Moment setrvačnosti

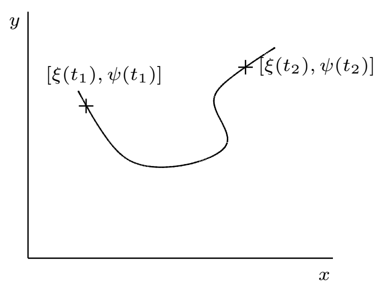
Moment setrvačnosti je definován jako

$$J = \int_{\Omega} \left(\vec{r} \bullet \vec{r} I - \vec{r} \otimes \vec{r}\right) \rho(\vec{r}) dV, \tag{1}$$

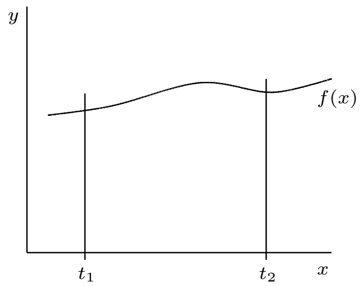
kde I značí matici identity, Ω je oblast kterou těleso zaujímá, ρ je hustota tělesa a $\vec{r}$ je polohový vektor. Moment setrvačnosti je tedy *tenzor* druhého řádu. Zapsáno po složkách v kartézských souřadnicích (polohový vektor $\vec{r}$ má složky x, y, z)

$$J = \begin{bmatrix} \int\limits_{\Omega} \left(y^2 + z^2\right) \rho(x,y,z) dV & -\int\limits_{\Omega} xy\rho(x,y,z) dV & -\int\limits_{\Omega} xz\rho(x,y,z) dV \\ -\int\limits_{\Omega} xy\rho(x,y,z) dV & \int\limits_{\Omega} \left(x^2 + z^2\right) \rho(x,y,z) dV & -\int\limits_{\Omega} yz\rho(x,y,z) dV \\ -\int\limits_{\Omega} xz\rho(x,y,z) dV & -\int\limits_{\Omega} yz\rho(x,y,z) dV & \int\limits_{\Omega} \left(x^2 + y^2\right) \rho(x,y,z) dV \end{bmatrix}. \tag{2}$$

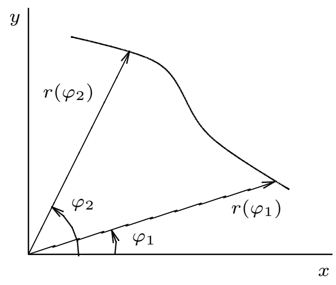
Ukážeme si, jak spočítat tenzor momentu setrvačnosti pro křivku ležící v rovině xy (to je s tím co umíme – jednorozměrný Riemannův integrál – v podstatě maximum možného[1]). Křivku v rovině lze zadat (mimo jiné) těmito třemi způsoby: parametricky, jako graf funkce a v polárních souřadnicích. Více napoví následující obrázek.



(a) parametrický popis



(b) graf funkce



(c) polární souřadnice

Obrázek 1: Různé způsoby popisu křivky v rovině xy

[1] Až na pár dalších případů jako moment setrvačnosti rotačního tělesa popřípadě moment setrvačnosti dvourozměrné oblasti popsané jako plocha ohraničená grafem funkce.

Stojíme tedy před úkolem přepsat obecný vzorec (1) pro dané speciální případy.

Křivka zadaná parametricky

Pro křivku[2] ležící v rovině xy, která je parametrizovaná standardním způsobem

$$\begin{aligned} x &= \xi(t) \quad (3) \\ y &= \psi(t) \quad (4) \\ z &= 0 \quad (5) \end{aligned}$$

dostaneme

$$J = \begin{bmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

kde[3]

$$J_{xx} = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)^2 \rho(\xi(t), \psi(t)) \sqrt{\left(\frac{d\xi(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (6)$$

$$J_{yy} = \int_{t_1}^{t_2} \xi(t)^2 \rho(\xi(t), \psi(t)) \sqrt{\left(\frac{d\xi(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (7)$$

$$J_{zz} = \int_{t_1}^{t_2} \left(\xi(t)^2 + \psi(t)^2\right) \rho(\xi(t), \psi(t)) \sqrt{\left(\frac{d\xi(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (8)$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\int_{t_1}^{t_2} \xi(t)\psi(t) \rho(\xi(t), \psi(t)) \sqrt{\left(\frac{d\xi(t)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi(t)}{dt}\right)^2} dt \quad (9)$$

$$J_{xz} = J_{zx} = J_{zy} = J_{yz} = 0 \quad (10)$$

Křivka zadaná jako graf funkce

Křivku zadanou jako graf funkce lze chápat jako křivku zadanou parametrizací

$$\begin{aligned} x &= t \quad (11) \\ y &= f(t) \quad (12) \\ z &= 0. \quad (13) \end{aligned}$$

[2]Hustota ρ je nyní lineární hustota, její jednotka je tedy $\frac{kg}{m}$.
[3]Povšimněte si prosím, že $J_{xx} + J_{yy} = J_{zz}$.

V tomto speciálním případě parametrizace se pak obecné vzorce redukují na

$$J_{xx} = \int_{t_1}^{t_2} f(t)^2 \rho(t) \sqrt{1 + \left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2} dt \tag{14}$$

$$J_{yy} = \int_{t_1}^{t_2} t^2 \rho(t) \sqrt{1 + \left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2} dt \tag{15}$$

$$J_{zz} = \int_{t_1}^{t_2} \left(t^2 + f(t)^2\right) \rho(t) \sqrt{1 + \left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2} dt \tag{16}$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\int_{t_1}^{t_2} t f(t) \rho(t) \sqrt{1 + \left(\frac{df(t)}{dt}\right)^2} dt \tag{17}$$

$$J_{xz} = J_{zx} = J_{zy} = J_{yz} = 0 \tag{18}$$

Křivka zadaná v polárních souřadnicích

Křivka zadaná v polárních souřadnicích je opět případem speciální parametrizace

$$x = r(\varphi) \cos\varphi \tag{19}$$

$$y = r(\varphi) \sin\varphi \tag{20}$$

$$z = 0. \tag{21}$$

V tomto speciálním případě parametrizace se pak obecné vzorce redukují na

$$J_{xx} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(r(\varphi)\sin(\varphi)\right)^2 \rho(\varphi) \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \tag{22}$$

$$J_{yy} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(r(\varphi)\cos(\varphi)\right)^2 \rho(\varphi) \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \tag{23}$$

$$J_{zz} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 \rho(\varphi) \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \tag{24}$$

$$J_{xy} = J_{yx} = -\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r(\varphi)^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)\rho(\varphi) \sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \tag{25}$$

$$J_{xz} = J_{zx} = J_{zy} = J_{yz} = 0 \tag{26}$$