

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)

2. ročník, letní semestr – 3. termín dne 11. června

Početní část

Příklad 1. Dokažte, že následující rovnice určuje na nějakém okolí bodu $(2, 1) \in \mathbb{R}^2$ implicitně zadanou funkci $\varphi(x)$ a spočítejte její první a druhou derivaci v bodě 2; také ukažte, že stejná rovnice na okolí téhož bodu určuje také funkci $\psi(y)$ a určete její první derivaci v bodě 1 (druhou derivaci počítat nemusíte). [10 bodů]

$$x^3 + xy^2 = \frac{10}{3}(x^2 - y^2).$$

Příklad 2. Nechť $f(x, y) = \arctg\left(\sqrt{x^2 + (2y)^2}\right)$, $a = (-6, 4)$, $u = (-10, 1)$, $v = (8, 3)$. [15 bodů]

- (a) Dokažte existenci gradientu f v bodě a a napište ho.
- (b) Spočítejte $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$ a $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$.
- (c) Nechť $w = \nabla f(a)$. Určete $\frac{\partial f}{\partial w}(a)$ a derivaci f v bodě a ve směru w .
- (d) Napište příklad vektoru, který je rovnoběžný s vrstevnicí funkce f v bodě a .

Příklad 3. Vyšetřete následující limitu (své kroky vysvětlete): [10 bodů]

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,-2)} \frac{2xy + 2x - y^2 - y}{(2x - y)(xy + x)}.$$

Je možné tuto funkci spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

Příklad 4. Nalezněte extrémy funkce f na množině M , jestliže [15 bodů]

$$f(x, y) = y^2 + 2x^2 \quad \text{a} \quad M = H\left([-1, 2] \times [-1, 2]\right).$$

Hodnocení: Celkem bodů: 50 + 50 (početní + teoretická část). *Orientační podmínky na hodnocení:*

- **dobře:** 25 + 25 bodů
- **velmi dobře:** 32 + 32 bodů
- **výborně:** 75 bodů

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)

2. ročník, letní semestr – 3. termín dne 11. června

Teoretická část

Úloha A.

- (a) Definujte limitu funkce vzhledem k množině. [2 body]
- (b) Napište definice parciální derivace a derivace podle vektoru. [2 body]
- (c) Definujte vnitřek, hranici, otevřenou a uzavřenou množinu. [2 body]
- (d) Definujte stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí. [2 body]
- (e) Zformulujte nutnou podmínku stejnoměrné konvergence řady funkcí. [2 body]

Úloha B.

- (a) Definujte totální diferenciál a dokažte, že jeho existence v jistém bodě implikuje spojitost funkce v tomtéž bodě. [6 bodů]
- (b) Definujte lispchitzovské zobrazení a dokažte, že každé takové zobrazení je spojitě. [6 bodů]
- (c) Dokažte, že stejnoměrná limita posloupnosti omezených funkcí je omezená. [6 bodů]

Úloha C. Rozhodněte o pravdivosti výroků a zdůvodněte ((M, ρ) je metrický prostor): [8 bodů]

- (a) Libovolná množina $A \subseteq M$ je otevřená nebo uzavřená.
- (b) Průnik libovolného počtu uzavřených množin v M je uzavřená množina.
- (c) Má-li funkce $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ v nějakém bodě $a \in \mathbb{R}^d$ všechny (konečné) parciální derivace podle všech proměnných, pak f je v bodě a spojitá.
- (d) Existence $df(a)$ je nutnou podmínkou pro spojitost funkce $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^d$.

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

- (a) Definujte kompaktnost množiny a spojitost funkce na metrickém prostoru. Dokažte, že spojitá funkce na kompaktním metrickém prostoru nabývá extrémů. [12 bodů]

Nebo:

- (b) Zformulujte a dokažte Moore-Osgoodovu větu. [14 bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.