Axiomatická teorie ZF
(Zermelova-Frankelova teorie množin)

7) Schéma axiomů nahrazení:

„Obraz množiny při definovatelném zobrazení je množina."

↑ formule

8) Axiom FUNDOVANOSTI

$$(\forall a)\big(a \neq \emptyset \rightarrow (\exists x)(x \in a \wedge x \cap a = \emptyset)\big).$$

Příklad: Kdyby a byla množina splňující $a \in a$, dostaneme SPOR:

$A := \{a\}$ (podle ax. dvojice $A \overset{def}{=} \{a,a\}$ je množina).

Aplikujeme AF na A:

$A \neq \emptyset \overset{AF}{\Longrightarrow}$ najdeme prvek x: $x \in A \wedge x \cap A = \emptyset$.

Ovšem $A = \{a\}$, a tedy $x = a$.

My ale víme, že $a \in x$. Ale $a \in A$

Tzn $a \in x \cap A \neq \emptyset$ ↯.

TVRZENÍ: $(\forall a)\ a \notin a$

- jsou vyloučeny cykly jako třeba:

$y_1 \in y_2 \in y_1$, $y_1 \in y_2 \in y_3 \in y_1$, ...

Nejsou možné nekonečné $\in$-řetězce.

Věta: AF $\longleftrightarrow$ $\mathbb{V}$ lze poskládat iterováním operace potence, počínaje $\emptyset$.

Přesněji: $\emptyset$, $\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) =: \mathcal{P}^2(\emptyset)$, ...

$$\mathcal{P}^\omega(\emptyset) := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}^n(\emptyset). \qquad \mathcal{P}^{\omega+1}(\emptyset) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^\omega(\emptyset))$$

$$\mathbb{V} = \bigcup_{\alpha \in On} \mathcal{P}^\alpha(\emptyset).$$

Zpět k ω:

$\omega := \bigcap\{y : y \text{ je induktivní}\}$

Def. y je ind. $\overset{\text{def.}}{\iff}$

$\emptyset \in y \wedge (\forall x)(x \in y \rightarrow \underbrace{x \cup \{x\}}_{\text{následník}} \in y)$

Víme: ω je induktivní

spec. $0 := \emptyset \in \omega$

$\Rightarrow 1 \in \omega \Rightarrow 2 = 1 \cup \{1\} \in \omega$

$\Rightarrow 3 = 2 \cup \{2\} \in \omega \Rightarrow \ldots$

Každé Von Neumannovo přirozené číslo je prvek ω.

$0 := \emptyset,\ 1 = \emptyset \cup \{0\},\ 2 \ldots$

Obecně $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Tedy $n \in \omega$ má právě n prvků

7 má 7 prvků.

OPERACE + USPOŘÁDÁNÍ:

Definice: $m, n \in \omega$. Definujeme

$m < n \overset{\text{def.}}{\iff} m \in n$.

Indukcí lze ukázat, že „$<$" je dobré uspořádání ω. [každá nepr. mn. $\subseteq \omega$ má minimum.]

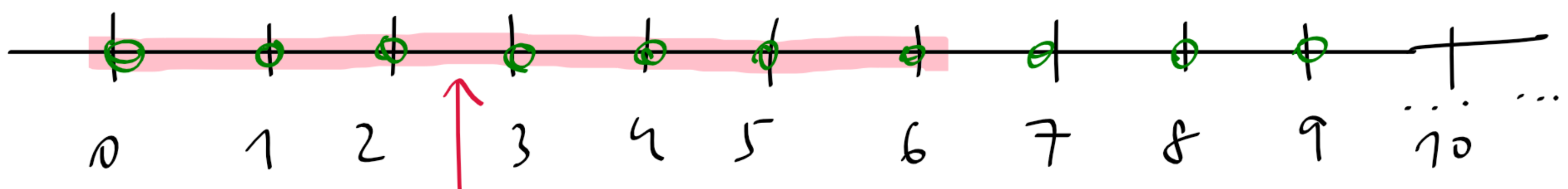
Příklad: Mějme $m, n \in \omega$.

Indukcí lze ukázat, že $m < n \iff m \subsetneq n$.

$m \leq n \iff m \subseteq n$

Čili pokud BÚNO $m \leq n$, tj. $m \subseteq n$,

pak $\underline{m \cup n} = \max\{m, n\}$



$m = \{0, 1, \dots, 6\} = 7$

$n = \{0, 1, \dots, 9\} = 10$

$$m \cup n = \{0, 1, \dots, 9\} = 10 = \max\{m, n\}.$$

Potřebujeme „disjunktní sjednocení":

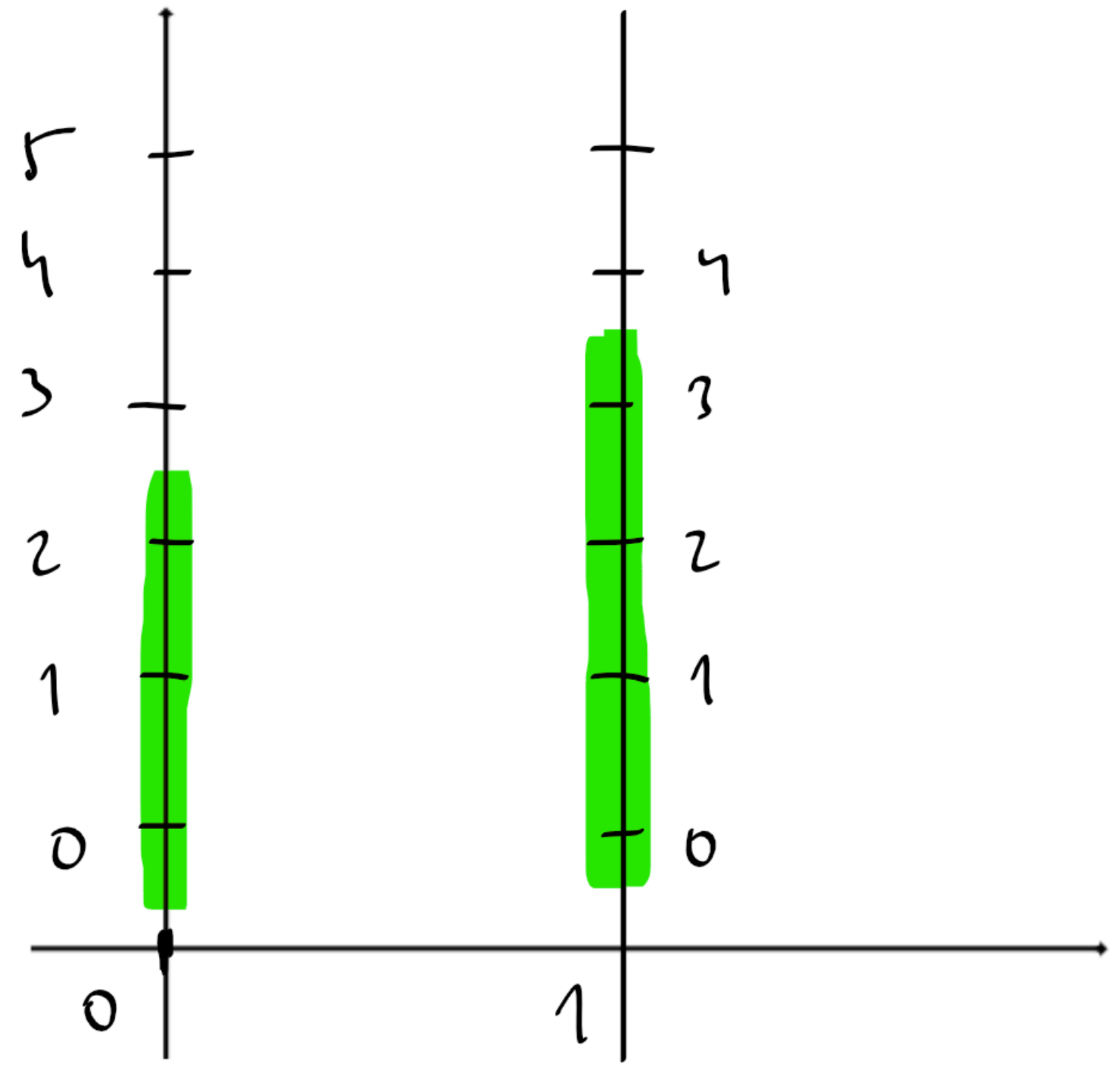
<u>Definice:</u> (množinový součet)

Nechť x, y jsou množiny.

$$x \uplus y := (\{0\} \times x) \cup (\{1\} \times y)$$

<u>Obr.:</u> $m, n \in \omega$, kupř. $m = 3$, $n = 4$

$m \uplus n$:



$|m \uplus n| = 7$, TZN. $m \uplus n \approx 7$.

<u>Definice</u> (Součet „+" na ω).

Dána čísla $m, n \in \omega$, $k \in \omega$.

$$m + n = k \overset{\text{def.}}{\iff} m \uplus n \approx k.$$

Definice (Součin „$\cdot$" na ω)

Jsou-li $m, n \in \omega$, $k \in \omega$, def.

$$m \cdot n = k \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{m \times n} \approx k$$

(pokud $m, n > 0$) $\notin \omega$, a proto $m \times n$ nemůže posloužit jako výsledek násobení $m \cdot n$ (chceme přece $m \cdot n \in \omega$).

Další číselné obory: $\mathbb{Z} :=$

$$:= \underbrace{(\{0\} \times \omega)}_{\text{nezáporná čísla}} \cup \underbrace{(\{1\} \times \omega \setminus \{0\})}_{\text{jsou záporná čísla}}$$

Př.: 7 odpovídá $(0,7)$

-7 — " — $(1,7)$

Pozn.: uspořádaná dvojice $(x,y) :=$

$$(x,y) \overset{\text{def.}}{=} \{\{x\}, \{x,y\}\}.$$

$\{x,y\} = \{y,x\}$

ALTERNATIVNÍ PŘÍSTUP

(a,b), $a,b \in \omega$

chápeme jako

$a-b \in \mathbb{Z}$

Platí: $\forall a,b,x,y: (a,b) = (x,y)$

$\longleftrightarrow a = x \wedge b = y.$

$\boxed{(a,b)+(c,d) = (\ldots, \ldots)}$

V kontrastu s tím:

$\forall a,b,x,y: \{a,b\} = \{x,y\} \longleftrightarrow$

$(a = x \wedge b = y) \vee (b = x \wedge a = y)$

Operace na $\mathbb{Z}$ se definují vhodně, tj. tak, aby například $(-7)\cdot 5 = (-35)$ apod.

RACIONÁLNÍ ČÍSLA

Vycházíme z repr. $\mathbb{Q}$ pomocí „zlomků"

$\frac{p}{q}$ $\left(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} := \omega \setminus \{0\} \right)$

je vlastně dvojice, prvek $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$,

ztotožníme $\frac{p}{q} \sim (p, q)$ (v tomto poř.)

My ovšem víme, že každému $a \in \mathbb{Q}$

odpovídá ∞-mnoho zlomků.

<u>Definujeme</u>: (ekvivalence $\sim$ zlomků):

$\sim \ \subseteq (\mathbb{Z} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{Z} \times \mathbb{N})$ def.:

$(p, q) \sim (r, s) \overset{\text{df.}}{\Longleftrightarrow} p \cdot s = q \cdot r.$

Pomocný výpočet: $p, r \in \mathbb{Z},\ q, s \in \mathbb{N}$.

$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ ... upravíme

$p \cdot s = q \cdot r$ ... Tobo vyjádření využívá definované operace

<u>Nyní definujeme</u>:

$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim$

kupříkladu zlomku $\frac{1}{2}$ odpovídá rac. č.

$\left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \dots \right\}$

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z}\times\mathbb{N}/_{\sim}$$

„množiny zlomků"

Operace. Mějme $x, y \in \mathbb{Q}$.

Zvolme $(a,b) \in x$ [čili $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$]

$(c,d) \in y$.

Třída $\sim$-ekv. odp. tomu prvku

definujeme $x + y := [(ad+bc,\ bd)]_{\sim}$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{b\cdot d}$$

---

podobně $x \cdot y = [(ac,\ bd)]_{\sim}$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Cvičení: Definujte „$-$", „$\div$".

Příklad / obrázek:

$$\{(2,1), (4,2), (6,3), (8,4), \ldots\} + \{(1,3), (2,6), (3,9), \ldots\} = \{(7,3), (14,6), (21,9), \ldots\}$$

$$\frac{2}{1} + \frac{1}{3} = \frac{6+1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} a + b &= c \\ a + b' &= c \end{aligned}\right\} \Rightarrow b = b'$$

Příklad:

$$\left.\begin{aligned} (a,b) + (c,d) &= (e,f) \\ (a,b) + (c',d') &= (e,f) \end{aligned}\right\} \not\Rightarrow$$

$$\not\Rightarrow (c,d) = (c',d')$$

Věta: $\mathbb{N} \approx \mathbb{Z} \approx \mathbb{Q} \approx \omega$

(Tj. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ jsou spočetné.)

Důkaz: 1. KROK: Dokážeme $\omega \times \omega \approx \omega$.

Pomocí C-B věty:

- $\omega \preccurlyeq \omega \times \omega$: $f: n \in \omega \mapsto (n,n) \in \omega \times \omega$ je prosté.

- $\omega \times \omega \preccurlyeq \omega$: $f: (m,n) \in \omega \times \omega \mapsto$
$\mapsto 2^m \cdot 3^n$.

Podle Z.V. aritmetiky (sami!) f prosté.

CB $\rightsquigarrow$ $\omega \times \omega \approx \omega$.

---

2. KROK: $\mathbb{N} \approx \omega$:

Připomínám $\mathbb{N} = \omega \setminus \{0\}$.

$f: \mathbb{N} \to \omega$, $n \mapsto n-1$ je bijekce

3. KROK: Víme $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \omega \times \omega \approx \omega \approx \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$.

CB: $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{Z}$: $f: n \in \mathbb{N} \mapsto (0,n) \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} \preccurlyeq \mathbb{N}$: Ukážeme $\mathbb{Z} \preccurlyeq \omega \times \omega$.

$\mathbb{Z} = (\{0\} \times \omega) \cup (\{1\} \times \omega \setminus \{0\}) \subseteq \omega \times \omega$

$\Rightarrow \mathbb{Z} \preccurlyeq \omega \times \omega$ (id. zobrazení).

$\mathbb{Z} \preccurlyeq \omega \times \omega \approx \mathbb{N} \times \mathbb{N} \approx \mathbb{N}$

CB $\rightsquigarrow$ $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$.

4. KROK: $\mathbb{Q} \approx \omega$:

$\mathbb{Q} \preccurlyeq \omega \times \omega$: $x \in \mathbb{Q}$

$f(x) := (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ takové, že

$[(p,q)]_\sim = x \quad \wedge \quad NSD(p,q) = 1.$

Pak f je prosté. Jasné.

$\omega \preccurlyeq \mathbb{Q}$: $f : n \in \omega \mapsto [(n,1)]_\sim \in \mathbb{Q}$

prosté (cv.). $f : \omega \to \mathbb{Q}$.

Celkem $\omega \preccurlyeq \mathbb{Q} \preccurlyeq \omega \times \omega \approx \omega$

CB $\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q} \approx \omega$. $\boxtimes$