1. $y' = \dfrac{\sqrt{1+y^2}}{xy}$ P.P. $y(-1) = 1$

$$\frac{y'y}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{1}{x} \quad \Big/ \int (\dots)\,dx$$

L.S.: $\displaystyle\int \frac{y\,dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{2y\,dy}{2\sqrt{1+y^2}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}} =$

SUBSTITUCE: $t = 1+y^2$, $dt = 2y\,dy$

$\stackrel{c}{=} \sqrt{t} = \sqrt{1+y^2}$

protože $\sqrt{1+y^2} \geq 1$

$$\sqrt{1+y^2} = \ln|x| + C \implies \ln|x| + C \geq 1$$

$$1+y^2 = (\ln|x|+C)^2 \qquad \ln|x| \geq 1-C$$

$$y^2 = (\ln|x|+C)^2 - 1 \qquad |x| \geq e^{1-C}$$

$$y(x) = \pm\sqrt{(\ln|x|+C)^2 - 1} \qquad x \in (-\infty, -e^{1-C}) \vee x \in (e^{1-C}, \infty)$$

P.P.: $1 = y(-1) = \pm\sqrt{(\ln|-1| + C)^2 - 1} =$

$= \sqrt{C^2 - 1} \iff C^2 = 2,\ C = \pm\sqrt{2}$

$y(x) = \sqrt{(\ln|x| + \sqrt{2})^2 - 1}$ ✓ $x \in (-\infty, -e^{1-\sqrt{2}})$

~~$y(x) = \sqrt{(\ln|x| - \sqrt{2})^2 - 1}$~~

↳ tato není řešení, protože $\ln|x| - \sqrt{2} \geq 1$ není splněno pro $x = -1$.

nebo to lze nahlédnout z toho, že $-1 \notin (-\infty, -e^{1+\sqrt{2}})$, tj. volba $C = -\sqrt{2}$ nepřipouští bod $x = -1$ do def. oboru.

(2.) $y' = \sqrt{|y^3 - 1|} \cdot \operatorname{arctg} y =: g(y)$

$$y^3 - 1 = (y-1)\cdot\underbrace{(y^2 + y + 1)}_{\text{nemá 0-bod v } \mathbb{R}\ [D = 1^2 - 4 < 0]}$$

STACIONÁRNÍ ŘEŠENÍ: $y \equiv 1$, $y \equiv 0$.

MONOTONIE:

$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\ominus$	$\oplus$	$\oplus$
klesající	rostoucí	rostoucí

LEPENÍ: „na 0_+": $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g}$ K. ?

Srovnáme s funkcí $h(y) = \frac{1}{y}$:

$$\lim_{y \to 0_+} \frac{\frac{1}{g(y)}}{h(y)} = \lim_{y \to 0_+} \frac{y}{\sqrt{|y^3-1|}\cdot \operatorname{arctg} y} \overset{\text{VOAL}}{=}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|0^3 - 1|}} \cdot \left(\lim_{y \to 0_+} \frac{\operatorname{arctg} y}{y} \right)^{-1} = 1 \cdot (1)^{-1} \in (0, \infty)$$

TEDY: LSK $\Rightarrow \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{g} \text{ K.} \iff \int_0^{\frac{1}{2}} h \text{ K.} \right]$

Ovšem $\int_0^{\frac{1}{2}} h = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y}\,dy$ D. Tedy nelze lepit.

„Na 1_+:" $\int_1^2 \frac{1}{g}$ K. ? Srovnáme s funkcí

$$h(y) := \frac{1}{\sqrt{y-1}}:$$

$$\lim_{y\to 1_+} \frac{\frac{1}{g(y)}}{h(y)} = \lim_{y\to 1_+} \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{|y^3-1|}\cdot \operatorname{arctg} y} =$$

Avšem $y \to 1_+$, tj. $y > 1$, tedy $|y^3-1| = y^3-1$

$$= \lim_{y\to 1_+} \frac{\sqrt{y-1}}{\sqrt{y-1}\cdot\sqrt{y^2+y+1}\cdot \operatorname{arctg} y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1^2+1+1}\cdot \operatorname{arctg} 1} \in (0,\infty). \quad \text{Tedy:}$$

$$\text{LSK} \Rightarrow \left[\int_1^2 \frac{1}{g} \text{ K.} \iff \int_1^2 h \text{ K.} \right]$$

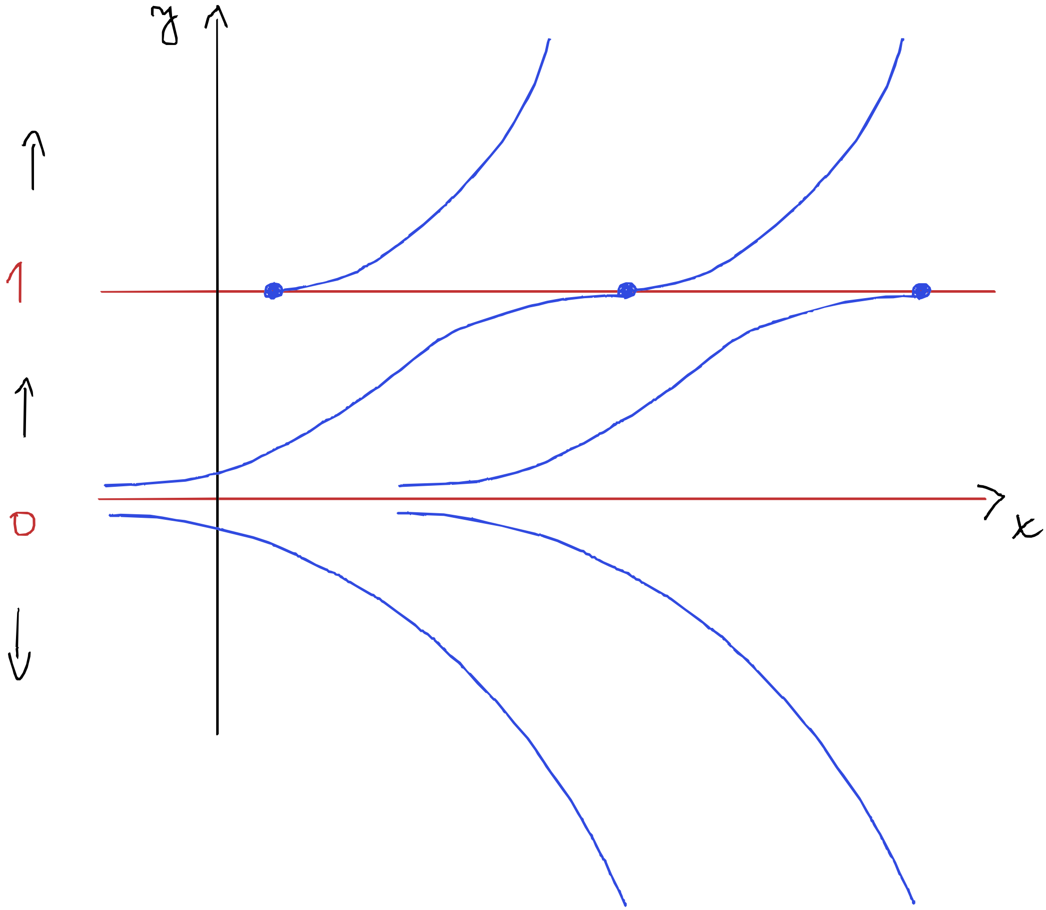
Avšem $\int_1^2 h = \int_1^2 \frac{dy}{\sqrt{y-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ K.

Tedy lze lepit. Analog. „0_-" a „1_-".

POZN: Pro „1_-" bychom použili $h(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y}}$ a při výpočtu limity bychom měli:

$y \to 1_-$, tj. $y < 0$, a tedy

$$|y^3-1| = 1-y^3 = (1-y)(y^2+y+1).$$


y
x
1
0

③ $y' - \frac{y}{x} = x^2 e^x$ ... $x \neq 0$

$p(x) = -\frac{1}{x}$, $P(x) = -\ln|x| = \ln\frac{1}{|x|}$

$I.F. = e^{P(x)} = \frac{1}{|x|}$. Tedy:

na $(0,\infty)$ máme I.F. $\frac{1}{x}$ a

na $(-\infty,0)$ máme I.F. $\frac{1}{-x}$.

Ovšem při hledání řešení na $(-\infty,0)$ můžeme rovnici vynásobit (-1). Proto můžeme uvažovat jednotný I.F. $\frac{1}{x}$ pro oba intervaly:

$$y' \cdot \frac{1}{x} - y \cdot \frac{1}{x^2} = x e^x$$

$$\int x e^x \, dx \overset{P.P.}{=} x e^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = e^x(x-1) + C$$

$$\left(y \cdot \frac{1}{x}\right)' = x e^x$$

$$y \cdot \frac{1}{x} = e^x(x-1) + C$$

$$\boxed{y(x) = e^x(x^2 - x) + Cx, \quad x \in (-\infty,0) \lor x \in (0,\infty).}$$

$y^{(4)} = y$, $y^{(4)} - y = 0$

CHAR. POLYNOM: $\lambda^4 - 1 = 0$

$\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)$

kořeny: $\{1, -1, i, -i\}$ (kde $i = \sqrt{-1}$).

Tedy F.S.: $\{e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t\}$

Obecné řešení je tedy tvaru:

$y(t) = A \cdot e^t + B e^{-t} + C \cdot \cos t + D \cdot \sin t$,

$A, B, C, D \in \mathbb{R}$ $(t \in \mathbb{R})$.