

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)

2. ročník, letní semestr – 0. termín dne 22. května

Početní část

Příklad 1. Dokažte, že následující rovnice určuje na nějakém okolí bodu $(1, 1) \in \mathbb{R}^2$ implicitně zadanou funkci a spočítejte její derivaci v bodě 1: [12 bodů]

$$x^y + y^x - 2y = 0.$$

Příklad 2. Nechť $f(x, y) = \exp(\sin x + \arcsin y)$, je dán bod $a = (\pi, \frac{1}{2})$, a dále vektory $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$, $w = (-2, 5)$. [13 bodů]

(a) Určete $\mathbb{D}_f$ a spočítejte parciální derivace f všude tam kde existují.

(b) Dokažte existenci gradientu f v bodě a a napište ho.

(c) Spočítejte $\frac{\partial f}{\partial u}(a)$, $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ a $\frac{\partial f}{\partial w}(a)$.

(d) Nechť $z = \nabla f(a)$. Určete $\frac{\partial f}{\partial z}(a)$ a derivaci f v bodě a ve směru z .

Příklad 3. Vyšetřete následující limitu: [12 bodů]

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,2) \\ x+y \neq 4}} \frac{xy - 4y + y^2}{\sqrt{x+y} - 2}.$$

Své kroky vysvětlete. Dále vysvětlete, proč se omezujeme na množinu $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x + y \neq 4\}$.

Příklad 4. Nalezněte extrémy funkce f na množině M , jestliže [13 bodů]

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8 \quad \text{a} \quad M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Hodnocení: Celkem bodů: 50 + 50 (početní + teoretická část). *Orientační podmínky na hodnocení:*

- dobře: 25 + 25 bodů
- velmi dobře: 32 + 32 bodů
- výborně: 75 bodů

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM202)

2. ročník, letní semestr – 0. termín dne 22. května

Teoretická část

Úloha A.

- (a) Definujte totální diferenciál funkce více proměnných. [2 body]
- (b) Napište definici limity posloupnosti v obecném metrickém prostoru. [2 body]
- (c) Definujte kompaktní množinu v metrickém prostoru. [2 body]
- (d) Definujte stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí. [2 body]
- (e) Zformulujte Moore-Osgoodovu větu. [2 body]

Úloha B.

- (a) Nechť má funkce $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^d$ totální diferenciál L . Napište vztah koeficientů lineární formy L s parciálními derivacemi f a dokažte ho. [6 bodů]
- (b) Definujte lispchitzovské zobrazení a dokažte, že každé takové zobrazení je spojitě. [5 bodů]
- (c) Zformulujte a dokažte tvrzení o základních vlastnostech otevřených množin (průniky, sjednocení...). [7 bodů]

Úloha C. U následujících množin rozhodněte o otevřenosti, uzavřenosti a kompaktnosti (součástí zadání je prostor, ve kterém množiny uvažujeme). Zdůvodněte. [8 bodů]

- $[0, 1]^d \subseteq \mathbb{R}^d$;
- $\emptyset \subseteq \mathbb{R}^2$;
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \log(x^2 + y^2) \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$;
- $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
- $\mathbb{Q} \cap [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$;
- $H(\{1/n: n \in \mathbb{N}\}) \subseteq \mathbb{R}$;
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$;
- graf funkce $f(x) = \sin x$ v $\mathbb{R}^2$.

Úloha E. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

- (a) Nechť (M, ρ) a (N, σ) jsou metrické prostory a $f: M \rightarrow N$ je zobrazení. Dokažte, že f je spojitá na M , právě když $f^{-1}(G)$ je otevřená pro každou otevřenou množinu $G \subseteq N$. [12 bodů]

Nebo:

- (b) Zformulujte a dokažte charakterizaci (ekvivalentní podmínku) kompaktnosti pro podmnožiny $\mathbb{R}^d$. [14 bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.