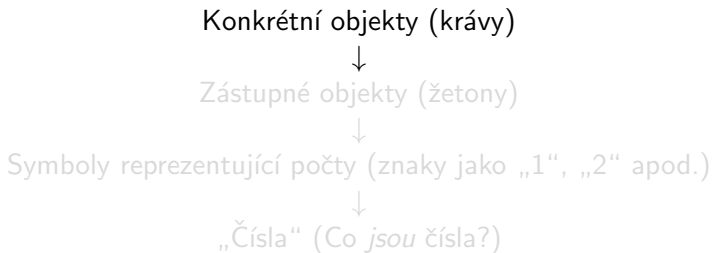
- Fyzicky: „sesypu dvě stáda (A , B) krav“ – dostanu $A + B$
- Počítadlo: žetony **zastupují** krávy, míry úrody atd.
- Symbolicky: místo žetonů symboly **zastupující** jejich *počty*.
- Transformujeme symboly pomocí pevných postupů (algoritmů).

Další operace: násobení, dělení, odmocňování...

Číslo



Číslo



Číslo

Konkrétní objekty (krávy)



Zástupné objekty (žetony)



Symbolsy reprezentující počty (znaky jako „1“, „2“ apod.)



„Číslo“ (Co *jsou* čísla?)

Číslo

Konkrétní objekty (krávy)



Zástupné objekty (žetony)

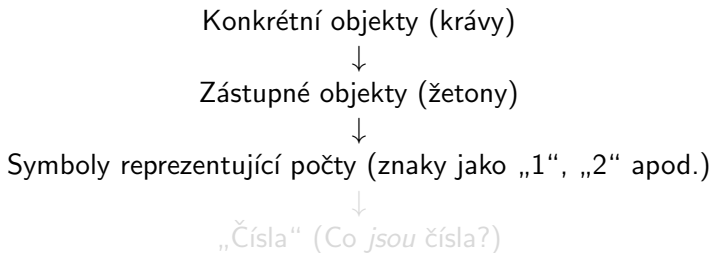


Symbole reprezentující počty (znaky jako „1“, „2“ apod.)

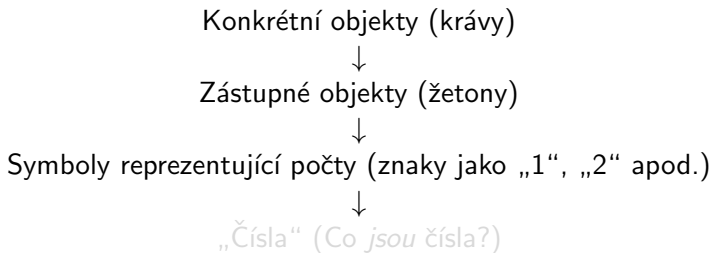


„Číslo“ (Co *jsou* čísla?)

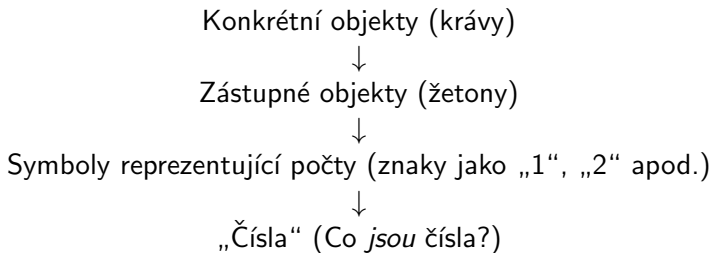
Číslo



Číslo



Číslo



Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. $|||||$ zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: $IX = 9$
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. $|||||$ zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: $IX = 9$
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. $|||||$ zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: $IX = 9$
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. $|||||$ zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: $IX = 9$
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

Zápis „čísla“ – počtu nějakých věcí

- Máme pouze jeden symbol „|“: např. $|||||$ zastupuje 6.
- Máme více symbolů zastupujících různé počty: např. římské číslovky (I,V,X,L,C,D,M).
- odčítací zápis u římských číslovek: $IX = 9$
- poziční systém bez nuly
- poziční systém s nulou

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: **algoritmu**.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dal **správný výsledek**.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné **odpovídajícím** způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „**seděly**“.
- A tedy **seděly** i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:

předstírání výpočtu (např. odčítání) → podvod.

Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: **algoritmu**.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dal **správný výsledek**.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné **odpovídajícím** způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „**seděly**“.
- A tedy **seděly** i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:

předstírání výpočtu (např. odčítání) → podvod.

Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: **algoritmu**.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dal **správný výsledek**.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné **odpovídajícím** způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „**seděly**“.
- A tedy **seděly** i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:

předstírání výpočtu (např. odčítání) → podvod.

Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: **algoritmu**.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dal **správný výsledek**.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné **odpovídajícím** způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „**seděly**“.
- A tedy **seděly** i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:

předstírání výpočtu (např. odčítání) → podvod.

Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: **algoritmu**.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dal **správný výsledek**.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné **odpovídajícím** způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „**seděly**“.
- A tedy **seděly** i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:

předstírání výpočtu (např. odčítání) → podvod.

Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: **algoritmu**.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dal **správný výsledek**.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné **odpovídajícím** způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „**seděly**“.
- A tedy **seděly** i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:

předstírání výpočtu (např. odčítání) → podvod.

Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – v abstrakci zpět na úroveň krav

- Držíme se předem vymyšleného postupu: **algoritmu**.
- Algoritmus byl vymyšlen tak, aby dal **správný výsledek**.
- Tj. aby transformoval jedny symboly v jiné **odpovídajícím** způsobem.
- Tj. aby příslušné počty žetonů „**seděly**“.
- A tedy **seděly** i počty krav reprezentovaných žetony.

Dnes těžko představitelný důsledek:

předstírání výpočtu (např. odčítání) → podvod.

Vlastně se to děje – jen na mnohem vyšší úrovni složitosti.

„počítat správně“ – jak vypadají ony šikovné algoritmy

Záleží na **způsobu reprezentace** čísel pomocí symbolů.

- Pokud používáme jeden symbol, je to „snadné“:

$$||| + | = |||| \quad \text{nebo} \quad |||| + ||||| = |||||$$

- Římské číslice jsou o něco lepší. Ale co složitější operace?

$$MMCMXCIX + DCCLXIX = MMMDCCLXVIII$$

- Operace v pozičním systému: Písemné sčítání, násobení atd. – věříme funkčnosti. Teorii vymyslel někdo před námi.

„počítat správně“ – jak vypadají ony šikovné algoritmy

Záleží na **způsobu reprezentace** čísel pomocí symbolů.

- Pokud používáme jeden symbol, je to „snadné“:

$$||| + | = |||| \quad \text{nebo} \quad |||| + ||||| = |||||.$$

- Římské číslice jsou o něco lepší. Ale co složitější operace?

$$MMCMXCIX + DCCLXIX = MMMDCCLXVIII$$

- Operace v pozičním systému: Písemné sčítání, násobení atd. – věříme funkčnosti. Teorii vymyslel někdo před námi.

„počítat správně“ – jak vypadají ony šikovné algoritmy

Záleží na **způsobu reprezentace** čísel pomocí symbolů.

- Pokud používáme jeden symbol, je to „snadné“:

$$||| + | = |||| \quad \text{nebo} \quad |||| + ||||| = |||||$$

- Římské číslice jsou o něco lepší. Ale co složitější operace?

$$MMCMXCIX + DCCLXIX = MMMDCCLXVIII$$

- Operace v pozičním systému: Písemné sčítání, násobení atd. – věříme funkčnosti. Teorii vymyslel někdo před námi.

„počítat správně“ – jak vypadají ony šikovné algoritmy

Záleží na **způsobu reprezentace** čísel pomocí symbolů.

- Pokud používáme jeden symbol, je to „snadné“:

$$||| + | = |||| \quad \text{nebo} \quad |||| + ||||| = |||||$$

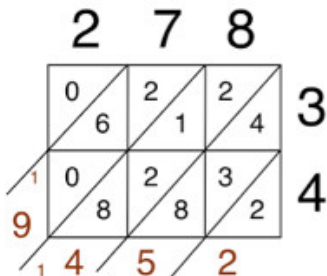
- Římské číslice jsou o něco lepší. Ale co složitější operace?

$$MMCMXCIX + DCCLXIX = MMMDCCLXVIII$$

- Operace v pozičním systému: Písemné sčítání, násobení atd. – věříme funkčnosti. Teorii vymyslel někdo před námi.

Násobení jinak

Jsou i jiné algoritmy, u kterých automaticky přemýšlíme, proč by měly fungovat.



$$278 \times 34 = 9,452$$

Osnova

- 1 Počty – Aritmetika
- 2 Pevnější základy
- 3 Teorie množin
- 4 Závěr: Logika – Absolutní jistota?

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- **Přirozená čísla** „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě **racionální čísla**: poměry celých čísel.
- Objev **iracionálního čísla** způsobil 1. Krizi matematiky.
Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- **Přirozená čísla** „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě **racionální čísla**: poměry celých čísel.
- Objev **iracionálního čísla** způsobil 1. Krizi matematiky.
Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- **Přirozená čísla** „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě **racionální čísla**: poměry celých čísel.
- Objev **iracionálního čísla** způsobil 1. Krizi matematiky.
Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- **Přirozená čísla** „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě **racionální čísla**: poměry celých čísel.
- Objev **iracionálního čísla** způsobil 1. Krizi matematiky.
Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
 - Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- **Přirozená čísla** „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě **racionální čísla**: poměry celých čísel.
- Objev **iracionálního čísla** způsobil 1. Krizi matematiky.
Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Iracionální číslo: 1. Krize matematiky

Vraťme se k otázce podstaty „čísel“. Co jsou čísla?

- **Přirozená čísla** „chápeme“ dnes všichni.
- Jak byste je ale definovali? Co je to 5?
- Staří Řekové znali ještě **racionální čísla**: poměry celých čísel.
- Objev **iracionálního čísla** způsobil 1. Krizi matematiky.
Hippasos z Metapontu (cca 530–450 př.n.l.)
- Náhle zas nebylo jasné, co čísla *jsou*, jak se dají vyjádřit.

Otázku pojetí záporných čísel (a imaginárních) ponecháme stranou.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil **infinitesimální počet** – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s **nekonečnem**. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{dx}{dy}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil **infinitesimální počet** – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s nekonečnem. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{dx}{dy}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil **infinitesimální počet** – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s **nekonečnem**. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{dx}{dy}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil **infinitesimální počet** – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s **nekonečnem**. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{dx}{dy}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil **infinitesimální počet** – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s **nekonečnem**. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{dx}{dy}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Nekonečno: 2. Krize matematiky

- Porozumění iracionálním číslům – algebra + analýza.
- V 17. stol. pokročil **infinitesimální počet** – „matematická analýza“.
- Dává odpovědi na související otázky pomocí manipulací s **nekonečnem**. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\frac{dx}{dy}$ atd.)
- Šlo o poněkud mystické umění a vedlo to k chybám – přelom 18. a 19. stol.: 2. Krize matematiky.
- Bylo potřeba postavit MA na pevné základy.

Mimochodem: stále nevíme, co *jsou* čísla a už se nám kupí další problémy.

Lepší základy

- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – pojem **limity**, komplexní analýza.
- Bernard Bolzano (1781–1848) – Paradoxy nekonečna, B. věta.
- Karl Weierstrass (1815–1897) – aritmetizace analýzy, monstrum.

Analýza před Cauchym byla založená na intuici; analýza po Weierstrassovi byla precizní a dokazovala mat. věty z definic.

Bolzano přemýšlel o nekonečnu. Pracoval v ústraní (v Praze). Ani tito pánové „nevěděli“, co jsou reálná čísla.

Lepší základy

- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – pojem **limity**, komplexní analýza.
- Bernard Bolzano (1781–1848) – Paradoxy nekonečna, B. věta.
- Karl Weierstrass (1815-1897) – aritmetizace analýzy, monstrum.

Analýza před Cauchym byla založená na intuici; analýza po Weierstrassovi byla precizní a dokazovala mat. věty z definic.

Bolzano přemýšlel o nekonečnu. Pracoval v ústraní (v Praze).
Ani tito pánové „nevěděli“, co jsou reálná čísla.

Lepší základy

- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – pojem **limity**, komplexní analýza.
- Bernard Bolzano (1781–1848) – Paradoxy nekonečna, B. věta.
- Karl Weierstrass (1815–1897) – aritmetizace analýzy, monstrum.

Analýza před Cauchym byla založená na intuici; analýza po Weierstrassovi byla precizní a dokazovala mat. věty z definic.

Bolzano přemýšlel o nekonečnu. Pracoval v ústraní (v Praze). Ani tito pánové „nevěděli“, co jsou reálná čísla.

Lepší základy

- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – pojem **limity**, komplexní analýza.
- Bernard Bolzano (1781–1848) – Paradoxy nekonečna, B. věta.
- Karl Weierstrass (1815–1897) – aritmetizace analýzy, monstrum.

Analýza před Cauchym byla založená na intuici; analýza po Weierstrassovi byla precizní a dokazovala mat. věty z definic.

Bolzano přemýšlel o nekonečnu. Pracoval v ústraní (v Praze).
Ani tito pánové „nevěděli“, co jsou reálná čísla.

Lepší základy

- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – pojem **limity**, komplexní analýza.
- Bernard Bolzano (1781–1848) – Paradoxy nekonečna, B. věta.
- Karl Weierstrass (1815–1897) – aritmetizace analýzy, monstrum.

Analýza před Cauchym byla založená na intuici; analýza po Weierstrassovi byla precizní a dokazovala mat. věty z definic.

Bolzano přemýšlel o nekonečnu. Pracoval v ústraní (v Praze).
Ani tito pánové „nevěděli“, co jsou reálná čísla.

Lepší základy

- Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) – pojem **limity**, komplexní analýza.
- Bernard Bolzano (1781–1848) – Paradoxy nekonečna, B. věta.
- Karl Weierstrass (1815–1897) – aritmetizace analýzy, monstrum.

Analýza před Cauchym byla založená na intuici; analýza po Weierstrassovi byla precizní a dokazovala mat. věty z definic.

Bolzano přemýšlel o nekonečnu. Pracoval v ústraní (v Praze).
Ani tito pánové „nevěděli“, co jsou reálná čísla.

Osnova

- 1 Počty – Aritmetika
- 2 Pevnější základy
- 3 Teorie množin**
- 4 Závěr: Logika – Absolutní jistota?

Paradoxy nekonečna

- Bolzano přemýšlel o existenci **aktuálního nekonečna**.
- Jako jeden z prvních obhajoval jeho existenci a potřebnost.
- Teologický důkaz.
- Zároveň se neoprostil od Eukleidova principu:
- *Celek je větší než část.*

Otázka: Je všech přirozených čísel „větší počet“ než čísel sudých?

Paradoxy nekonečna

- Bolzano přemýšlel o existenci **aktuálního nekonečna**.
- Jako jeden z prvních obhajoval jeho existenci a potřebnost.
- Teologický důkaz.
- Zároveň se neoprostil od Eukleidova principu:
- *Celek je větší než část.*

Otázka: Je všech přirozených čísel „větší počet“ než čísel sudých?

Paradoxy nekonečna

- Bolzano přemýšlel o existenci **aktuálního nekonečna**.
- Jako jeden z prvních obhajoval jeho existenci a potřebnost.
- Teologický důkaz.
 - Zároveň se neoprostil od Eukleidova principu:
 - *Celek je větší než část.*

Otázka: Je všech přirozených čísel „větší počet“ než čísel sudých?

Paradoxy nekonečna

- Bolzano přemýšlel o existenci **aktuálního nekonečna**.
- Jako jeden z prvních obhajoval jeho existenci a potřebnost.
- Teologický důkaz.
- Zároveň se neoprostil od Eukleidova principu:
 - *Celek je větší než část.*

Otázka: Je všech přirozených čísel „větší počet“ než čísel sudých?

Paradoxy nekonečna

- Bolzano přemýšlel o existenci **aktuálního nekonečna**.
- Jako jeden z prvních obhajoval jeho existenci a potřebnost.
- Teologický důkaz.
- Zároveň se neoprostil od Eukleidova principu:
- *Celek je větší než část.*

Otázka: Je všech přirozených čísel „větší počet“ než čísel sudých?

Paradoxy nekonečna

- Bolzano přemýšlel o existenci **aktuálního nekonečna**.
- Jako jeden z prvních obhajoval jeho existenci a potřebnost.
- Teologický důkaz.
- Zároveň se neoprostil od Eukleidova principu:
- *Celek je větší než část.*

Otázka: Je všech přirozených čísel „větší počet“ než čísel sudých?

Paradoxy nekonečna

- Bolzano přemýšlel o existenci **aktuálního nekonečna**.
- Jako jeden z prvních obhajoval jeho existenci a potřebnost.
- Teologický důkaz.
- Zároveň se neoprostil od Eukleidova principu:
- *Celek je větší než část.*

Otázka: Je všech přirozených čísel „větší počet“ než čísel sudých?

Odpověď (Bolzano): ANO. (Nebo otázka vůbec nedává smysl.)

Paradoxy nekonečna

- Bolzano přemýšlel o existenci **aktuálního nekonečna**.
- Jako jeden z prvních obhajoval jeho existenci a potřebnost.
- Teologický důkaz.
- Zároveň se neoprostil od Eukleidova principu:
- *Celek je větší než část.*

Otázka: Je všech přirozených čísel „větší počet“ než čísel sudých?

Odpověď (Bolzano): ANO. (Nebo otázka vůbec nedává smysl.)

Odpověď (Georg Cantor): NE. (Otázka dává smysl!)

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel **teorie množin**.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o **mohutnost** množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* \Rightarrow Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel **teorie množin**.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o **mohutnost** množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* \Rightarrow Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel **teorie množin**.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o **mohutnost** množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* \Rightarrow Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel **teorie množin**.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o **mohutnost** množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* \Rightarrow Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel **teorie množin**.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o **mohutnost** množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* \Rightarrow Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel **teorie množin**.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o **mohutnost** množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* \Rightarrow Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel **teorie množin**.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o **mohutnost** množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* \Rightarrow Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Základní teorie – konečně definice čísla

Georg Cantor (1845–1918) – zakladatel **teorie množin**.

- Studoval jisté jemné problémy v MA o jistých *množinách* reálných čísel.
- Začal se zajímat o **mohutnost** množin.
- Šel o krok za Bolzana – a protrhl hráz.
- *Reálných čísel je víc než racionálních!* \Rightarrow Různá nekonečna!
- Existenční důkaz existence transcendentních čísel.
- Postupně začal (zcela bez pomoci) budovat TM.
- V rámci TM modeloval ostatní mat. obory...
- ... včetně aritmetiky. Mj. definoval čísla a početní operace.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M .

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M .

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M .

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M .

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M .

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Cantorova teorie množin

Definice

Množinou rozumíme každé srhnutí M určitých rozlišitelných předmětů našeho nazírání nebo myšlení v jeden celek; tyto předměty se nazývají prvky množiny M .

- A a B mají stejný počet prvků: existuje bijekce.
- Třídy ekvivalence podle počtu prvků: čísla.
- Definice operací: např. $[A] \cdot [B] = [A \times B]$ apod.
- Jiná definice: $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$ atd.
- Racionální čísla: zlomky: dvojice celých čísel.
- Reálná čísla: Richard Dedekind (1831–1916) – řezy.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost*: pouze množiny a relace \in .
- *Důkazová síla*: ukázala zkušenost.
- *Přehlednost*: máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost*: množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra*: „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost*: pouze množiny a relace \in .
- *Důkazová síla*: ukázala zkušenost.
- *Přehlednost*: máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost*: množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra*: „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost*: pouze množiny a relace \in .
- *Důkazová síla*: ukázala zkušenost.
- *Přehlednost*: máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost*: množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra*: „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost*: pouze množiny a relace \in .
- *Důkazová síla*: ukázala zkušenost.
- *Přehlednost*: máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost*: množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra*: „Tak jednoduchá teorie je jistě konzistentní.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost*: pouze množiny a relace \in .
- *Důkazová síla*: ukázala zkušenost.
- *Přehlednost*: máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost*: množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra*: „Tak jednoduchá teorie je jistě **konzistentní**.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Proč TM?!

Jaké má TM výhody, že stojí za to takto složitě definovat čísla?

- *Konceptuální jednoduchost*: pouze množiny a relace \in .
- *Důkazová síla*: ukázala zkušenost.
- *Přehlednost*: máme jednu základní teorii, z níž vychází vše ostatní. Vše tedy se vším souvisí a je navzájem „slučitelné“.
- *Intuitivnost*: množina je snadno pochopitelný pojem. Naproti tomu třeba mat. analýza, jakožto samostatná disciplína, stojí na mnoha komplikovaných pojmech (např. funkce – co to je?).
- *Víra*: „Tak jednoduchá teorie je jistě **konzistentní**.“

Víme-li, co jsou přesně reálná čísla, lze napsat zcela přesný důkaz (např.) Bolzanovy věty. Pochybnosti mizí.

Russell: 3. Krize matematiky \Rightarrow *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
 - *Russellův paradox*: $A = \{B : B \notin B\}$
 - Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat *Naivní teorie množin*.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky \Rightarrow *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
- *Russellův paradox*: $A = \{B : B \notin B\}$
- Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat *Naivní teorie množin*.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky \Rightarrow *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
 - *Russellův paradox*: $A = \{B : B \notin B\}$
 - Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat *Naivní teorie množin*.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky \Rightarrow *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
 - *Russellův paradox*: $A = \{B : B \notin B\}$
 - Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat *Naivní teorie množin*.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky \Rightarrow *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
 - *Russellův paradox*: $A = \{B: B \notin B\}$
 - Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat *Naivní teorie množin*.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky \Rightarrow *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
 - *Russellův paradox*: $A = \{B: B \notin B\}$
 - Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat *Naivní teorie množin*.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky \Rightarrow *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
 - *Russellův paradox*: $A = \{B : B \notin B\}$
 - Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat **Naivní teorie množin**.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Russell: 3. Krize matematiky \Rightarrow *Axiomatická TM*

- Cantorova teorie byla nejprve (cca 1872-1890) odmítána.
- Na přelomu století postupně přijímána.
- Matematici se začali spoléhat na přítomnost „jednotící teorie“.
- Roku 1903 ale Bertrand Russell (1872-1970) objevil spor v TM:
 - *Russellův paradox*: $A = \{B : B \notin B\}$
 - Analogie ze života: *Paradox holiče*.

Cantorova teorie v původní verzi tedy obsahovala spor – jinak řečeno *nebyla konzistentní*. Později se jí kvůli tomu začalo říkat **Naivní teorie množin**.

Cantorova definice množiny byla příliš obecná (a zároveň neuspokojivá – kruhem).

Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M.“
- Formalismus: matematika je **formální** systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát **interpretaci**, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): „*Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.*“ „*Wir müssen wissen — wir werden wissen!*“



Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M.“
- Formalismus: matematika je **formální** systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát **interpretaci**, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): „*Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.*“ „*Wir müssen wissen — wir werden wissen!*“



Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M.“
- Formalismus: matematika je **formální** systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát **interpretaci**, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): „*Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.*“ „*Wir müssen wissen — wir werden wissen!*“



Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M.“
- Formalismus: matematika je **formální** systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát **interpretaci**, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): „Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.“ „Wir müssen wissen — wir werden wissen!“



Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M.“
- Formalismus: matematika je **formální** systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát **interpretaci**, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): „Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.“ „Wir müssen wissen — wir werden wissen!“



Pokusy o záchranu: Logicismus, formalismus

- Logicismus: snaha chápat TM jako součást logiky. Zahájil Gottlob Frege, později Russell + Whitehead s *Principia Mathematica*.
- David Hilbert (1862-1943). Uznával TM.
- Zformuloval 23 tzv. Hilbertových problémů. Později tzv. *Hilbertův program* – přesné požadavky na „pevné základy M.“
- Formalismus: matematika je **formální** systém, hra se symboly bez významu. Lze jí dát **interpretaci**, která ovšem stojí mimo matematiku.
- Axiomatická teorie: *množinu* nedefinujeme, jen popíšeme její vlastnosti.

Hilbert (1926): „*Nikdo nás nebude moci vyhnat z ráje, který pro nás vytvořil Cantor.*“ „*Wir müssen wissen — wir werden wissen!*“

Osnova

- 1 Počty – Aritmetika
- 2 Pevnější základy
- 3 Teorie množin
- 4 Závěr: Logika – Absolutní jistota?

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Kurt Gödel (1906–1978) – největší logik

Věta (1. Věta o neúplnosti)

Každá rozumná teorie obsahující aritmetiku přirozených čísel obsahuje pravdivá tvrzení, která nejsou dokazatelná.

Věta (2. Věta o neúplnosti)

Jedno z těchto tvrzení je tvrzení bezespornosti této teorie. Jinak řečeno: teorie neumí dokázat svou vlastní bezespornost.

Tím skončil sen o pevném základě. Aktuální axiomatická teorie je nicméně uspokojivá. Všechny známé antinomie obchází a funguje dobře (je „užitečná“). Jen se musíme smířit s tím, že důvody pro pěstování matematiky jsou prozaičtější než hledání absolutní pravdy...

Děkuji za pozornost!

