Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 4. termín dne 22. června 2022

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu [**15** bodů]

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x - 1} - \cos x - \frac{x^4}{8}}{x^5}.$$

Příklad 2. Spočtěte integrál [**15** bodů]

$$\int x^2 \operatorname{arctg}(x+1)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 3. Spočtěte délku křivky [**20** bodů]

$$y = 1 - \ln(\cos x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Použijte k tomu vzorec pro délku grafu funkce f na intervalu $[a, b]$:

$$\ell\big(f, [a, b]\big) = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,\mathrm{d}x$$

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **10** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **14** bodů z *Úloh A a B* teoretické části;
- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **30** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 4. termín dne 22. června 2022

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte symbol „malé o“ a symbol „$\sim$“. [**2** body]

(b) Vyjádřete funkci $\cos x$ jako součet Taylorovy řady. [**2** body]

(c) Definujte stejnoměrnou spojitost funkce na intervalu. [**2** body]

(d) Definujte (Darbouxův) horní integrální součet $S(f, D)$. [**2** body]

(e) Zformulujte Newtonovu-Leibnizovu formuli. [**2** body]

Úloha B.

(a) Zformulujte a dokažte 1. Větu o substituci pro neurčitý integrál. [**6** bodů]

(b) Nechť D, D' jsou dělení intervalu $[a, b]$ a D' je zjemnění D. Buď $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená. Dokažte, že $S(f, D') \leqslant S(f, D)$. [**8** bodů]

Úloha C.

(a) Pomocí Newtonovy-Leibnizovy formule dokažte pravidlo Per Partes pro *určitý* integrál. [**5** bodů]

(b) Načrtněte graf funkce $f(x) = \sqrt[3]{x}$ na okolí počátku a rozhodněte, jestli je f stejnoměrně spojitá

(i) na intervalu $[-729, 1337]$;

(ii) na $\mathbb{R}$.

Svá tvrzení zdůvodněte (z definice nebo použitím známých vět). [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Nechť f je spojitá na $[a, b]$. Dokažte, že existuje Riemannův integrál $\int_a^b f$. [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte Taylorovu větu s Peanovým tvarem zbytku a dokažte ji. K důkazu použijete lemmata:

- Pokud $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, pak $f(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$;
- Pokud P je polynom stupně nejvýše n a $P(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$, pak $P \equiv 0$ na $\mathbb{R}$.

Obě lemmata dokažte. (Můžete použít i jiná podobná tvrzení; pokud se tak rozhodnete, zformulujte je a dokažte.) [**16** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.