Sylabus přednášky MAF033 Matematická analýza I.

Předpokládané rozdělení látky do přednášek (v čtrnácti týdnech semestru bude 28 přednášek, jedna přednáška odpadne kvůli imatrikulaci (11. října), na dvou přednáškách se budou psát zápočtové písemky; celkem tedy v semestru bude k dispozici 25 přednášek):

Přednáška	Téma
Přednáška 1-4	Limita, spojitost, derivace - základní pojmy
Přednáška 5-6	Limita, spojitost, derivace - limita a spojitost
Přednáška 7	Limita, spojitost, derivace - derivace
Přednáška 8	Limita, spojitost, derivace - zavedení elementárních funkcí
Přednáška 9-10	Lineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu
Přednáška 11-14	Primitivní funkce a neurčitý integrál
Přednáška 15-17	Limity podruhé
Přednáška 18-21	Hlubší vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí
Přednáška 21-25	Newtonův a Riemannův integrál

1 Limita, spojitost, derivace

1.1 Základní pojmy

Trocha logiky; axiomatické zavedení reálných čísel: axiomy tělesa, axiomy uspořádání, axiom úplnosti (definice suprema, infima, základní vlastností); zavedení přirozených, celých, racionálních a komplexních čísel a jejich geometrická interpretace, absolutní hodnota; funkce: definice, obor hodnot, základní vlastnosti (zobrazení prosté, na, vzájemně jednoznačné, sudé, liché, omezené shora, zdola, inverzní, složené), rozšíření reálných a komplexních čísel.

1.2 Limita a spojitost

Definice limity obecná, definice limity ve vlastním bodě, jednoznačnost, Bolzano-Cauchyho podmínka, jednostranné limity; věty o limitě součtu, podílu, složeného zobrazení; různé typy singularit: skok, blow-up, oscilace. Definice spojitosti v bodě a na množině, věty o spojitosti součtu, součinu, podílu a složené funkce.

1.3 Derivace

Definice, geometrická a fyzikální interpretace: rovnice tečny ke křivce v daném bodě, definice okamžité rychlosti. Věty o derivování součtu, součinu, podílu, složené funkce a funkce inverzní.

1.4 Zvedení elementárních funkcí

Zavedení exponenciály, sinu a kosinu. Derivace funkcí *tg*, *cotg*, *sinh*, *cosh*, *arcsin*, *arccos*, *arctg*, *arccotg*, *ln*, x^a, a^x, $ln_a x$. Derivace funkcí komplexní proměnné.

1.5 Derivace vyšších řádů, parciální derivace

Definice derivace ve směru.

2 Lineární obyčejné diferenciální rovnice 2. řádu

Harmonický oscilátor, tlumené a netlumené kmitání, metoda násady, charakteristická rovnice, reálná a komplexní báze řešení.

3 Primitivní funkce aneb neurčitý integrál

3.1 Základní vlastnosti

Definice, (ne)jednoznačnost, linearita, spojitost.

3.2 Integrování per partes, věty o substituci

3.3 Integrování racionálních funkcí

Rozklad racionální funkce na parciální zlomky, integrace elementárních racionálních funkcí.

3.4 Speciální substituce

Goniometrické substituce $t=tg(x)$ resp. $t=tg(x/2)$, Eulerova substituce, substituce $t=((ax+b)/(cx+d))^{1/k}$.

4 Limity podruhé

4.1 Doplňky k limitám

Limity nevlastní, limity v nevlastních bodech, limity posloupností - odvození z obecné definice, speciální případy, charakterizace; l'Hospitalova věta.

4.2 Klasifikace nekonečně malých a nekonečně velkých veličin

Zavedení symbolů *o* a *O,* ekvivalence, silná ekvivalence.

4.3 Limity monotónních funkcí

Limitní přechody v nerovnostech, existence limity v krajních bodech definičního oboru monotónní funkce.

4.4 Limity posloupností
Heineho a Weierstrassova věta.

5 Hlubší vlastnosti spojitých a diferencovatelných funkcí

5.1 Lokální a globální extrémy
Nutná podmínka existence lokálního extrému, definice globálního extrému a věta o jeho nabývání, množina podezřelých bodů, Darbouxova věta o nabývání mezihodnot, věta o existenci spojité inverzní funkce. Definice stejnoměrné spojitosti, vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti (Cantorova věta).

5.2 Věty o střední hodnotě
Rolleova, Lagrangeova, a Cauchyho věta o střední hodnotě, podstatnost předpokladů, geometrická interpretace. Důkaz l'Hospitalovy věty. Věta o jednostranných derivacích. Postačující podmínky pro existenci lokálních extrémů.

5.3 Konkavita a konvexita
Definice a ekvivalentní vyjádření. Jensenova nerovnost. Prostory spojitých a spojitě diferencovatelných funkcí.

5.4 Taylorovy polynomy
Definice a jejich význam. Jednoznačnost. Cauchyův a Lagrangeův tvar zbytku. Taylorovy polynomy základních funkcí. Využití.

6 Newtonův a Riemannův integrál

6.1 Newtonův integrál
Definice zobecněné primitivní funkce. Definice Newtonova integrálu (neabsolutně konvergentní). Podmínky pro existenci Newtonova integrálu.

6.2 Riemannův integrál
Dolní a horní Riemannovy součty, dolní a horní Riemannův integrál a jejich existence. Definice Riemannova integrálu (absolutně konvergentní). Podmínky pro existenci Riemannova integrálu.

6.3 Vlastnosti Riemannova integrálu
Riemannův integrál - příklad lineárního funkcionálu, integrál nezáporné funkce, uspořádání, vztah integrálu funkce a její absolutní hodnoty. Integrál přes sjednocení dvou (resp. konečně mnoha) disjunktních množin je roven součtu integrálů přes jednotlivé množiny. Základní věta diferenciálního a integrálního počtu.

6.4 Vztah mezi Riemannovým a Newtonovým integrálem
Věta o existenci primitivní funkce. Prostor Riemannovsky a Newtonovsky integrovatelných funkcí.

6.5 Věty o střední hodnotě
První a druhá věta o střední hodnotě v integrálním počtu.

6.6 Aplikace Newtonova a Riemannova integrálu
Délka křivky (křivka zadaná jako graf funkce, parametricky zadaná křivka, křivka v polárních souřadnicích). Obsah plochy.