

# Matematika je věda o ...

## Síla abstrakce v příběhu

Martin Rmoutil

Matematicko-fyzikální fakulta UK

Praha, 2. listopadu 2020



EVROPSKÁ UNIE  
Evropské strukturální a investiční fondy  
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



# Osnova

1 Abstrakce

2 Mosty v Královci

3 Závěr

# „Abstrakce“: Co to je?

## Definice *abstrakce* (Akademický slovník cizích slov)

- myšlenkový proces odlučující odlišnosti a zvláštnosti a zjišťující obecné, podstatné vlastnosti a vztahy; forma poznání na tom založená
- pojem jako výsledek tohoto procesu
- něco neskutečného, neživotného, od skutečnosti vzdáleného, neexistujícího
- ...

# „Abstrakce“: Co to je?

## Definice *abstrakce* (Akademický slovník cizích slov)

- myšlenkový proces odlučující odlišnosti a zvláštnosti a zjišťující obecné, podstatné vlastnosti a vztahy; forma poznání na tom založená
- pojem jako výsledek tohoto procesu
- něco neskutečného, neživotného, od skutečnosti vzdáleného, neexistujícího
- ...

# „Abstrakce“: Co to je?

## Definice *abstrakce* (Akademický slovník cizích slov)

- myšlenkový proces odlučující odlišnosti a zvláštnosti a zjišťující obecné, podstatné vlastnosti a vztahy; forma poznání na tom založená
- pojem jako výsledek tohoto procesu
- něco neskutečného, neživotného, od skutečnosti vzdáleného, neexistujícího
- ...

# „Abstrakce“: Co to je?

## Definice *abstrakce* (Akademický slovník cizích slov)

- myšlenkový proces **odlučující odlišnosti a zvláštnosti a zjišťující obecné, podstatné vlastnosti** a vztahy; forma poznání na tom založená
- pojem jako výsledek tohoto procesu
- něco neskutečného, neživotného, od skutečnosti vzdáleného, neexistujícího
- ...

# „Abstrakce“: Co to je?

## Definice *abstrakce* (Akademický slovník cizích slov)

- myšlenkový proces **odlučující odlišnosti a zvláštnosti a zjišťující obecné, podstatné vlastnosti** a vztahy; forma poznání na tom založená
- pojem jako výsledek tohoto procesu
- něco neskutečného, neživotného, od skutečnosti vzdáleného, neexistujícího
- . . .

## Abstrakce

**Abstrakce** (z lat. *abs-trahere*, odtáhnout, odvléci, oddělit) ve **filozofii** označuje buď důležitý moment **procesu poznání** při přechodu od **smyslového** k **racionálnímu** poznání, nebo jako hotový výsledek tohoto procesu. Proces abstrakce spočívá obecně v tom, že existuje řada **analytických** aktů **myšlení**, jimiž je zpracováván konkrétní smyslový materiál a při nichž se odhlíží od určitých **znaků, vlastností a vztahů** daného předmětu. Jiné znaky, vlastnosti a vztahy jsou naopak vyčleňovány jako **podstatné** a současně nabývají variabilní charakter prostřednictvím znaků nepodstatných.

Výsledkem procesu abstrakce, který je těsně spjat se zobecněním, jsou pojmy, které odrážejí podstatu předmětů. **Antonymem** abstraktního je „konkrétní“.

# „Abstrakce“: Co to je?

## Definice *abstrakce* (Akademický slovník cizích slov)

- myšlenkový proces **odlučující odlišnosti a zvláštnosti a zjišťující obecné, podstatné vlastnosti** a vztahy; forma poznání na tom založená
- pojem jako výsledek tohoto procesu
- něco neskutečného, neživotného, od skutečnosti vzdáleného, neexistujícího
- . . .

## Abstrakce

**Abstrakce** (z lat. *abs-trahere*, odtáhnout, odvléci, oddělit) ve **filozofii** označuje buď důležitý moment **procesu poznání** při přechodu od **smyslového** k **racionálnímu** poznání, nebo jako hotový výsledek tohoto procesu. Proces abstrakce spočívá obecně v tom, že existuje řada **analytických** aktů **myšlení**, jimiž je zpracováván konkrétní smyslový materiál a při nichž se **odhlíží od určitých znaků, vlastností a vztahů** daného předmětu. Jiné znaky, vlastnosti a vztahy jsou naopak vyčleňovány jako **podstatné** a současně nabývají variabilní charakter prostřednictvím znaků nepodstatných.

Výsledkem procesu abstrakce, který je těsně spjat se zobecněním, jsou pojmy, které odrážejí podstatu předmětů. **Antonymem** abstraktního je „konkrétní“.



# „Abstrakce“: Co to je?

## Definice *abstrakce* (Akademický slovník cizích slov)

- myšlenkový proces **odlučující odlišnosti a zvláštnosti a zjišťující obecné, podstatné vlastnosti** a vztahy; forma poznání na tom založená
- pojem jako výsledek tohoto procesu
- něco neskutečného, neživotného, od skutečnosti vzdáleného, neexistujícího
- . . .

## Abstrakce

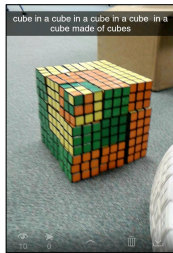
**Abstrakce** (z lat. *abs-trahere*, odtáhnout, odvléci, oddělit) ve **filozofii** označuje buď důležitý moment **procesu poznání** při přechodu od **smyslového** k **racionálnímu** poznání, nebo jako hotový výsledek tohoto procesu. Proces abstrakce spočívá obecně v tom, že existuje řada **analytických** aktů **myšlení**, jimiž je zpracováván konkrétní smyslový materiál a při nichž se **odhlíží od určitých znaků, vlastností a vztahů** daného předmětu. **Jiné znaky, vlastnosti a vztahy jsou naopak vyčleňovány jako podstatné** a současně nabývají variabilní charakter prostřednictvím znaků nepodstatných.

Výsledkem procesu abstrakce, který je těsně spjat se zobecněním, jsou pojmy, které odrážejí podstatu předmětů. **Antonymem** abstraktního je „konkrétní“.

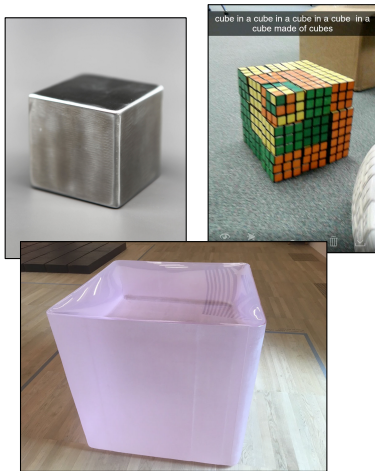
## Konkrétní příklad abstrakce



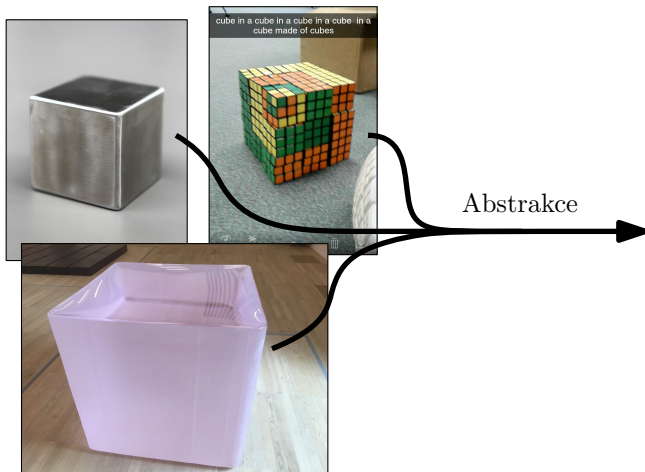
# Konkrétní příklad abstrakce



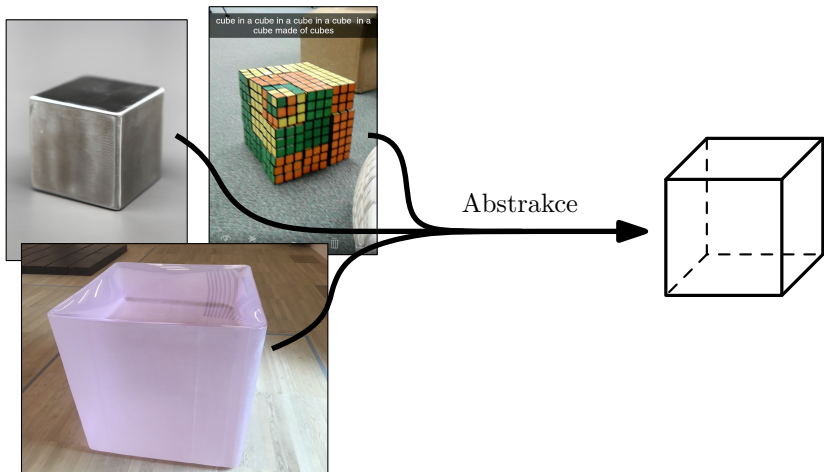
# Konkrétní příklad abstrakce



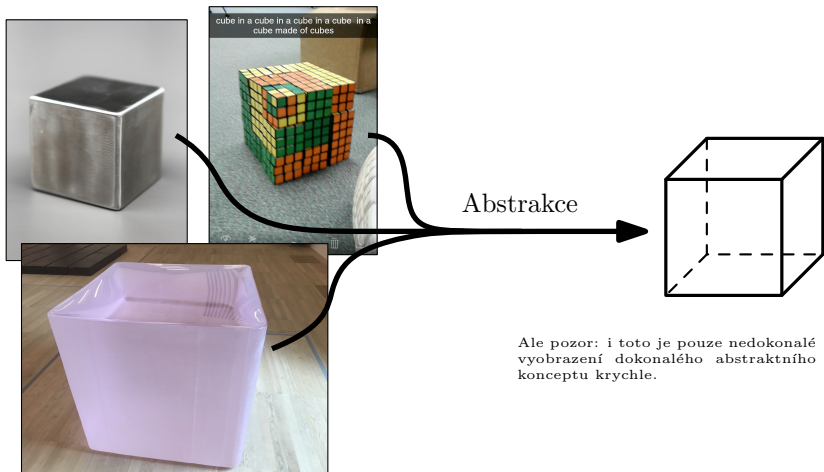
# Konkrétní příklad abstrakce



# Konkrétní příklad abstrakce



# Konkrétní příklad abstrakce

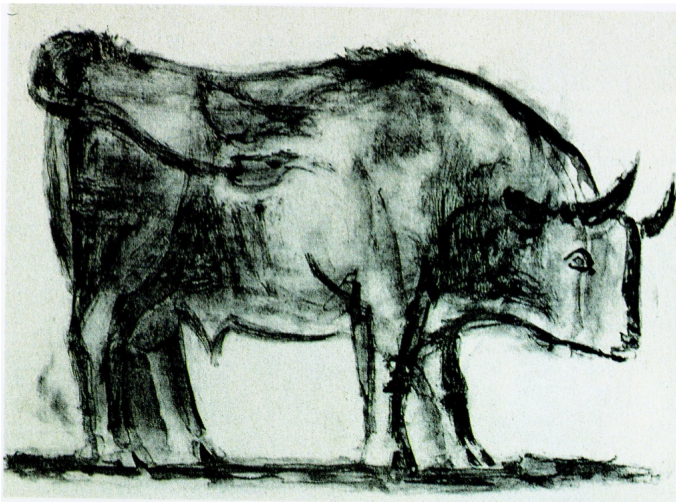


# *Pink Tons* - 4514 kg - Tate Modern, Londýn

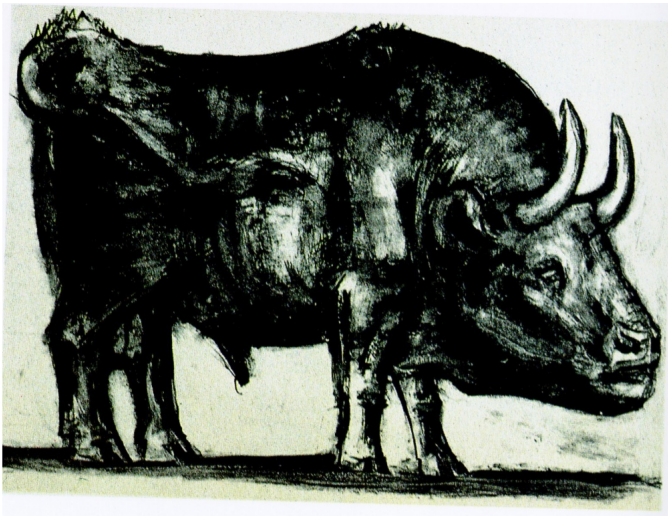




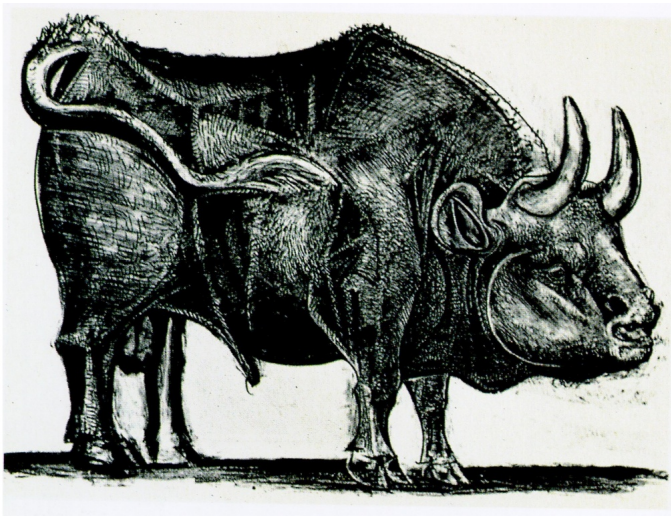
# Postupně abstrahovat...



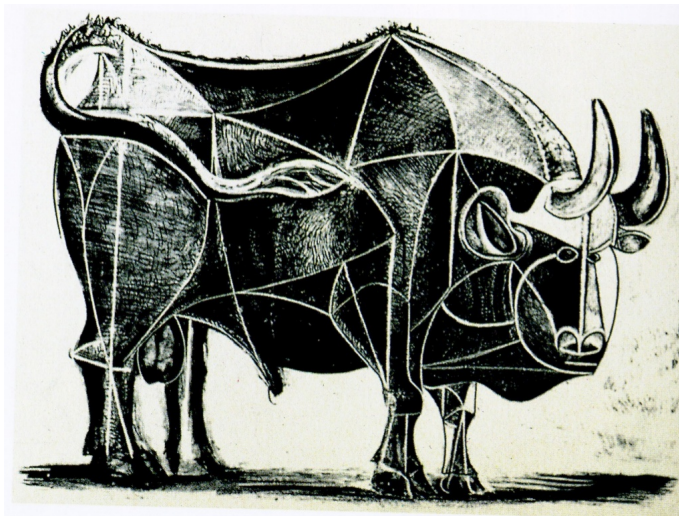
# Postupně abstrahovat...



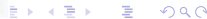
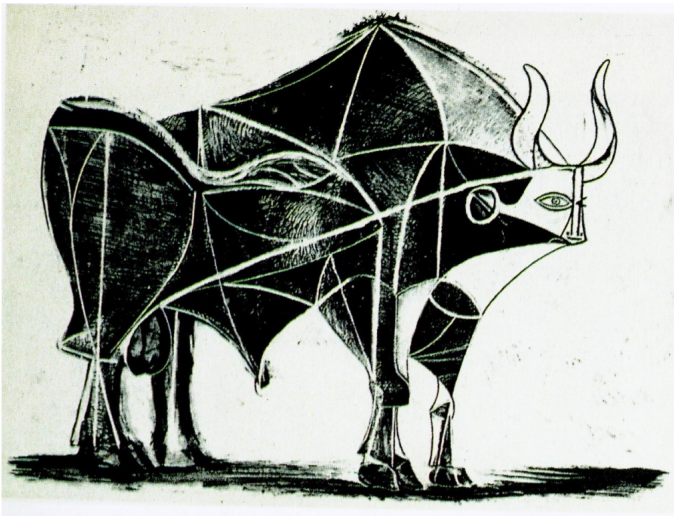
# Postupně abstrahovat...



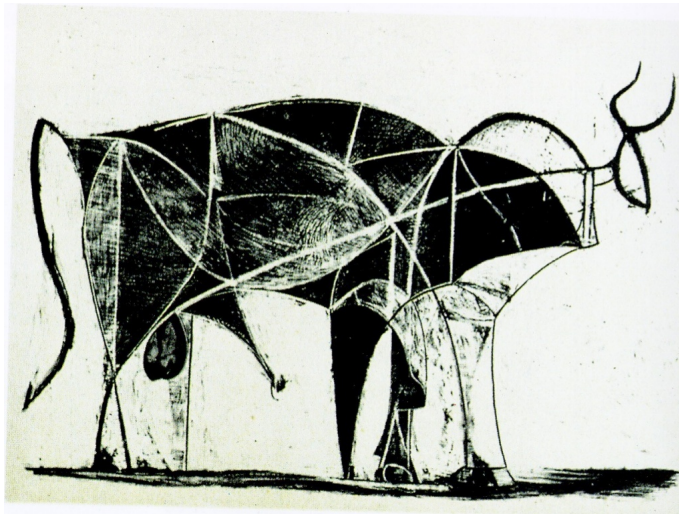
# Postupně abstrahovat...



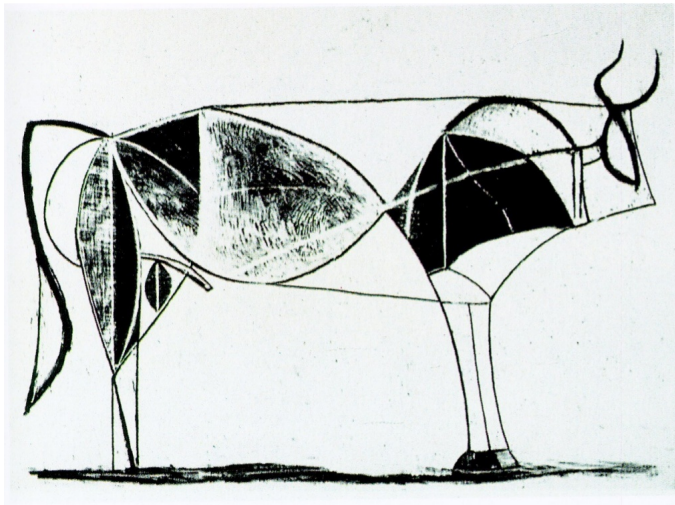
# Postupně abstrahovat...



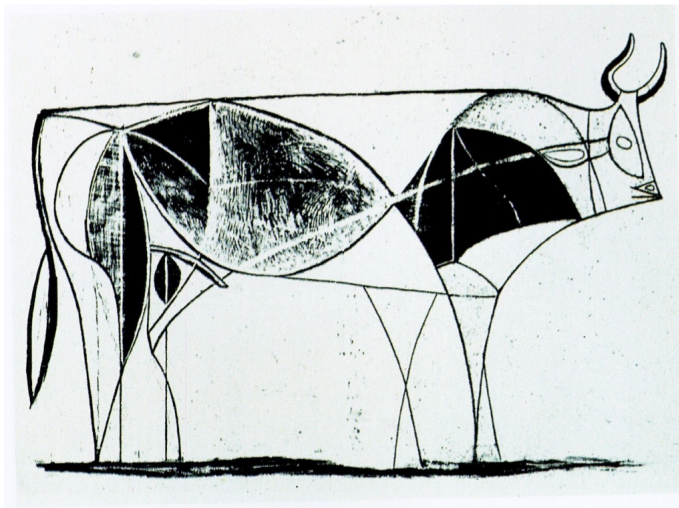
# Postupně abstrahovat...



# Postupně abstrahovat...

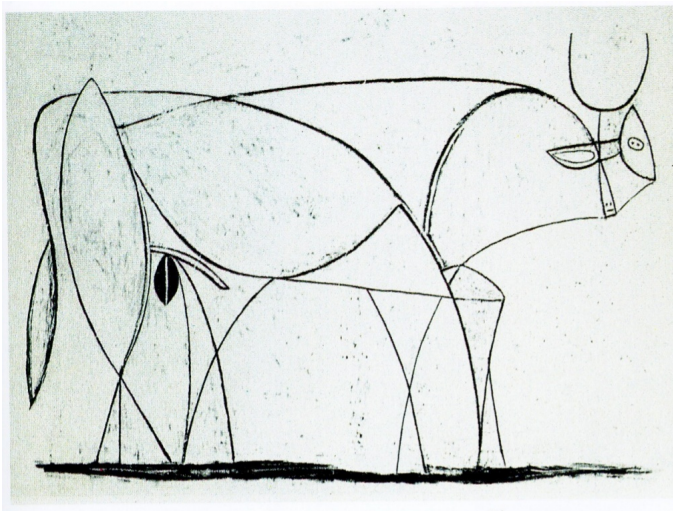


# Postupně abstrahovat...

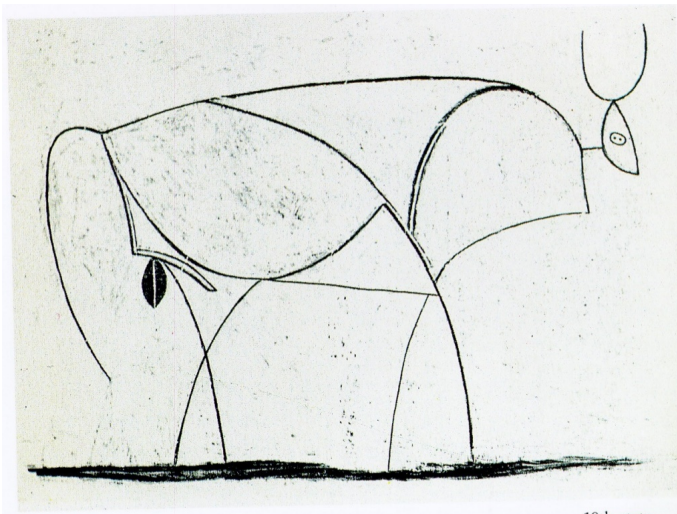




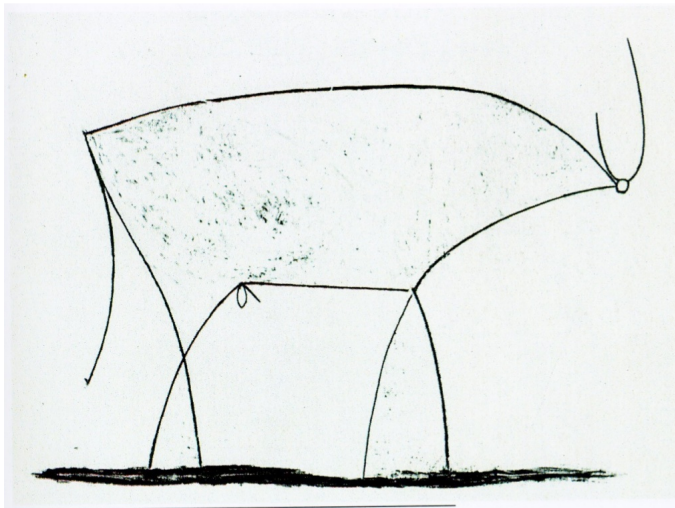
# Postupně abstrahovat...



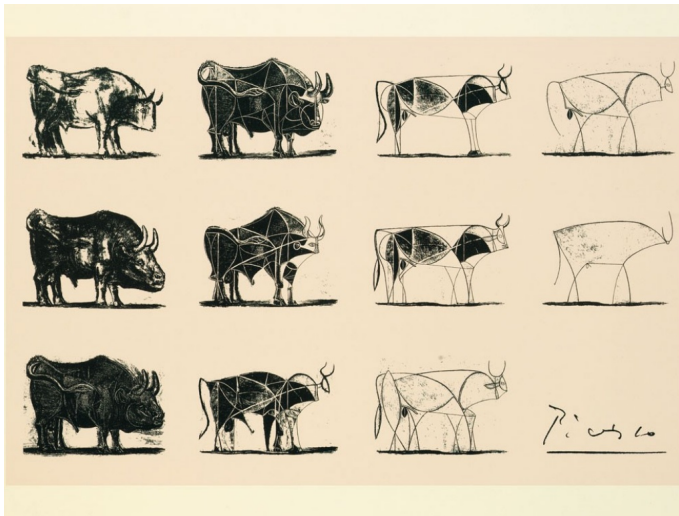
# Postupně abstrahovat...



# Postupně abstrahovat...



# Postupně abstrahovat...



# Přirozená čísla

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

## Dva způsoby vnímání

- **Kardinální** čísla: počet.  
Dmitrij Šostakovič složil **15** symfonií.
- **Ordinální** čísla: pořadí.  
Jeho **5.** symfonie je moje nejoblíbenější.

## Příklad

- Je rok **2020**.
- Od narození DSCH uplynulo **114** let.

# Přirozená čísla

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

## Dva způsoby vnímání

- **Kardinální** čísla: počet.  
Dmitrij Šostakovič složil **15** symfonií.
- **Ordinální** čísla: pořadí.  
Jeho **5.** symfonie je moje nejoblíbenější.



## Příklad

- Je rok **2020**.
- Od narození DSCH uplynulo **114** let.

# Přirozená čísla

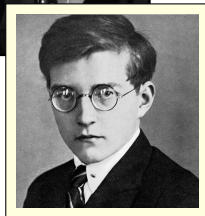
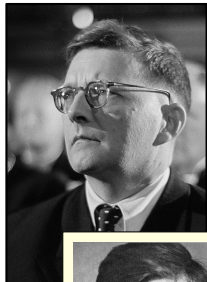
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

## Dva způsoby vnímání

- **Kardinální** čísla: počet.  
Dmitrij Šostakovič složil **15** symfonií.
- **Ordinální** čísla: pořadí.  
Jeho **5.** symfonie je moje nejoblíbenější.

## Příklad

- Je rok **2020**.
- Od narození DSCH uplynulo **114** let.



# Přirozená čísla

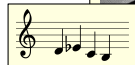
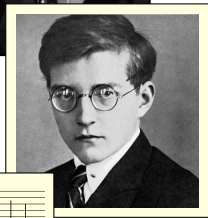
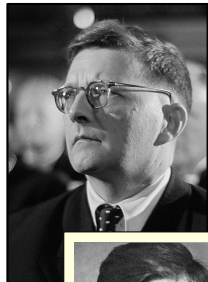
$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

## Dva způsoby vnímání

- **Kardinální** čísla: počet.  
Dmitrij Šostakovič složil **15** symfonií.
- **Ordinální** čísla: pořadí.  
Jeho **5.** symfonie je moje nejoblíbenější.

## Příklad

- Je rok **2020**.
- Od narození DSCH uplynulo **114** let.

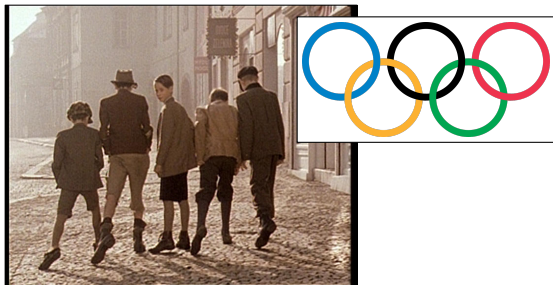




# Abstraktní kardinalita



# Abstraktní kardinalita



# Abstraktní kardinalita



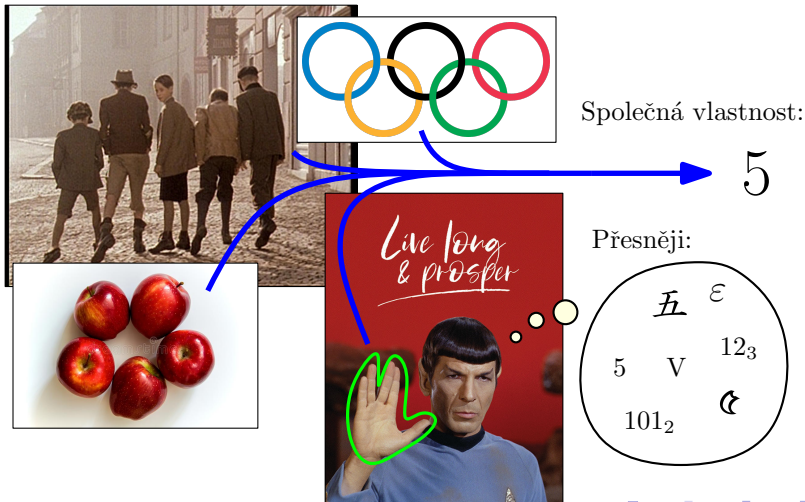
# Abstraktní kardinalita



# Abstraktní kardinalita



# Abstraktní kardinalita



## Stručná historie M. ve stupních abstrakce

- |   |                                       |
|---|---------------------------------------|
| (i) $\mathbb{N}$ (+ kupecké počty)        | (xii) algebra                         |
| (ii) geometrie (Egypt)                    | (xiii) $\mathbb{Z}$ (záporná čísla)   |
| (iii) číslo 0                             | (xiv) $\mathbb{C}$ (imaginární čísla) |
| (iv) řecká geometrie                      | (xv) funkce                           |
| (v) matematický důkaz                     | (xvi) kalkulus                        |
| (vi) $\mathbb{Q}^+$ ; ( $\sqrt{2} = ?!$ ) | (xvii) definice $\mathbb{R}$          |
| (vii) axiomatický systém                  | (xviii) fraktální geometrie           |
| (viii) výroková logika                    | (xix) teorie množin                   |
| (ix) poziční systém                       | (xx) logika                           |
| (x) kartézské souřadnice                  | (xxi) topologie                       |
| (xi) proměnná $x$                         | (xxii) univerzální algebra ... atd.   |

# Osnova

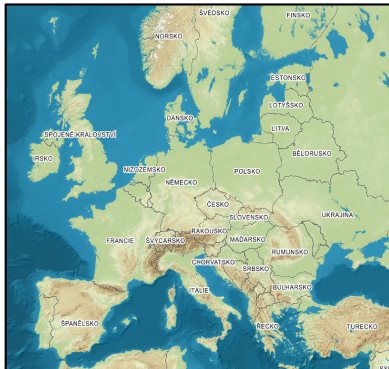
1 Abstrakce

2 Mosty v Královci

3 Závěr



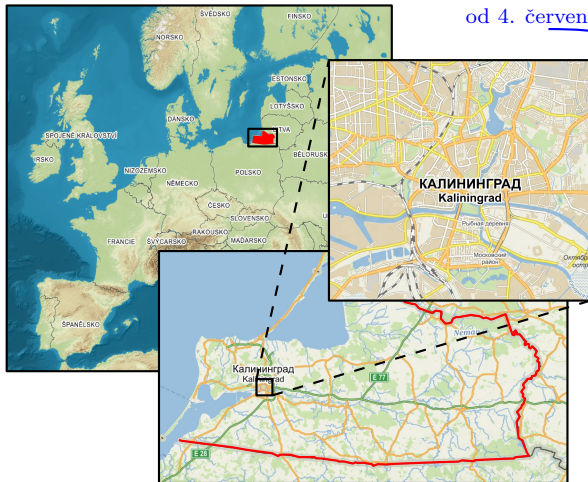
Královec = Königsberg  $\xrightarrow{1945}$  Kaliningrad



Královec = Königsberg  $\xrightarrow{1945}$  Kaliningrad



# Královec = Königsberg $\xrightarrow{1945}$ Kaliningrad



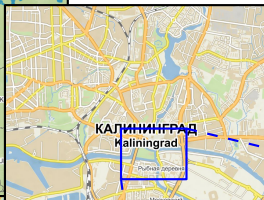
od 4. července 1946

Kaliningrad  
Rusko  
(od 9.4.1945)  
475 056 obyv.  
(2018)

# Královec = Königsberg $\xrightarrow{1945}$ Kaliningrad



Zal. 1255 na počest  
Přemysla Otakara II.



Kaliningrad  
Rusko  
Königsberg  
Prusko  
18. stol.  
cca 50-60 tis.



# Zadání problému

## Situace v Královci

- Na řece protékající centrem města jsou 2 ostrovy.
- **Ostrovy** a **břehy** jsou navzájem propojeny celkem **7 mosty**.
- Přesnou situaci uvidíme za okamžik na mapě.

*Obyvatelé města měli rádi nedělní procházky po těchto mostech a hledali „optimální“ procházku.*

## Problém

Najděte procházku středem města Královce, při které každý ze sedmi mostů přejdeme právě jednou.

# Zadání problému

## Situace v Královci

- Na řece protékající centrem města jsou 2 ostrovy.
- **Ostrovy** a **břehy** jsou navzájem propojeny celkem **7 mosty**.
- Přesnou situaci uvidíme za okamžik na mapě.

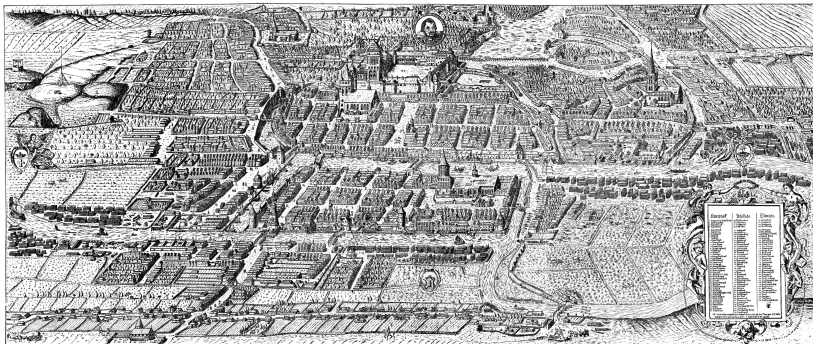
*Obyvatelé města měli rádi nedělní procházky po těchto mostech a hledali „optimální“ procházku.*

## Problém

Najděte procházku středem města Královce, při které každý ze sedmi mostů přejdeme právě jednou.

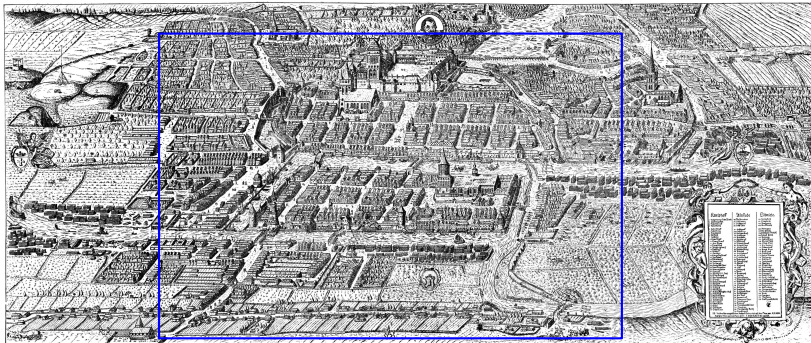
# Mosty v Královci

Gedenkblatt zur sechshundert jährigen Jubelfeier der Königl. Haupt und Residenz-Stadt Königsberg in Preußen.



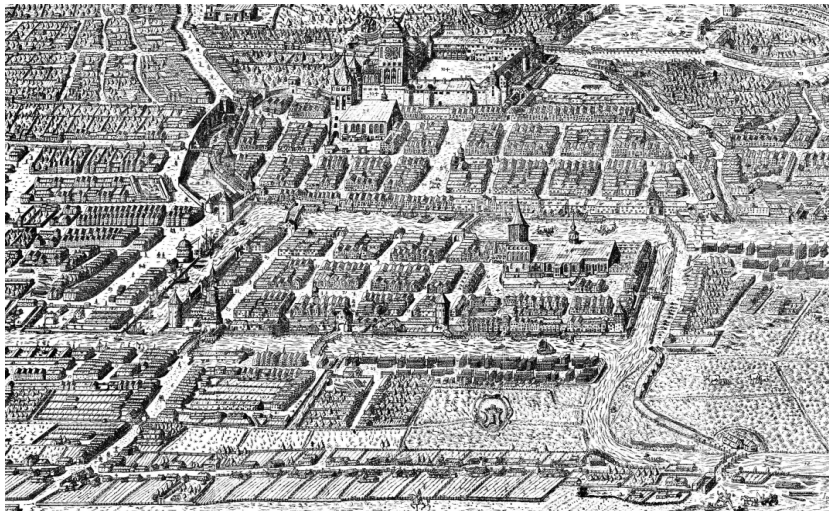
# Mosty v Královci

Gedenkblatt zur sechshundert jährigen Jubelfeier der Königl. Haupt und Residenz-Stadt Königsberg in Preußen.

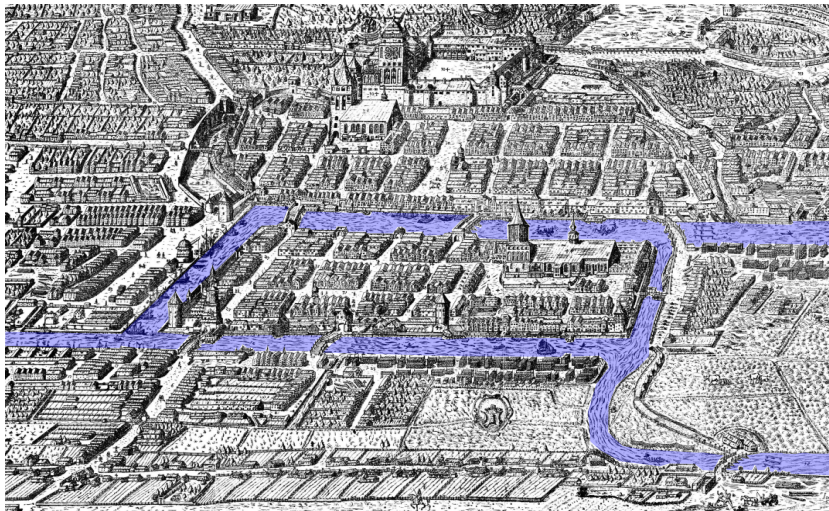




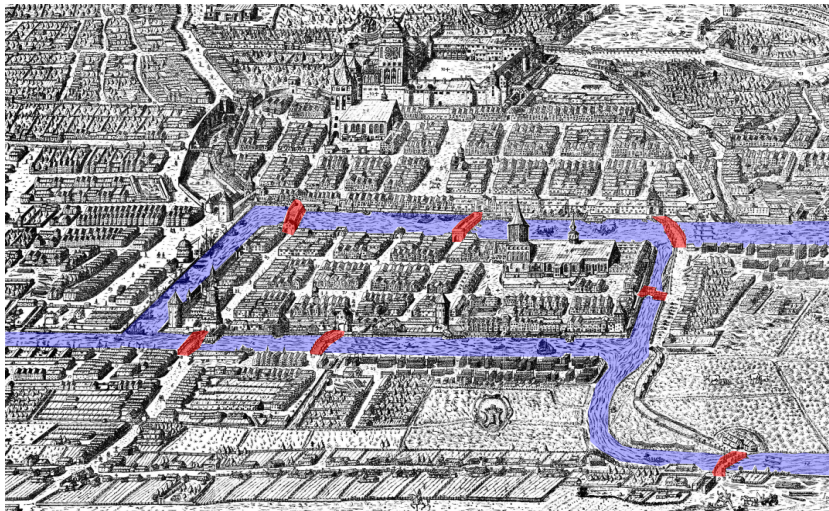
# Mosty v Královci



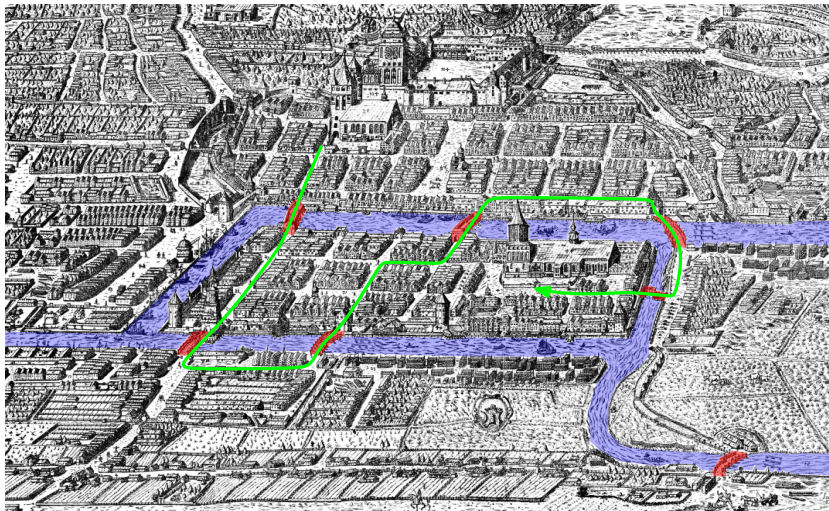
# Mosty v Královci



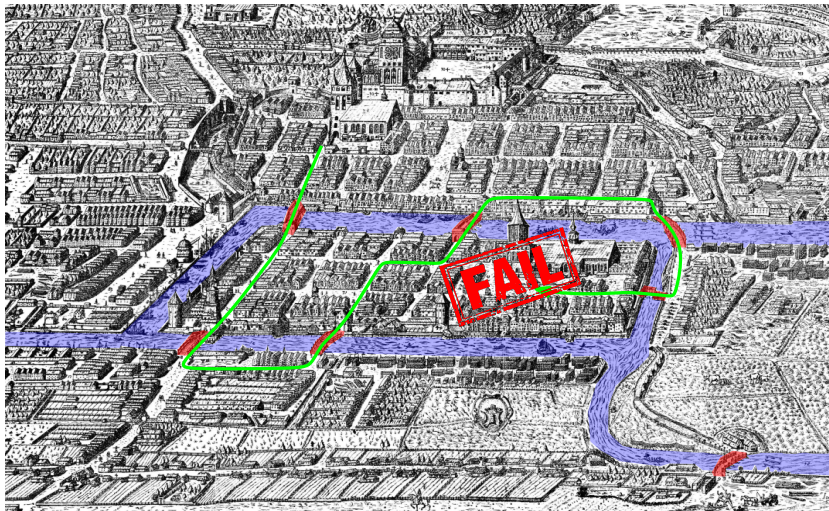
# Mosty v Královci



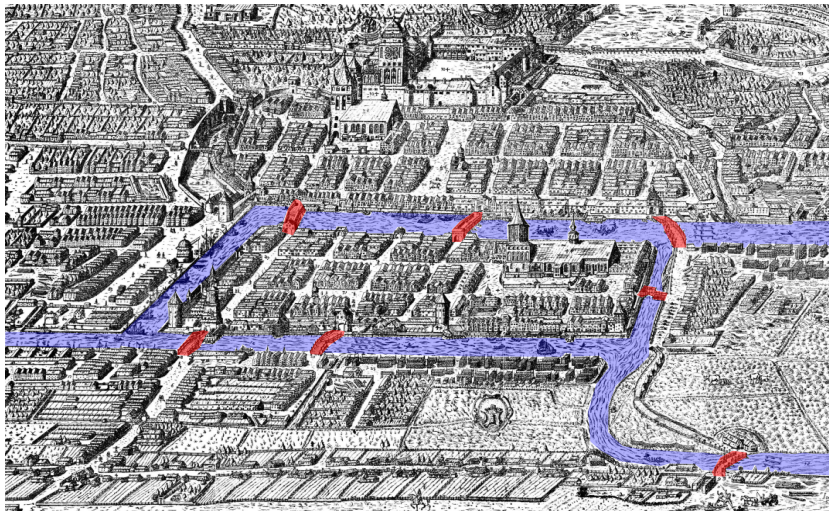
# Mosty v Královci



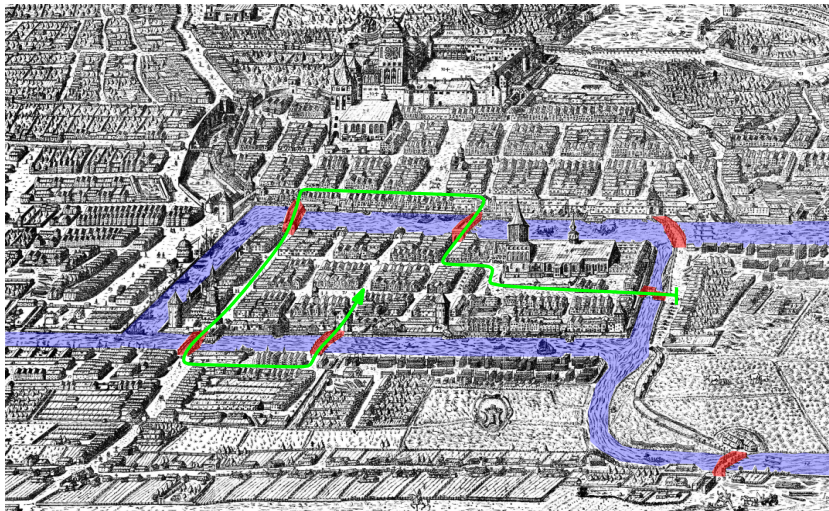
# Mosty v Královci



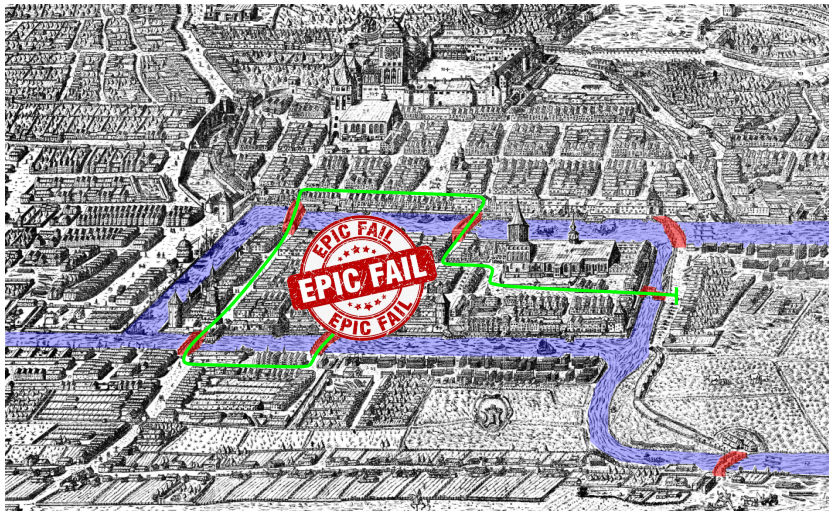
# Mosty v Královci



# Mosty v Královci



# Mosty v Královci





# Leonhard Euler (1707-1783)



$$e^{i\pi} = -1$$

- Švýcarský matematik, nejdéle žil v Petrohradě.
- Největší matematik 18. století.
- Jeden článek / týden práce.
- Napsal 92 svazků odborných knih... atd.



# Leonhard Euler (1707-1783)



$$e^{i\pi} = -1$$

- Švýcarský matematik, nejdéle žil v Petrohradě.
- Největší matematik 18. století.
- Jeden článek / týden práce.
- Napsal 92 svazků odborných knih... atd.



# Leonhard Euler (1707-1783)



$$e^{i\pi} = -1$$

- Švýcarský matematik, nejdéle žil v Petrohradě.
- Největší matematik 18. století.
- Jeden článek / týden práce.
- Napsal 92 svazků odborných knih... atd.



# Leonhard Euler (1707-1783)



$$e^{i\pi} = -1$$

- Švýcarský matematik, nejdéle žil v Petrohradě.
- Největší matematik 18. století.
- Jeden článek / týden práce.
- Napsal 92 svazků odborných knih... atd.



# Leonhard Euler (1707-1783)



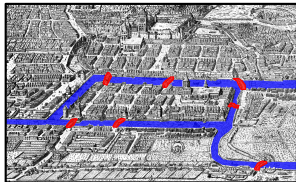
$$e^{i\pi} = -1$$

Ale (pro nás) především:

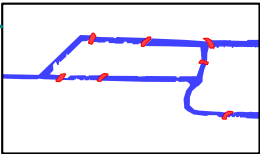
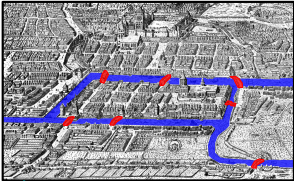
Roku 1736 vyřešil problém mostů města Královce: Tedy otázku, *je-li možné v jediné procházce každý ze sedmi mostů přejít právě jednou.*



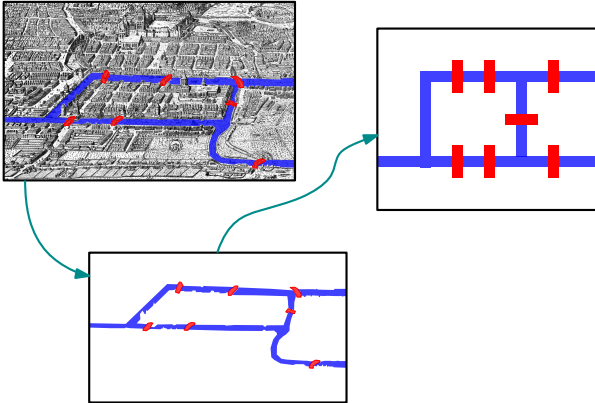
# Detailní mapa $\rightarrow$ [ Abstrakce ] $\rightarrow$ graf



# Detailní mapa $\rightarrow$ [ Abstrakce ] $\rightarrow$ graf

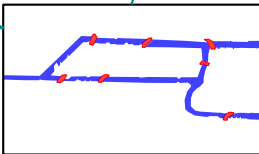
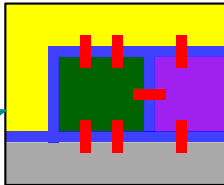
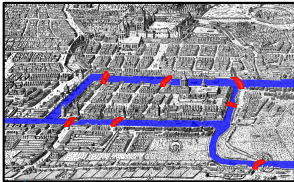


# Detailní mapa — [ Abstrakce ] —→ graf

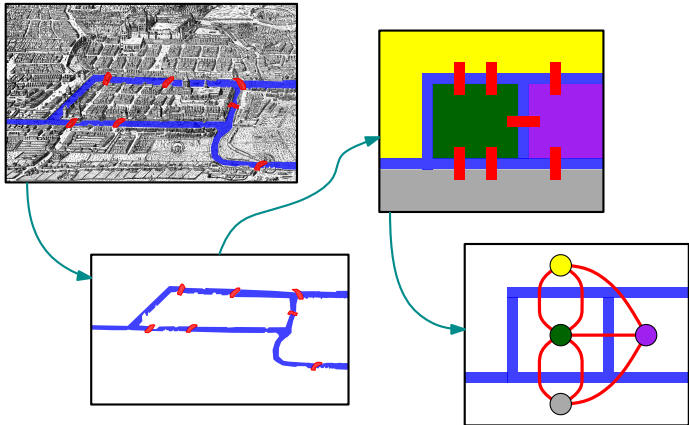




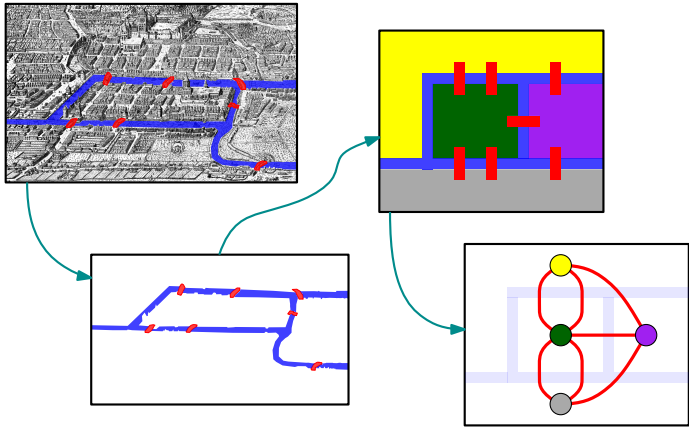
# Detailní mapa — [ Abstrakce ] —→ graf



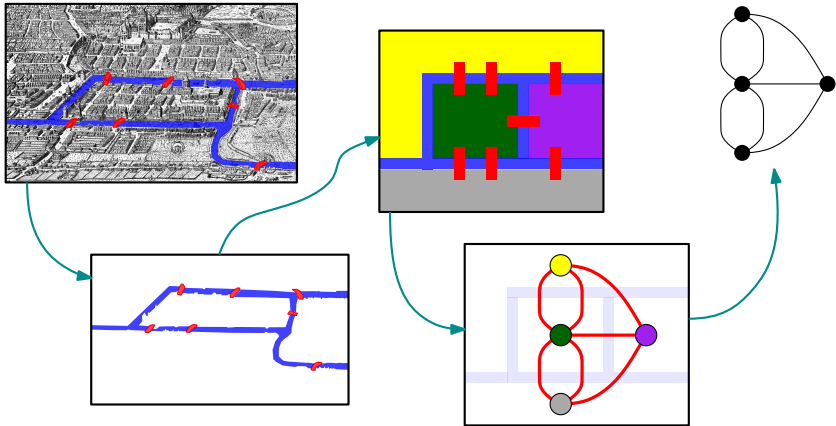
# Detailní mapa — [ Abstrakce ] —→ graf



# Detailní mapa — [ Abstrakce ] —→ graf

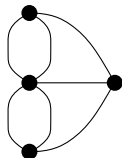


# Detailní mapa — [ Abstrakce ] —→ graf



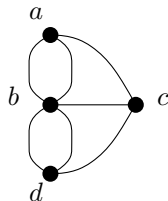
# Teorie grafů - základní definice

- Strukturu na obrázku vpravo nazýváme *graf*.
- Skládá se z vrcholů a hran („mosty“).  
Vrcholy označíme  $a, b, c, d$ .
- Označme  $V$  množinu vrcholů (*vertices*);  
a  $E$  množinu hran (*edges*).
- Graf je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ .
- Sled v grafu  $G$  je libovolná posloupnost tvaru  
 $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$  v níž hrana  $e_i$   
spojuje vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . ( $v_i \in V, e_i \in E$ )
- Vrcholy i hrany se ve sledu mohou opakovat.



# Teorie grafů - základní definice

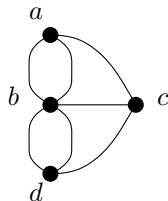
- Strukturu na obrázku vpravo nazýváme *graf*.
- Skládá se z **vrcholů** a **hran** („mosty“).  
Vrcholy označíme  $a, b, c, d$ .
- Označme  $V$  množinu vrcholů (*vertices*);  
a  $E$  množinu hran (*edges*).
- Graf je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ .
- Sled v grafu  $G$  je libovolná posloupnost tvaru  
 $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$  v níž hrana  $e_i$   
spojuje vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . ( $v_i \in V, e_i \in E$ )
- Vrcholy i hrany se ve sledu mohou opakovat.



# Teorie grafů - základní definice

- Strukturu na obrázku vpravo nazýváme *graf*.
- Skládá se z **vrcholů** a **hran** („mosty“).  
Vrcholy označíme  $a, b, c, d$ .
- Označme  $V$  množinu vrcholů (*vertices*);  
a  $E$  množinu hran (*edges*).
- Graf je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ .
- Sled v grafu  $G$  je libovolná posloupnost tvaru  $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$  v níž hrana  $e_i$  spojuje vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . ( $v_i \in V, e_i \in E$ )
- Vrcholy i hrany se ve sledu mohou opakovat.

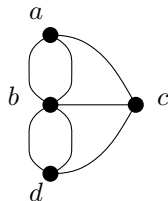
$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{\text{hrany}\}$$



# Teorie grafů - základní definice

- Strukturu na obrázku vpravo nazýváme *graf*.
- Skládá se z **vrcholů** a **hran** („mosty“).  
Vrcholy označíme  $a, b, c, d$ .
- Označme  $V$  množinu vrcholů (*vertices*);  
a  $E$  množinu hran (*edges*).
- **Graf** je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ .
- Sled v grafu  $G$  je libovolná posloupnost tvaru  $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$  v níž hrana  $e_i$  spojuje vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . ( $v_i \in V, e_i \in E$ )
- Vrcholy i hrany se ve sledu mohou opakovat.

$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{\text{hrany}\}$$
$$G = (V, E)$$

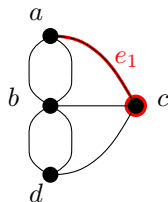




# Teorie grafů - základní definice

- Strukturu na obrázku vpravo nazýváme *graf*.
- Skládá se z **vrcholů** a **hran** („mosty“).  
Vrcholy označíme  $a, b, c, d$ .
- Označme  $V$  množinu vrcholů (*vertices*);  
a  $E$  množinu hran (*edges*).
- **Graf** je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ .
- **Sled** v grafu  $G$  je libovolná posloupnost tvaru  $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$  v níž hrana  $e_i$  spojuje vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . ( $v_i \in V, e_i \in E$ )
- Vrcholy i hrany se ve sledu mohou opakovat.

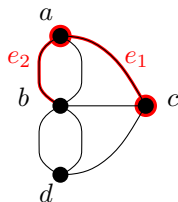
$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{\text{hrany}\}$$
$$G = (V, E)$$



# Teorie grafů - základní definice

- Strukturu na obrázku vpravo nazýváme *graf*.
- Skládá se z **vrcholů** a **hran** („mosty“).  
Vrcholy označíme  $a, b, c, d$ .
- Označme  $V$  množinu vrcholů (*vertices*);  
a  $E$  množinu hran (*edges*).
- **Graf** je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ .
- **Sled** v grafu  $G$  je libovolná posloupnost tvaru  $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$  v níž hrana  $e_i$  spojuje vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . ( $v_i \in V, e_i \in E$ )
- Vrcholy i hrany se ve sledu mohou opakovat.

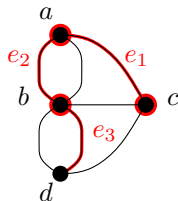
$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{\text{hrany}\}$$
$$G = (V, E)$$



# Teorie grafů - základní definice

- Strukturu na obrázku vpravo nazýváme *graf*.
- Skládá se z **vrcholů** a **hran** („mosty“).  
Vrcholy označíme  $a, b, c, d$ .
- Označme  $V$  množinu vrcholů (*vertices*);  
a  $E$  množinu hran (*edges*).
- **Graf** je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ .
- **Sled** v grafu  $G$  je libovolná posloupnost tvaru  $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$  v níž hrana  $e_i$  spojuje vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . ( $v_i \in V, e_i \in E$ )
- Vrcholy i hrany se ve sledu mohou opakovat.

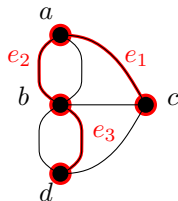
$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{\text{hrany}\}$$
$$G = (V, E)$$



# Teorie grafů - základní definice

- Strukturu na obrázku vpravo nazýváme *graf*.
- Skládá se z **vrcholů** a **hran** („mosty“).  
Vrcholy označíme  $a, b, c, d$ .
- Označme  $V$  množinu vrcholů (*vertices*);  
a  $E$  množinu hran (*edges*).
- **Graf** je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ .
- **Sled** v grafu  $G$  je libovolná posloupnost tvaru  $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$  v níž hrana  $e_i$  spojuje vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . ( $v_i \in V, e_i \in E$ )
- Vrcholy i hrany se ve sledu mohou opakovat.

$$V = \{a, b, c, d\}$$
$$E = \{\text{hrany}\}$$
$$G = (V, E)$$

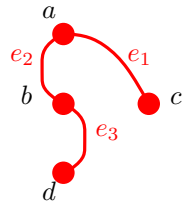


$$(c, e_1, a, e_2, b, e_3, d)$$

Příklad sledu v  $G$ .

# Teorie grafů - základní definice

- Strukturu na obrázku vpravo nazýváme *graf*.
- Skládá se z **vrcholů** a **hran** („mosty“).  
Vrcholy označíme  $a, b, c, d$ .
- Označme  $V$  množinu vrcholů (*vertices*);  
a  $E$  množinu hran (*edges*).
- **Graf** je uspořádaná dvojice  $G = (V, E)$ .
- **Sled** v grafu  $G$  je libovolná posloupnost tvaru  $(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n)$  v níž hrana  $e_i$  spojuje vrcholy  $v_{i-1}$  a  $v_i$ . ( $v_i \in V, e_i \in E$ )
- Vrcholy i hrany se ve sledu mohou opakovat.



$(c, e_1, a, e_2, b, e_3, d)$

Příklad sledu v  $G$ .

# Překlad problému mostů do řeči *teorie grafů*

## Problém 2

Najděte sled v grafu  $G = (V, E)$  (na obrázku), který obsahuje každý prvek  $E$  (hranu) právě jednou. (Tj. sled bez opakování hran.)

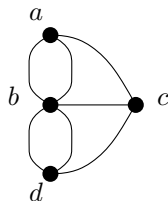
Je zřejmé, že budeme-li mít takový sled, budeme mít i řešení Problému mostů v Královci.

Stejně je i jasné, že najde-li někdo hledanou procházku po Královci 18. století, současně tím vyřeší Problém 2.

## Pozorování

Problém mostů v Královci je ekvivalentní Problému 2. Jde tedy o vhodný *matematický model* reálného problému!

$$\begin{aligned}V &= \{a, b, c, d\} \\E &= \{\text{hrany}\} \\G &= (V, E)\end{aligned}$$



Problém 2:  
Nakreslit 1 tahem!

# Překlad problému mostů do řeči *teorie grafů*

## Problém 2

Najděte sled v grafu  $G = (V, E)$  (na obrázku), který obsahuje každý prvek  $E$  (hranu) právě jednou. (Tj. sled bez opakování hran.)

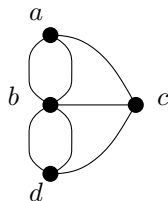
Je zřejmé, že budeme-li mít takový sled, budeme mít i řešení Problému mostů v Královci.

Stejně je i jasné, že najde-li někdo hledanou procházku po Královci 18. století, současně tím vyřeší Problém 2.

## Pozorování

Problém mostů v Královci je ekvivalentní Problému 2. Jde tedy o vhodný *matematický model* reálného problému!

$$\begin{aligned}V &= \{a, b, c, d\} \\E &= \{\text{hrany}\} \\G &= (V, E)\end{aligned}$$



Problém 2:  
Nakreslit 1 tahem!

# Překlad problému mostů do řeči *teorie grafů*

## Problém 2

Najděte sled v grafu  $G = (V, E)$  (na obrázku), který obsahuje každý prvek  $E$  (hranu) právě jednou. (Tj. sled bez opakování hran.)

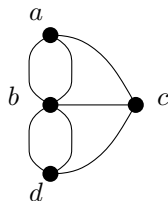
Je zřejmé, že budeme-li mít takový sled, budeme mít i řešení Problému mostů v Královci.

Stejně je i jasné, že najde-li někdo hledanou procházku po Královci 18. století, současně tím vyřeší Problém 2.

## Pozorování

Problém mostů v Královci je ekvivalentní Problému 2. Jde tedy o vhodný *matematický model* reálného problému!

$$\begin{aligned}V &= \{a, b, c, d\} \\E &= \{\text{hrany}\} \\G &= (V, E)\end{aligned}$$



Problém 2:  
Nakreslit 1 tahem!



# Překlad problému mostů do řeči *teorie grafů*

## Problém 2

Najděte sled v grafu  $G = (V, E)$  (na obrázku), který obsahuje každý prvek  $E$  (hranu) právě jednou. (Tj. sled bez opakování hran.)

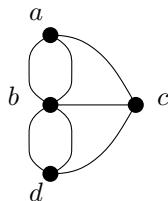
Je zřejmé, že budeme-li mít takový sled, budeme mít i řešení Problému mostů v Královci.

Stejně je i jasné, že najde-li někdo hledanou procházku po Královci 18. století, současně tím vyřeší Problém 2.

## Pozorování

Problém mostů v Královci je **ekvivalentní** Problému 2. Jde tedy o vhodný *matematický model* reálného problému!

$$\begin{aligned}V &= \{a, b, c, d\} \\E &= \{\text{hrany}\} \\G &= (V, E)\end{aligned}$$



Problém 2:  
Nakreslit 1 tahem!

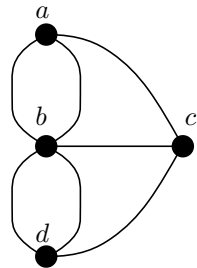
# Eulerovo řešení

- (a) Euler *abstrahoval* podstatné části problému: Ignoroval detaily mapy; stačí  $G = (V, E)$ .
- (b) Definoval stupeň vrcholu:

## Definice

Nechť  $G = (V, E)$  je graf,  $v \in V$ . Definujeme stupeň vrcholu  $v$  v grafu  $G$  (značíme  $\deg_G(v)$ ) jako počet hran  $G$  obsahujících  $v$ .

- (c) Pozoroval chování stupně vrcholu při postupném kreslení grafu („jediným tahem“).



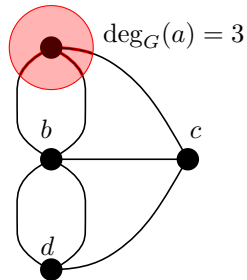
# Eulerovo řešení

- (a) Euler *abstrahoval* podstatné části problému: Ignoroval detaily mapy; stačí  $G = (V, E)$ .
- (b) Definoval **stupeň vrcholu**:

## Definice

Nechť  $G = (V, E)$  je graf,  $v \in V$ . Definujeme **stupeň vrcholu  $v$  v grafu  $G$**  (značíme  $\deg_G(v)$ ) jako počet hran  $G$  obsahujících  $v$ .

- (c) Pozoroval chování stupně vrcholu při postupném kreslení grafu („jedním tahem“).



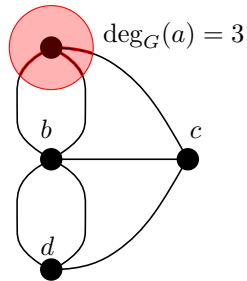
# Eulerovo řešení

- (a) Euler *abstrahoval* podstatné části problému: Ignoroval detaily mapy; stačí  $G = (V, E)$ .
- (b) Definoval **stupeň vrcholu**:

## Definice

Nechť  $G = (V, E)$  je graf,  $v \in V$ . Definujeme **stupeň vrcholu  $v$  v grafu  $G$**  (značíme  $\deg_G(v)$ ) jako počet hran  $G$  obsahujících  $v$ .

- (c) Pozoroval chování stupně vrcholu při postupném kreslení grafu („jedním tahem“).



$$\deg_G(b) = 5$$

$$\deg_G(c) = 3$$

$$\deg_G(d) = 3$$

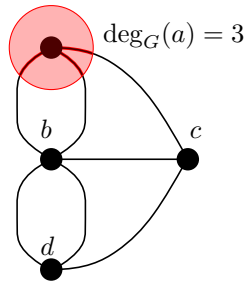
# Eulerovo řešení

- (a) Euler *abstrahoval* podstatné části problému: Ignoroval detaily mapy; stačí  $G = (V, E)$ .
- (b) Definoval **stupeň vrcholu**:

## Definice

Nechť  $G = (V, E)$  je graf,  $v \in V$ . Definujeme **stupeň vrcholu  $v$  v grafu  $G$**  (značíme  $\deg_G(v)$ ) jako počet hran  $G$  obsahujících  $v$ .

- (c) Pozoroval chování stupně vrcholu při postupném kreslení grafu („jedním tahem“).



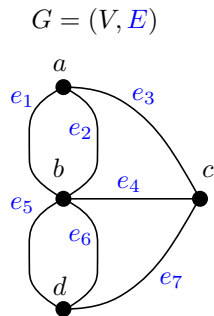
$$\deg_G(b) = 5$$

$$\deg_G(c) = 3$$

$$\deg_G(d) = 3$$

## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

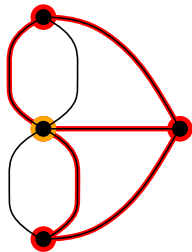
- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je počáteční,  $c$  koncový ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou průchozí.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.



## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je počáteční,  $c$  koncový ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou průchozí.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

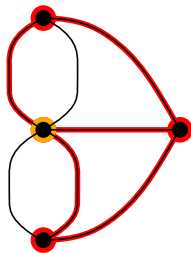
$H$  je podgraf  $G$



## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je **počáteční**,  $c$  **koncový** ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou **průchozí**.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

$H$  je podgraf  $G$

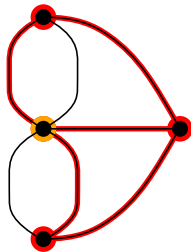




## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je **počáteční**,  $c$  **koncový** ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou **průchozí**.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

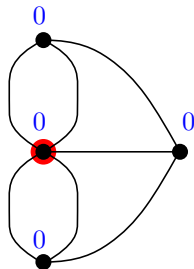
$H$  je podgraf  $G$



## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je **počáteční**,  $c$  **koncový** ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou **průchozí**.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

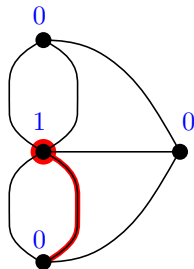
Sled  $S$



## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

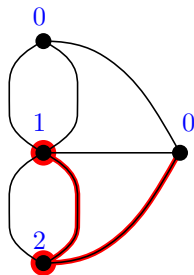
- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je **počáteční**,  $c$  **koncový** ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou **průchozí**.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

Sled  $S$



## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

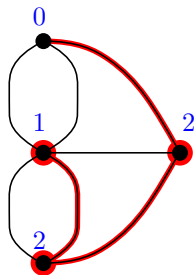
- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je **počáteční**,  $c$  **koncový** ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou **průchozí**.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

Sled  $S$ 

## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je **počáteční**,  $c$  **koncový** ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou **průchozí**.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

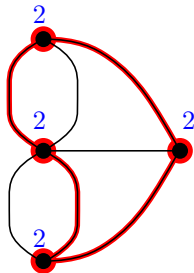
Sled  $S$



## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je **počáteční**,  $c$  **koncový** ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou **průchozí**.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

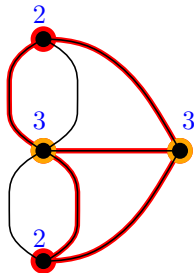
Sled  $S$



## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

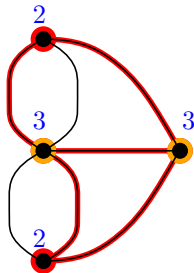
- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je **počáteční**,  $c$  **koncový** ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou **průchozí**.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud počáteční = koncový, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

Sled  $S$



## Klíčové pozorování o **stupni** vrcholu

- Představme si libovolný sled bez opakování hran v našem grafu  $G$ . Například sled  $S = (b, e_6, d, e_7, c, e_3, a, e_1, b, e_4, c)$ .
- Uvažujme příslušnou tímto sledem „nakreslenou“ část  $H$  grafu  $G$ .
- Vrchol  $b$  je **počáteční**,  $c$  **koncový** ve sledu  $S$ . Ostatní vrcholy jsou **průchozí**.
- Průchozí vrcholy mají v  $H$  **sudý stupeň!** („Přijdu + odejdu, a to novými cestami.“)
- Pokud **počáteční = koncový**, pak mají v  $H$  sudý stupeň všechny vrcholy.

Sled  $S$ 



## Závěrečný argument

**Uvědomili jsme si:** Necht'  $H$  je libovolný podgraf našeho grafu  $G$ , který jsme nakreslili jedním tahem bez opakování hran. Potom  $H$  má nejvýše dva vrcholy lichého stupně.

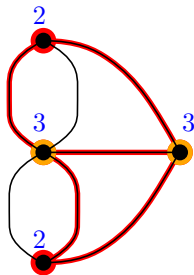
Je přitom jasné, že nezáleží na tom, v jakém sledu jsme podgraf  $H$  nakreslili, závěr je vždy stejný.

### Důsledek (Řešení Problému 2)

*Graf  $G$  z Problému 2 má 4 vrcholy lichého stupně, a nedá se tedy nakreslit jedním tahem bez opakování hran.*

Hledaná procházka po mostech tedy neexistuje!

$H$  je podgraf  $G$



## Závěrečný argument

**Uvědomili jsme si:** Necht'  $H$  je libovolný podgraf našeho grafu  $G$ , který jsme nakreslili jedním tahem bez opakování hran. Potom  $H$  má nejvýše dva vrcholy lichého stupně.

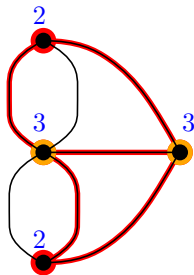
Je přitom jasné, že nezáleží na tom, v jakém sledu jsme podgraf  $H$  nakreslili, závěr je vždy stejný.

Důsledek (Řešení Problému 2)

*Graf  $G$  z Problému 2 má 4 vrcholy lichého stupně, a nedá se tedy nakreslit jedním tahem bez opakování hran.*

Hledaná procházka po mostech tedy neexistuje!

$H$  je podgraf  $G$



## Závěrečný argument

**Uvědomili jsme si:** Necht'  $H$  je libovolný podgraf našeho grafu  $G$ , který jsme nakreslili jedním tahem bez opakování hran. **Potom  $H$  má nejvýše dva vrcholy lichého stupně.**

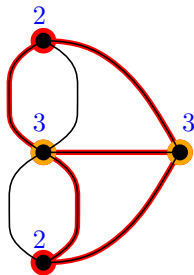
Je přitom jasné, že nezáleží na tom, v jakém sledu jsme podgraf  $H$  nakreslili, závěr je vždy stejný.

Důsledek (Řešení Problému 2)

*Graf  $G$  z Problému 2 má 4 vrcholy lichého stupně, a nedá se tedy nakreslit jedním tahem bez opakování hran.*

Hledaná procházka po mostech tedy neexistuje!

$H$  je podgraf  $G$



## Závěrečný argument

**Uvědomili jsme si:** Necht'  $H$  je libovolný podgraf našeho grafu  $G$ , který jsme nakreslili jedním tahem bez opakování hran. **Potom  $H$  má nejvýše dva vrcholy lichého stupně.**

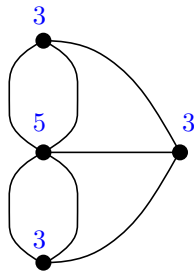
Je přitom jasné, že nezáleží na tom, v jakém sledu jsme podgraf  $H$  nakreslili, závěr je vždy stejný.

### Důsledek (Řešení Problému 2)

*Graf  $G$  z Problému 2 má 4 vrcholy lichého stupně, a nedá se tedy nakreslit jedním tahem bez opakování hran.*

Hledaná procházka po mostech tedy **neexistuje!**

$G = (V, E)$



# Osnova

1 Abstrakce

2 Mosty v Královci

3 Závěr

# Pro Eulera? Triviální!



EULER

Carl Gottlieb Ehler, *v dopise Eulerovi*:  
„Mně a našemu příteli Kuhnovi bys poskytl nejcennější službu, což by nás dostalo do tvého dluhu, nejučenější pane, kdybys nám poslal řešení, které dobře znáš, problému sedmi mostů Königsbergu spolu s důkazem. Ukázalo by se to vynikajícím příkladem kalkulu polohy [calculi situs] hodným vašeho velkého génia. Přidal jsem náčrt zmíněných mostů...“

## Pro Eulera? Triviální!



EULER

*Eulerova odpověď, duben 1736.*

„Tak vidíte, nejvznešenější pane, jak tento typ řešení má malý vztah k matematice a já nechápu, proč očekáváte, že ho matematik vytvoří spíše než kdokoli jiný, protože řešení je založeno pouze na rozumu a jeho objev nezávisí na žádném matematickém principu. Z tohoto důvodu nevím, proč i otázky, které mají tak malý vztah k matematice, jsou matematiky řešeny rychleji než ostatními...“

# Pro Eulera? Triviální!



EULER

*Z Eulerova dopisu mat. jménem Giovanni Marinoni:*

„Tato otázka je tak banální, ale připadala mi hodna pozornosti vzhledem k tomu, že ani geometrie, algebra, ba ani umění počítat, nebyly dostatečné k jejímu řešení.“





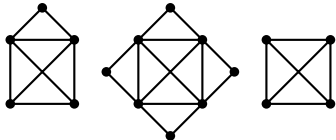
# Aplikace teorie grafů

Struktura	vrcholy	hrany	aplikace
Internet	weby	odkazy	Google
Facebook	profily	přátelství	výběr obsahu...
Mapa	státy	sousedství	Problém 4 barev
Letectví	letišť	let. spoj	vyhledávač letů
atd.	atd.	atd.	atd.

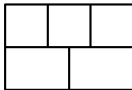
Dále třeba: Erdösovo číslo, Obama handshake number (a maximální vzdálenost v handshake-grafu)...

# Cvičení pro Vás

Jedním tahem:



Třemi tahy:

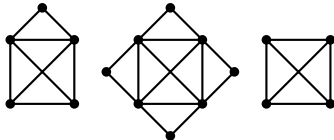


Kaliningrad dnes:

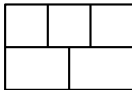


## Cvičení pro Vás

Jedním tahem:



Třemi tahy:



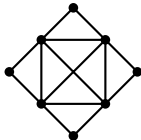
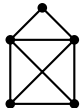
Kaliningrad dnes:



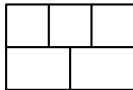
Matematika  
je věda o  
(abstraktních)  
strukturách.

# Cvičení pro Vás

Jedním tahem:



Třemi tahy:



Děkuji za pozornost!

Kaliningrad dnes:



Matematika  
je věda o  
(abstraktních)  
strukturách.