

**Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)**

2. ročník, letní semestr – 1. termín dne 27. května

**Početní část**

**Příklad 1.** Dokažte, že následující rovnice určuje na nějakém okolí bodu  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  implicitně zadanou funkci a spočítejte její první a druhou derivaci v bodě 0: [15 bodů]

$$2x - e^{\sin y^2} - e^{\sin xy} = -2.$$

**Příklad 2.** Necht'  $z = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ ,  $\varphi(r, \theta) = (x(r, \theta), y(r, \theta)) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ . [12 bodů]

- (a) Necht'  $\tilde{z} = z \circ \varphi$ . Spočítejte parciální derivace  $\partial \tilde{z} / \partial r$  a  $\partial \tilde{z} / \partial \theta$  (libovolnou metodou).
- (b) Určete souřadnice  $(x_1, y_1)$  odpovídající bodu  $(r_1, \theta_1) = (2, \pi/6)$ . (Nakreslete obrázek!)
- (c) Dokažte existenci a spočítejte gradienty  $\nabla \tilde{z}(r_1, \theta_1)$  a  $\nabla z(x_1, y_1)$ .
- (d) Necht'  $u = (0, 1)$ ,  $v = (1/2, \sqrt{3}/4)$ . Spočítejte derivace podle vektoru:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial v}(r_1, \theta_1) \quad \text{a} \quad \frac{\partial z}{\partial u}(x_1, y_1).$$

**Příklad 3.** Vyšetřete následující limitu; své kroky vysvětlete: [10 bodů]

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2}{x^2 + y^2}.$$

**Příklad 4.** Nalezněte lokální extrémy funkce  $f$  na množině  $\mathbb{R}^2$ , jestliže [13 bodů]

$$f(x, y) = 27y^2 + 15x^2 + 9xy^2 + 2x^3.$$

---

**Hodnocení:** Celkem bodů: 50 + 50 (početní + teoretická část). *Orientační podmínky na hodnocení:*

- **dobře:** 25 + 25 bodů
- **velmi dobře:** 32 + 32 bodů
- **výborně:** 75 bodů

**Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)**

2. ročník, letní semestr – 1. termín dne 27. května

**Teoretická část**

**Úloha A.**

- (a) Napište definici eukleidovské normy v prostoru  $\mathbb{R}^d$  (stačí vzorec). [1 bod]
- (b) Definujte derivaci podle vektoru a gradient (funkce více proměnných). [3 body]
- (c) Definujte vnitřek, hranici, otevřenou a uzavřenou množinu. [2 body]
- (d) Uveďte nutnou a postačující podmínku pro kompaktnost množiny v  $\mathbb{R}^d$ . [2 body]
- (e) Zformulujte Weierstrassovo kritérium stejnoměrné konvergence řady funkcí. [2 body]

**Úloha B.**

- (a) Zformulujte a dokažte  
vzorec pro výpočet derivace funkce podle vektoru pomocí gradientu. [6 bodů]
- (b) Buď  $(M, \rho)$  metrický prostor.  
Dokažte, že libovolná otevřená koule v  $M$  je otevřená množina. [6 bodů]
- (c) Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor,  $A \subseteq M$ .  
Dokažte, že množina  $A$  je uzavřená, právě když  $M \setminus A$  je otevřená. [6 bodů]

**Úloha C.**

- (a) Nechť  $(M, \rho)$  je metrický prostor a  $B_1 = B_\rho(x_1, r_1)$ ,  $B_2 = B_\rho(x_2, r_2)$  jsou koule v něm.  
Nechť  $B_1 = B_2$ ; plyne z toho, že  $x_1 = x_2$  a  $r_1 = r_2$ ? Svou odpověď zdůvodněte. [4 body]
- (b) Buďte  $f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$  neomezené funkce a nechť  $f_n \rightrightarrows f$  na  $M$ . Dokažte, že  $f$  je neomezená. [4 body]

**Úloha D.** Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

- (a) Definujte kompaktní metrický prostor (množinu).  
Dokažte, že spojitá funkce na kompaktním metrickém prostoru nabývá extrémů. [10 bodů]

**Nebo:**

- (b) Zformulujte a dokažte Moore-Osgoodovu větu. [14 bodů]

---

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.