Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 10. února 2025

Početní část

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice. [**15** bodů]

$$(2-e^x)y' = -3e^x \cdot \operatorname{tg} y \cdot \cos^2 y.$$

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení: [**15** bodů]

$$y' = (y^2 - y - 2) \cdot \sqrt{|\sin y|}$$

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následujících lineárních rovnic: [**20** bodů]

$$y' + \frac{x}{1+x^2} \cdot y = \sqrt{x^2+1} \cdot \cos x$$

$$y''' = y.$$

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 4. termín dne 10. února 2025

Teoretická část

Úloha A.

(a) Zformulujte srovnávací a limitní srovnávací kritérium konvergence integrálu. [**3** body]

(b) Definujte pojem řešení diferenciální rovnice. [**2** body]

(c) Zformulujte Peanovu větu o existenci řešení jistého typu diferenciální rovnice. [**2** body]

(d) Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti řešení lineární rovnice 1. řádu. [**2** body]

(e) Napište obecný tvar lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty. [**1** bod]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte tvrzení „o spojitosti Riemannova integrálu“, tj. tvrzení, které říká něco o limitě Riemannových integrálů. [**6** bodů]

(b) Podrobně dokažte, že řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu tvoří lineární prostor. (Nemusíte dokazovat, že jeho dimenze je n.) [**5** bodů]

(c) Nechť y je řešení rovnice tvaru $y' = g(y)$ na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Dokažte, že pak $y_c(x) := y(x - c)$ je rovněž řešení. Nezapomeňte upřesnit interval, na kterém se jedná o řešení. [**5** bodů]

Úloha C.

(a) Budiž $y(x)$ nějaké řešení rovnice $y' = \sin y + \cos y$. Je y nutně monotónní? [**3** body]

(b) Je každé řešení obecné diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ spojitá funkce? Stručně zdůvodněte. [**3** body]

(c) Pomocí integrálního kritéria rozhodněte o konvergenci řady [**3** body]

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}.$$

Úloha D.

Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Dokažte, že každé řešení autonomní diferenciální rovnice je monotónní. [**15** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte integrální kritérium konvergence nekonečných řad. [**15** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.