Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 0. termín dne 19. května 2022

Početní část

Příklad 1. Spočtěte (pokud existuje) limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{x \cdot \ln(1+x^2)}. \qquad [\mathbf{20}\ \text{bodů}]$$

Příklad 2. Pomocí vhodné substituce nalezněte primitivní funkci:

$$\int \frac{\ln^2 x + \sqrt{1+\ln x}}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}}\, dx. \qquad [\mathbf{15}\ \text{bodů}]$$

Příklad 3. Spočtěte objem tělesa vzniklého rotací kolem osy x plochy určené křivkou

$$y = \ln x, \quad x \in [1, e^2]. \qquad [\mathbf{15}\ \text{bodů}]$$

Hodnocení:

Nutné podmínky na hodnocení **dobře**:

- dosažení aspoň **16** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **42** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **velmi dobře**:

- dosažení aspoň **21** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **56** bodů.

Nutné podmínky na hodnocení **výborně**:

- dosažení aspoň **26** bodů jak z početní, tak i z teoretické části;
- dosažení celkového součtu aspoň **70** bodů.

Písemka z matematické analýzy pro učitele (NMTM102)
1. ročník, letní semestr – 0. termín dne 19. května 2022

Teoretická část

Úloha A.

(a) Definujte symbol „malé o“ a symbol „$\sim$“. [**2** body]

(b) Zformulujte Taylorovu větu s Lagrangeovým tvarem zbytku. [**2** body]

(c) Definujte stejnoměrnou spojitost funkce na intervalu. [**2** body]

(d) Napište úplnou Darbouxovu definici Riemannova integrálu. [**5** bodů]

Úloha B.

(a) Nechť D_1 a D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$ a D_2 je zjemnění D_1. Dokažte nerovnost

$$s(f, D_1) \leqslant s(f, D_2).$$

[**8** bodů]

(b) Nechť g_1, g_2 a f jsou funkce definované na okolí bodu a. Nechť platí $g_1(x) \sim g_2(x),\ x \to a$. Dokažte, že potom

$$f(x) = o(g_1(x)),\ x \to a \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = o(g_2(x)),\ x \to a.$$

[**5** bodů]

Úloha C.

(a) Standardním trikem (nebo jinak) spočtěte neurčitý integrál $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx$. [**5** bodů]

(b) Nechť $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$. Dokažte z definice, že $\sup(-M) = -\inf(M)$. [**5** bodů]

Úloha D. Vyberte si **jednu** z následujících dvou možností.

(a) Zformulujte Taylorovu větu s Peanovým tvarem zbytku a dokažte ji. K důkazu použijete lemmata:

- Pokud $f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0$, pak $f(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$;
- Pokud P je polynom stupně nejvýše n a $P(x) = o\big((x-a)^n\big),\ x \to a$, pak $P \equiv 0$ na $\mathbb{R}$.

Obě lemmata dokažte. (Můžete použít i jiná podobná tvrzení; pokud se tak rozhodnete, zformulujte je a dokažte.) [**16** bodů]

Nebo:

(b) Zformulujte Klíčové lemma pro existenci Riemannova integrálu (Bolzanovu-Cauchyovu podmínku). Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \leqslant c \leqslant b$, $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Dokažte následující rovnost za předpokladu, že její pravá strana má smysl:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

[**12** bodů]

Pokud používáte nějaká pomocná tvrzení, musí být jasně patrné, že znáte jejich znění.