Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 5. termín dne 12. září 2022

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu **[20 bodů]**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - x\sin x - 1}{e^{x^4} - 1}.$$

Příklad 2. Spočtěte integrál **[15 bodů]**

$$\int \frac{2e^{3x} + 3e^{2x} + 2e^{x}}{(e^x + 1)(e^{2x} + e^x + 1)}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. Spočtěte určitý integrál **[15 bodů]**

$$\int_1^4 \frac{\sqrt{x-1}}{x+2}\,\mathrm{d}x.$$

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 5. termín dne 12. září 2022

Teoretická část

Úloha A.

(a) Zformulujte Taylorovu větu s Lagrangeovým tvarem zbytku. [**3** body]

(b) Vyjádřete Eulerovo číslo e jako součet nekonečné řady. [**1** bod]

(c) Napište úplnou definici Riemannova integrálu. [**5** bodů]

(d) Zformulujte Newtonovu-Leibnizovu formuli. [**2** body]

Úloha B.

(a) Nechť g_1, g_2 a f jsou funkce definované na okolí bodu a. [**6** bodů]
Nechť platí $g_1(x) \sim g_2(x),\ x \to a$. Dokažte, že potom

$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

(b) Buďte F, G primitivní funkce k funkci f na intervalu (a, b). Podrobně dokažte, že existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že $\forall x \in (a, b)\colon F(x) = G(x) + c$. [**6** bodů]

Úloha C.

(a) Buď f funkce definovaná na okolí nějakého bodu $a \in \mathbb{R}$ a buď T lineární funkce, jejíž graf je tečna ke grafu f v bodě $[a, f(a)]$. Dokažte, že pak $f(x) - T(x) = o(x - a),\ x \to a$.
Nápověda: Napište si definici tečny a definici „malého o“. [**6** bodů]

(b) Dokažte: Jestliže f je spojitá a nezáporná na intervalu $[a, b)$, pak funkce $F(x) = \int_a^x f$ má limitu zleva v bodě b.
Nápověda: Jaký je vztah funkcí F a f, a jaké vlastnosti tedy bude mít funkce F? Jaké znáte postačující podmínky pro existenci limity funkce? [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte a dokažte Klíčové lemma pro existenci Riemannova integrálu (Bolzanovu-Cauchyovu podmínku). Zaměřte se pouze na první bod lemmatu, tedy na ekvivalenci, na jejíž jedné straně stojí „$\int_a^b f = I \in \mathbb{R}$“. [**12** bodů]

Nebo:

(b) Nechť je funkce f spojitá na intervalu $[a, b]$. Napište definici stejnoměrné spojitosti funkce a dokažte, že f je nutně na $[a, b]$ dokonce stejnoměrně spojitá. Uveďte příklad funkce na nějakém intervalu, která je spojitá, ale nikoliv stejnoměrně spojitá. [**16** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.