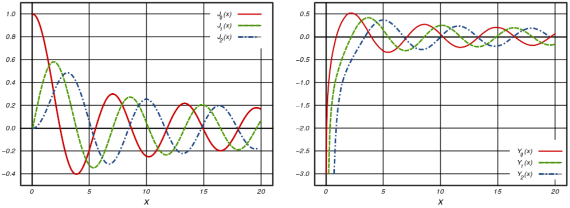
Besselova rovnice

Rovnice:

$$y^2 \frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}y^2} + y \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y} + (y^2 - k^2) = 0$$

$$U\big|_{y=\sqrt{\lambda}R} = 0$$

Obecné řešení: $U(y) = C_1 \mathrm{J}_k(y) + C_2 \mathrm{Y}_k(y)$



Řešení okrajové úlohy: $U(r) = C_1 \mathrm{J}_k\left(\mathrm{j}_{k,n} \frac{r}{R}\right)$

Symbol $\mathrm{j}_{k,n}$ značí n-té řešení rovnice $\mathrm{J}_k(x) = 0$.

Besselovy funkce

Definice:

$$\mathrm{J}_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{z^2}{4}\right)^k}{k!(n+k)!}$$

Rekurentní vztahy:

$$\mathrm{J}_{n-1}(z) + \mathrm{J}_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}\mathrm{J}_n(z)$$

$$\mathrm{J}_{n-1}(z) - \mathrm{J}_{n+1}(z) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{J}_n(z)$$

$$\mathrm{J}_{n-1}(z) - \frac{n}{z}\mathrm{J}_n(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{J}_n(z)$$

$$-\mathrm{J}_{n+1}(z) + \frac{n}{z}\mathrm{J}_n(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{J}_n(z)$$

Generující funkce ($t \neq 0$):

$$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} t^k \mathrm{J}_k(z)$$

Ortogonální funkce

Rovnice:

$$\begin{aligned} y_k'' &= -\lambda_k^2 y_k \\ y_k\big|_{x=\pm\pi} &= 0 \end{aligned}$$

Skalární součin:

$$\begin{aligned} -\lambda_k^2(y_k, y_l) &= -\lambda_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} y_k y_l \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\lambda_k^2 y_k\right) y_l \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left(y_k''\right) y_l \mathrm{d}x \\ &= \begin{vmatrix} u' = y_k'' & u = y_k' \\ v = y_l & v' = y_l' \end{vmatrix} = \left[y_k' y_l\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} y_k' y_l' \mathrm{d}x = -\int_{-\pi}^{\pi} y_k' y_l' \mathrm{d}x \\ &= \begin{vmatrix} u' = y_k' & u = y_k \\ v = y_l' & v' = y_l'' \end{vmatrix} = -\left[y_k y_l'\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} y_k y_l'' \mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} y_k y_l'' \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} y_k \left(-\lambda_l^2 y_l\right) \mathrm{d}x = -\lambda_l^2 (y_k, y_l) \end{aligned}$$

Celkem:

$$(-\lambda_k^2 + \lambda_l^2)(y_k, y_l) = 0$$

Proto:

$$(y_k, y_l) = C_{kl}\delta_{kl}$$

Ortogonální funkce

Rovnice:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u_k &= \lambda_k^2 u_k \\
u_k\big|_{\partial\Omega} &= 0
\end{aligned}
$$

Greenova věta:

$$
\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S \right)
$$

Skalární součin:

$$
\begin{aligned}
\lambda_k^2(u_k, u_l) &= \lambda_k^2 \int_\Omega u_k u_l \mathrm{d}V = \int_\Omega \left(\lambda_k^2 u_k\right) u_l \mathrm{d}V = \int_\Omega \left(-\Delta u_k\right) u_l \mathrm{d}V \\
&= -\int_\Omega u_k \Delta u_l \mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} \left(u_k \frac{\partial u_l}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S - u_l \frac{\partial u_k}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}S \right) = \int_\Omega u_k \left(-\Delta u_l\right) \mathrm{d}V \\
&= \int_\Omega u_k \left(\lambda_l^2 u_l\right) \mathrm{d}V = \lambda_l^2 (u_k, u_l)
\end{aligned}
$$

Celkem:

$$
(\lambda_k^2 - \lambda_l^2)(u_k, u_l) = 0
$$

Proto:

$$
(u_k, u_l) = C_{kl}\delta_{kl}
$$

Ortogonální funkce

Rovnice:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U_{k,n}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{k^2}{r^2}U_{k,n}=-\lambda_{k,n}^2U_{k,n}$$

$$U_{k,n}\big|_{r=R}=0$$

Skalární součin:

$$\begin{aligned}
&-\lambda_{k,n}^2(U_{k,n},U_{k,m})=-\lambda_{k,n}^2\int_{r=0}^{R}U_{k,n}U_{k,m}r\mathrm{d}r=\int_{r=0}^{R}\left(-\lambda_{k,n}^2U_{k,n}\right)U_{k,m}r\mathrm{d}r\\
&=\int_{r=0}^{R}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U_{k,n}}{\mathrm{d}r}\right)-\frac{k^2}{r^2}U_{k,n}\right)U_{k,m}r\mathrm{d}r=\int_{r=0}^{R}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U_{k,n}}{\mathrm{d}r}\right)\right)U_{k,m}r\mathrm{d}r\\
&-\int_{r=0}^{R}\frac{k^2}{r^2}U_{k,n}U_{k,m}r\mathrm{d}r=-\int_{r=0}^{R}r\frac{\mathrm{d}U_{k,n}}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}U_{k,m}}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}r-\int_{r=0}^{R}\frac{k^2}{r^2}U_{k,n}U_{k,m}r\mathrm{d}r\\
&=\int_{r=0}^{R}U_{k,n}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U_{k,m}}{\mathrm{d}r}\right)\right)r\mathrm{d}r-\int_{r=0}^{R}U_{k,n}\frac{k^2}{r^2}U_{k,m}r\mathrm{d}r\\
&=\int_{r=0}^{R}U_{k,n}\left(-\lambda_{k,m}^2U_{k,m}\right)r\mathrm{d}r=-\lambda_{k,m}^2(U_{k,n},U_{k,m})
\end{aligned}$$

Celkem:

$$(\lambda_{k,m}^2-\lambda_{k,n}^2)(U_{k,m},U_{k,n})=0$$

Proto:

$$(U_{k,m},U_{k,n})=C_{kmn}\delta_{mn}$$

Riemannova sféra

Laurentovy řady

Definice (Laurentova řada)

Řadu

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^k,$$

kde $a \in \mathbb{C}$ *a* $\{c_n\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \mathbb{C}$ *nazýváme Laurentovou řadou v okolí bodu* a*.*

Laurentovy řady

Definice (Laurentova řada)

Řadu

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^k,$$

kde $a \in \mathbb{C}$ *a* $\{c_n\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \mathbb{C}$ *nazýváme Laurentovou řadou v okolí bodu* a.

Věta (Laurentova řada a holomorfní funkce)

Buď ρ, $R \in [0, +\infty)$, $\rho < R$ *a buď funkce* f *holomorfní na množině* $\mathcal{U}_{\rho,R}(a)$.
Pak platí:

- *Existuje právě jedna posloupnost koeficientů* $\{c_n\}_{k=-\infty}^{+\infty} \in \mathbb{C}$ *tak, že*

  $$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^k$$

  na $\mathcal{U}_{\rho,R}(a)$.
- *Koeficienty* c_n *lze spočíst podle vzorce*

  $$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{z \in \mathbb{C} | z = a + re^{i\varphi}, \varphi \in [0, 2\pi)\}} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz,$$

  kde $r \in (\rho, R)$ *je libovolné.*

Reziduum

Definice (Izolovaná singularita)

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* $a \in \mathbb{C}$ *izolovanou singularitu, právě když*

$$\exists R : f \in \mathcal{H}\left(\mathcal{U}_{0,R}(a)\right).$$

Reziduum

Definice (Izolovaná singularita)

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $a \in \mathbb{C}$ izolovanou singularitu, právě když

$$\exists R : f \in \mathcal{H}\left(\mathcal{U}_{0,R}(a)\right).$$

Definice (Reziduum)

Nechť má funkce f izolovanou singularitu v bodě $a \in C$. Koeficient c_{-1} v Laurentově řadě funkce f,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^k$$

nazýváme reziduem funkce f v bodě a a značíme jej $\operatorname{res}_a f$.

Reziduum

Definice (Izolovaná singularita)

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *má v bodě* $a \in \mathbb{C}$ *izolovanou singularitu, právě když*

$$\exists R : f \in \mathcal{H}\left(\mathcal{U}_{0,R}(a)\right).$$

Definice (Reziduum)

Nechť má funkce f *izolovanou singularitu v bodě* $a \in C$*. Koeficient* c_{-1} *v Laurentově řadě funkce* f*,*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^k$$

nazýváme reziduem funkce f *v bodě* a *a značíme jej* $\operatorname{res}_a f$*.*

Věta (Reziduová věta)

Buď $f \in \mathcal{H}(\Omega \setminus A)$*, kde* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *je otevřená množina a* A *je konečná množina. Dále buď* O *oblast s po částech hladnou hranicí taková, že* $\overline{O} \subset \Omega$ *a* $O \cap A = \emptyset$*. Pokud je* $\partial\Omega$ *kladně orientovaná, pak*

$$\int_{\partial O} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in O \cap A} \operatorname{res}_a f.$$