Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 0. termín dne 7. ledna 2025

Početní část

Příklad 1. Najděte maximální řešení úlohy s počáteční podmínkou [**20** bodů]

$$y' = x^2 e^x \cdot y, \quad y(2) = 1.$$

Příklad 2. Proveďte kvalitativní analýzu následující rovnice a nakreslete graf zachycující chování všech maximálních řešení: [**15** bodů]

$$y' = (1 - \cos y) \cdot \sqrt[5]{y^3 - y^2 + y - 1}.$$

Příklad 3. Najděte všechna maximální řešení následující rovnice: [**15** bodů]

$$y''' + y' - 10y = 0.$$

Určete to maximální řešení, které splňuje počáteční podmínky

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0.$$

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM201)
2. ročník, zimní semestr – 0. termín dne 7. ledna 2025

Teoretická část

Úloha A.

(a) Zformulujte Newtonovu-Leibnizovu formuli pro zobecněný Riemannův integrál. [**2** body]

(b) Definujte prodloužení řešení a maximální řešení diferenciální rovnice. [**2** body]

(c) Zformulujte Peanovu větu o existenci řešení jistého typu diferenciální rovnice. [**2** body]

(d) Zformulujte větu o tvaru množiny řešení (homogenní i nehomogenní) lineární rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty. Rovnici napište. [**4** body]

Úloha B.

(a) Dokažte, že $C(a,b) \supseteq C^1(a,b) \supseteq C^2(a,b) \supseteq \ldots \supseteq C^\infty(a,b)$. Množiny definujte. [**5** bodů]

(b) Nechť p a q jsou spojité funkce na intervalu (a,b). Dokažte, že každé řešení rovnice $y' + py = q$, které je definované na (a,b), má na (a,b) spojitou derivaci. [**5** bodů]

(c) Dokažte, že nekonečná řada tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konverguje, právě když $\alpha > 1$. [**4** body]

Úloha C.

(a) Je každé řešení obecné diferenciální rovnice $y' = f(x,y)$ spojitá funkce? Stručně zdůvodněte. [**3** body]

(b) Má každá autonomní rovnice nějaké stacionární řešení? Odpověď zdůvodněte. [**2** body]

(c) Předpokládejme, že už máme dokázáno limitní srovnávací kritérium *pro nezáporné funkce*. Zformulujte verzi limitního kritéria, která kromě nezáporných připouští i nekladné funkce a dokažte ji (šikovným použitím verze pro nezáporné). [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Dokažte, že každé řešení autonomní diferenciální rovnice je monotónní. [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte a dokažte integrální kritérium konvergence nekonečných řad. [**12** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.