Jméno a příjmení: ______________________________

Skupina: ______________________________

Příklad	1	2	3	4	**Celkem bodů**
Bodů	5	8	8	11	32
Získáno					

[5] 1. Najděte následující primitivní funkci

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}\,dx.$$

Určete definiční obor původní funkce i primitivní funkce a zjistěte, kde platí vztah $F'(x) = f(x)$ (neuvažujte jednostranné derivace). Použijete-li nějakou větu o substituci, nezapomeňte ověřit její předpoklady.

Řešení:

Funkce $1 + e^{2x}$ je vždy kladná, ve jmenovateli tudíž nemůže být nula a integrovaná funkce je definována pro každé $x \in \mathbb{R}$.

Provedeme technický výpočet.

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = \left| \begin{matrix} y & = & e^{2x} \\ dy & = & 2e^{2x}dx = 2ydx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y}\frac{1}{y}dy = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln|y| - \ln|1+y|\right) = \frac{1}{2}\left(\ln|e^{2x}| - \ln|1+e^{2x}|\right) = x - \frac{1}{2}\ln|1+e^{2x}|.$$

Celkem tedy

$$\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx = x - \frac{1}{2}\ln(1+e^{2x}) + C.$$

Primitivní funkce je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}$, vztah $F'(x) = f(x)$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

[8] 2. Najděte následující primitivní funkci

$$\int x\sin(mx)\cos(nx)dx,$$

kde m, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$.

Určete definiční obor původní funkce i primitivní funkce a zjistěte, kde platí vztah $F'(x) = f(x)$ (neuvažujte jednostranné derivace). Použijete-li nějakou větu o substituci, nezapomeňte ověřit její předpoklady.

Řešení:

Definiční obor funkce

$$f(x) = x\sin(mx)\cos(nx)$$

je zřejmě $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Provedeme technický výpočet. Člen $\cos(nx)\sin(mx)$ upravíme podle vzorce pro součin goniometrických funkcí

$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\left(\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\right)$$

a integrál přepíšeme jako

$$\int x\sin(mx)\cos(nx)dx = \frac{1}{2}\int x\sin((m+n)x)dx + \frac{1}{2}\int x\sin((m-n)x)dx, \tag{1}$$

k výpočtu obou členů použijeme metodu integrace *per partes.*

$$\begin{aligned}\int x\sin((m+n)x)dx &= \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin((m+n)x) & v = -\frac{1}{m+n}\cos((m+n)x) \end{matrix} \right| \\ &= -\frac{x}{m+n}\cos((m+n)x) + \frac{1}{m+n}\int \cos((m+n)x)dx \\ &= -\frac{x}{m+n}\cos((m+n)x) + \frac{1}{(m+n)^2}\sin((m+n)x)dx,\end{aligned}$$

Obdobně naložíme i s druhým integrálem v (1), výsledkem je

$$\int x\sin((m-n)x)dx = -\frac{x}{m-n}\cos((m-n)x) + \frac{1}{(m-n)^2}\sin((m-n)x)dx.$$

Celkem

$$\begin{aligned}\int x\sin(mx)\cos(nx)dx = &-\frac{1}{2}\frac{x}{m+n}\cos((m+n)x) + \frac{1}{2(m+n)^2}\sin((m+n)x)dx \\ &- \frac{1}{2}\frac{x}{m-n}\cos((m-n)x) + \frac{1}{2(m-n)^2}\sin((m-n)x)dx + C.\end{aligned}$$

Definiční obor primitivní funkce je $\mathcal{D}_F = \mathbb{R}$, vztah $F'(x) = f(x)$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

[8] 3. Najděte následující primitivní funkci

$$\int (x+1)\sqrt{1-x^2}dx.$$

Určete definiční obor původní funkce i primitivní funkce a zjistěte, kde platí vztah $F'(x) = f(x)$ (neuvažujte jednostranné derivace). Použijete-li nějakou větu o substituci, nezapomeňte ověřit její předpoklady.

Řešení:

Výraz $1 - x^2$ musí být nezáporný, definiční obor integrandu je tudíž $x \in [-1, 1]$.

Provedeme technický výpočet. Integrand upravíme do tvaru

$$\int (x+1)\sqrt{1-x^2}dx = \int x\sqrt{1-x^2}dx + \int \sqrt{1-x^2}dx,$$

první integrál spočteme jednoduchou substitucí

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = \begin{vmatrix} y & = & 1-x^2 \\ dy & = & -2xdx \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \sqrt{y}dy = -\frac{1}{3}y^{\frac{3}{2}},$$

k výpočtu druhého integrálu využijeme klasickou substituci $x = \sin y$ s $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int x\sqrt{1-x^2}dx = \begin{vmatrix} x & = & \sin y \\ dx & = & \cos y dy \end{vmatrix} = \int \cos^2 y dy$$

$$= \int \frac{1+\cos(2y)}{2}dy = \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\sin(2y).$$

Celkem

$$\int (x+1)\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + C,$$

což případně ještě můžeme upravit pomocí vztahu

$$\sin(2\arcsin x) = 2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1 - sin^2(\arcsin x)} = 2x\sqrt{1-x^2}$$

do konečného tvaru

$$\int (x+1)\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Definiční obor primitivní funkce je tudíž $x \in [-1, 1]$, vztah $F'(x) = f(x)$ platí pro $x \in (-1, 1)$.

[11] 4. Určete definiční obor funkce $\frac{3+2\tan x+2\tan^2 x}{2+2\tan x+\tan^2 x}$ a dodefinujte ji tak, aby byla spojitá v celém $\mathbb{R}$. Najděte primitivní funkci k takto dodefinované funkci, aneb spočtěte

$$\int \frac{3+2\tan x+2\tan^2 x}{2+2\tan x+\tan^2 x}dx,$$

a určete definiční obor primitivní funkce a zjistěte, kde platí vztah $F'(x) = f(x)$ (neuvažujte jednostranné derivace). Je-li to možné, najděte primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$. Použijete-li nějakou větu o substituci, nezapomeňte ověřit její předpoklady.

Řešení:

Funkce

$$f(x) = \frac{3+2\tan x+2\tan^2 x}{2+2\tan x+\tan^2 x}$$

je zjevně definována pro všechna $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ – tedy mimo body nespojitosti funkce $\tan(x)$ (jmenovatel je vždy kladný, takže nehrozí, že by vznikly další potíže s nulou v jmenovateli zlomku).

Chceme tudíž dodefinovat funkci $f(x)$ tak, aby byla spojitá v bodech $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Jediný způsob jak je možné funkci spojitě dodefinovat je položit její hodnotu v problematických bodech rovnou limitě. Spočteme tedy

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm} \frac{3+2\tan x+2\tan^2 x}{2+2\tan x+\tan^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}\pm} \frac{\tan^2 x\left(3\frac{1}{\tan^2 x}+2\frac{1}{\tan x}+2\right)}{\tan^2 x\left(2\frac{1}{\tan^2 x}+2\frac{1}{\tan x}+1\right)} = 2.$$

Je zřejmé, že díky periodicitě funkce $\tan x$ lze naprosto stejně dodefinovat funkci $f(x)$ i v dalších problematických bodech.

Celkem tedy máme

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3+2\tan x+2\tan^2 x}{2+2\tan x+\tan^2 x} & x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}, \\ 2 & x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{cases}$$

čímž jsme úspěšně dodefinovali funkci pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Před vlastním výpočtem primitivní funkce provedeme drobnou úpravu

$$\int \frac{3+2\tan x+2\tan^2 x}{2+2\tan x+\tan^2 x}dx = \frac{\left(2+2\tan x+\tan^2 x\right)+(1+\tan^2 x)}{2+2\tan x+\tan^2 x}dx$$
$$= \int \left(1 + \frac{1+\tan^2 x}{2+2\tan x+\tan^2 x}\right)dx.$$

K výpočtu druhé primitivní funkce použijeme substituci $y = \tan x$, kde $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Je-li $y = \tan x$, pak $dy = (1+\tan^2 x)dx$ a po provedení substituce dostaneme

$$\int \frac{1+\tan^2 x}{2+2\tan x+\tan^2 x}dx = \int \frac{1}{2+2y+y^2}dy = \int \frac{1}{(y+1)^2+1}dy$$
$$= \arctan(y+1) = \arctan(1+\tan x).$$

Celkem

$$\int \frac{3+2\tan x+2\tan^2 x}{2+2\tan x+\tan^2 x}dx = x + \arctan(1+\tan x) + C_k,$$

přičemž uvedený vztah platí díky periodicitě funkce $\tan x$ na $\cup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ (integrační konstanta C_k může být na každém intervalu jiná). Integrovaná funkce je však definovaná na celém $\mathbb{R}$,

bylo by tudíž vhodné prozkoumat možnost dodefinovat primitivní funkci $F(x)|_{x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} = x + \arctan 1 + \tan x + C_k$ tak, aby byla rovněž definována na celém $\mathbb{R}$.
Jednostranné limity nalezených primitivních funkcí v kritických bodech jsou

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-} x + \arctan(1+\tan x) + C_k &= \frac{\pi}{2} + k\pi + \frac{\pi}{2} + C_k = k\pi + \pi + C_k \\
\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+} x + \arctan(1+\tan x) + C_{k+1} &= \frac{\pi}{2} + k\pi - \frac{\pi}{2} + C_{k+1} = k\pi + C_{k+1}.
\end{aligned}$$

Aby bylo možné primitivní funkci spojitě dodefinovat, musí být

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)-} F(x)|_{x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)} = \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)+} F(x)|_{x\in\left(-\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi,\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right)},$$

odkud plyne požadavek

$$C_{k+1} = \pi + C_k,$$

přičemž konstantu C_0 lze volit libovolně. Primitivní funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$ je tedy dána předpisem

$$F(x) = \begin{cases} x + \arctan(1+\tan x) + k\pi + C_0 & x \in \left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right), \\ (k+1)\pi + C_0 & x \in \left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}. \end{cases}$$

Vztah $F'(x) = f(x)$ platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.