

Počtní část

Příklad 1. Necht' $f(x, y) = \exp(\sin x + \arcsin y)$, je dán bod $a = (\pi, \frac{1}{2})$, [14 bodů]
a dále vektory $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$, $w = (-2, 5)$.

- (a) Určete \mathbb{D}_f a spočtete parciální derivace f všude tam kde existují.
- (b) Dokažte existenci gradientu f v bodě a a napište ho.
- (c) Spočtete $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ a $\frac{\partial f}{\partial w}(a)$.
- (d) Necht' $z = \nabla f(a)$. Určete $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$ a derivaci f v bodě a ve směru z .

Příklad 2. Nalezňte extrémů funkce f na množině M , jestliže [18 bodů]

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8 \quad \text{a} \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Příklad 3. Na množině $[-K, K]$ (pro $K > 0$) a na množině \mathbb{R} vyšetřete stejnoměrnou konvergenci [18 bodů]
posloupnosti funkcí

$$f_n(x) = \exp\left(-x^2 + 2nx - n^2 - 2(1 - 1/n)\right).$$

Hodnocení: Celkem bodů: 50 + 50 (početní + teoretická část). *Orientační podmínky na hodnocení:*

- **dobře:** 25 + 25 bodů
- **velmi dobře:** 32 + 32 bodů
- **výborně:** 75 bodů

Teoretická část

Úloha A.

- (a) Definujte totální diferenciál funkce více proměnných. [2 body]
- (b) Napište definici limity posloupnosti v obecném metrickém prostoru. [2 body]
- (c) Definujte kompaktní množinu v metrickém prostoru. [2 body]
- (d) Definujte stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí. [2 body]
- (e) Zformulujte Moore-Osgoodovu větu. [2 body]

Úloha B.

- (a) Nechť má funkce $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ totální diferenciál L . Napište vztah koeficientů lineární formy L s parciálními derivacemi f a dokažte ho. [6 bodů]
- (b) Definujte lispchitzovské zobrazení a dokažte, že každé takové zobrazení je spojitě. [5 bodů]
- (c) Zformulujte a dokažte tvrzení o základních vlastnostech otevřených množin (průniky, sjednocení...). [7 bodů]

Úloha C. U následujících množin rozhodněte o otevřenosti, uzavřenosti a kompaktnosti (součástí zadání je prostor, ve kterém množiny uvažujeme). Zdůvodněte. [8 bodů]

- $[0, 1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$;
- $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^2$;
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \log(x^2 + y^2) \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$;
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
- $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$;
- $H(\{1/n: n \in \mathbb{N}\}) \subseteq \mathbb{R}$;
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$;
- graf funkce $f(x) = \sin x$ v \mathbb{R}^2 .

Úloha E. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

- (a) Nechť (M, ρ) a (N, σ) jsou metrické prostory a $f: M \rightarrow N$ je zobrazení. Dokažte, že f je spojitá na M , právě když $f^{-1}(G)$ je otevřená pro každou otevřenou množinu $G \subseteq N$. [12 bodů]

Nebo:

- (b) Zformulujte a dokažte charakterizaci (ekvivalentní podmínku) kompaktnosti pro podmnožiny \mathbb{R}^d . [14 bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.