Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 3. února 2025

Početní část

Příklad 1. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice. Najděte její maximální řešení splňující danou počáteční podmínku: [**15** bodů]

$$y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{xy}, \quad y(-1) = 1.$$

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení: [**15** bodů]

$$y' = \sqrt{|y^3 - 1|} \cdot \operatorname{arctg} y.$$

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následujících lineárních rovnic: [**20** bodů]

$$y' - \frac{y}{x} = x^2 e^x,$$

$$y^{(4)} = y.$$

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 3. termín dne 3. února 2025

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte zobecněný Riemannův integrál. [**2** body]

(b) Zformulujte integrální kritérium konvergence nekonečných řad. [**2** body]

(c) Definujte pojem řešení diferenciální rovnice. [**2** body]

(d) Zformulujte Picardovu větu o existenci a jednoznačnosti řešení rovnice. [**2** body]

(e) Zformulujte větu o existenci a jednoznačnosti řešení lineární rovnice n-tého řádu. [**2** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte tvrzení „o spojitosti Riemannova integrálu“, tj. tvrzení, které říká něco o limitě Riemannových integrálů. [**6** bodů]

(b) Definujte množiny funkcí $C(a,b)$, $C^k(a,b)$ $(k \in \mathbb{N})$, $C^\infty(a,b)$ a dokažte, že se (s vhodnými operacemi) jedná o vektorové prostory. Můžete se opřít o fakt, že množina všech reálných funkcí na (a,b) tvoří vektorový prostor. [**5** bodů]

(c) Napište lineární DR n-tého řádu s konstantními koeficienty a pravou stranou $f(t)$, kde f je spojitá na intervalu (a,b). Dokažte, že každé řešení této rovnice je na svém definičním oboru třídy C^n. [**5** bodů]

Úloha C.

(a) Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ je kořen charakteristického polynomu rovnice $y^{(n)} + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$. Ověřte, že funkce $t \mapsto e^{\lambda t}$ je řešením této rovnice. [**3** body]

(b) Je každé řešení obecné diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ spojitá funkce?
Stručně zdůvodněte. [**3** body]

(c) Rovnice $y' = \sqrt{1-y^2}$ má stacionární řešení $y \equiv \pm 1$. Uvažujte libovolné řešení y s oborem hodnot $(-1,1)$. Určete délku definičního oboru y. [**3** body]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Dokažte, že každé řešení autonomní diferenciální rovnice je monotónní. [**15** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte srovnávací kritérium pro konvergenci určitého integrálu a s jeho pomocí dokažte limitní verzi tohoto kritéria (kterou také zformulujte). [**12** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.