

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)

2. ročník, letní semestr – 2. termín dne 2. června

Počtní část

Příklad 1. Dokažte, že následující rovnice určuje na nějakém okolí bodu $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ implicitně zadanou funkci a spočítejte její první a druhou derivaci v bodě 1: [10 bodů]

$$x^3 + y^3 = 2xy.$$

Příklad 2. Nechť $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $a = (1, 1)$, $v = (12, 5)$. [10 bodů]

- (a) Dokažte existenci totálního diferenciálu f v bodě a a napište ho.
- (b) Spočítejte $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ a derivaci f v bodě a ve směru vektoru v .
- (c) Nechť $u \in \mathbb{R}^2$ je nenulový vektor. Určete *směrovou* derivaci f v bodě a ve směru u , jestliže:
 - (i) u svírá s $\nabla f(a)$ úhel 180° ;
 - (ii) u svírá s *vrstevnicí* funkce f v bodě a úhel 60° (zde jsou dvě možnosti).

Příklad 3. Vyšetřete následující limitu (své kroky vysvětlete): [15 bodů]

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln((1+x)^2 + y^2)}{|x| + |y|}.$$

Příklad 4. Nalezněte extrémů funkce f na množině M , jestliže [15 bodů]

$$f(x, y) = 2yx^2 - 4xy + 2y \quad \text{a} \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + 4y^2 = 1\}.$$

Hodnocení: Celkem bodů: 50 + 50 (početní + teoretická část). *Orientační podmínky na hodnocení:*

- **dobře:** 25 + 25 bodů
- **velmi dobře:** 32 + 32 bodů
- **výborně:** 75 bodů

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)

2. ročník, letní semestr – 2. termín dne 2. června

Teoretická část

Úloha A.

- (a) Definujte limitu funkce vzhledem k množině. [2 body]
- (b) Definujte totální diferenciál funkce více proměnných. [2 body]
- (c) Napište obecnou definici metrického prostoru. [2 body]
- (d) Uveďte nutnou a postačující podmínku pro kompaktnost množiny v $\mathbb{R}^d$. [2 body]
- (e) Zformulujte Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence řady funkcí. [2 body]

Úloha B.

- (a) Nechť má funkce $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ totální diferenciál L . Napište vztah koeficientů lineární formy L s parciálními derivacemi f a dokažte ho. [6 bodů]
- (b) Nechť $f_n \Rightarrow f$ a $g_n \Rightarrow g$ na množině M . Dokažte, že $f_n + g_n \Rightarrow f + g$ na M . [6 bodů]
- (c) Pomocí Moore-Osgoodovy věty (zformulujte ji) dokažte, že stejnoměrná limita spojitých funkcí je spojitá. [6 bodů]

Úloha C. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků. Svá tvrzení stručně zdůvodněte.

- (a) Množina $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ je kompaktní. [1 bod]
- (b) $\sqrt{2} \in H(\mathbb{Q})$. [1 bod]
- (c) Graf Dirichletovy funkce je uzavřená množina. [1 bod]
- (d) Obecně platí $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$. [2 body]
- (e) Je-li $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ a existují-li parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ($i = 1, \dots, d$), potom f má v bodě a totální diferenciál. [2 body]
- (f) Mějme funkce $f_n, f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $f_n \Rightarrow f$ na $[0, 1]$.
Nechť jsou všechny funkce f_n spojitě v bodě $\frac{1}{2}$. Pak f je spojitá v $\frac{1}{2}$. [1 bod]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

- (a) Definujte kompaktnost množiny a spojitost funkce na metrickém prostoru. Dokažte, že spojitá funkce na kompaktním metrickém prostoru nabývá extrémů. [12 bodů]

Nebo:

- (b) Zformulujte a dokažte charakterizaci (ekvivalentní podmínku) kompaktnosti pro podmnožiny $\mathbb{R}^d$. [14 bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.