1. Spočtěte následující primitivní funkci:

$$\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

Řešení:

Zkoumejme nejdříve definiční obor funkce

$$\frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Nejprve se přesvědčíme, že výraz pod odmocninou nemůže být záporný – to je ovšem zřejmé, neboť diskriminant kvadratického polynomu x^2+x+1 je menší než nula.

Zbývá zkontrolovat, že výraz v jmenovateli nemůže být roven nule. Z nerovnosti

$$\sqrt{x^2+x+1} = \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} > \left|x+\frac{1}{2}\right|$$

okamžitě plyne, že výraz $1+x+\sqrt{x^2+x+1}$ je vždy kladný. Integrand je tudíž definován pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Můžeme se tedy bez obav pustit do technického výpočtu.

Integrál nejdříve rozepíšeme jako

$$\int \frac{1+x+\sqrt{x^2+x+1}-1}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int 1dx - \int \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx,$$

což výrazně zjednoduší výpočet. V takto rozděleném integrálu zbývá spočítat primitivní funkci

$$\int \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx,$$

což je typický případ, který lze vyřešit s použitím Eulerových substitucí, nejvhodnější bude substituce

$$\sqrt{x^2+x+1} = x-t. \tag{1}$$

Po úpravě dostaneme vztah pro x jako funkci t

$$x = f(t) = \frac{t^2-1}{2t+1}$$

a pro diferenciál dx

$$dx = \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt.$$

Zbývá vyřešit otázku, z jakého intervalu musí být proměnná t, aby byly splněny požadavky věty o substituci. Předně funkce $f(t)$ definovaná výše uvedeným vztahem musí zobrazovat interval J (to jest ten interval, který právě hledáme – v tomto intervalu „žije“ proměnná t) na interval, na kterém je definován integrand (to jest celé $\mathbb{R}$ – v tomto intervalu „žije“ proměnná x).

Prozkoumejme tedy chování funkce $f(t)$ (viz obrázek 1). Je snadné rozmyslet si, že grafem funkce $f(t)$ je hyperbola s osami $t=-\frac{1}{2}$ a $g(t)=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}$ – abychom mohli korektně použít větu o substituci, musíme se pohybovat pouze po jedné větvi hyperboly. Máme na výběr mezi $t \in (-\infty, -\frac{1}{2})$ a $t \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$, ze vztahu (1) ovšem okamžitě vidíme, že proměnná t je vždy záporná, musíme tudíž zvolit interval $(-\infty, -\frac{1}{2})$. Funkce $f(t)$ zobrazuje tento interval na interval $(-\infty, +\infty)$ a splňuje všechny požadavky věty o substituci.

Proveďme nyní substituci, po dosazení a úpravě výrazu dostaneme

$$\int \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1}{1+\frac{t^2-1}{2t+1}+\left(\frac{t^2-1}{2t+1}-t\right)} \frac{2(t^2+t+1)}{(2t+1)^2}dt = \int \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)(t-1)}dt,$$

díky tomu, že $t \in (-\infty, -\frac{1}{2})$, je nový integrand vždy definován a můžeme pokračovat ve výpočtu – použijeme rozklad na parciální zlomky.

Protože je polynom v čitateli stejného stupně jako polynom v jmenovateli, musíme nejprve oba polynomy vydělit, výsledkem je

$$\int \frac{2(t^2+t+1)}{(1+2t)(t-1)}dt = \int \left(1+\frac{3(t+1)}{(2t+1)(t-1)}\right)dt.$$

Druhý zlomek v závorce rozložíme na parciální zlomky, hledáme tedy takové A, $B \in \mathbb{R}$, aby platilo

$$\frac{3(t+1)}{(2t+1)(t-1)} = \frac{A}{(2t+1)} + \frac{B}{(t-1)}.$$

Pravou stranu upravíme na společného jmenovatele a dostaneme rovnost

$$\frac{3(t+1)}{(2t+1)(t-1)} = \frac{A(t-1)+B(2t+1)}{(2t+1)(t-1)},$$

musí tedy platit

$$3(t+1) = A(t-1)+B(2t+1),$$

a to pro libovolné t. Speciálně pro $t = -\frac{1}{2}$ dostaneme

$$\frac{3}{2} = -\frac{3}{2}A,$$

a pro $t = 1$

$$6 = 3B,$$

z těchto rovnic snadno určíme hledané konstanty

$$\begin{aligned} A &= -1, \\ B &= 2. \end{aligned}$$

Nakonec jsme tedy dospěli k rovnosti

$$\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int 1dx - \int 1dt + \int \left(\frac{1}{(2t+1)} - \frac{2}{(t-1)}\right)dt,$$

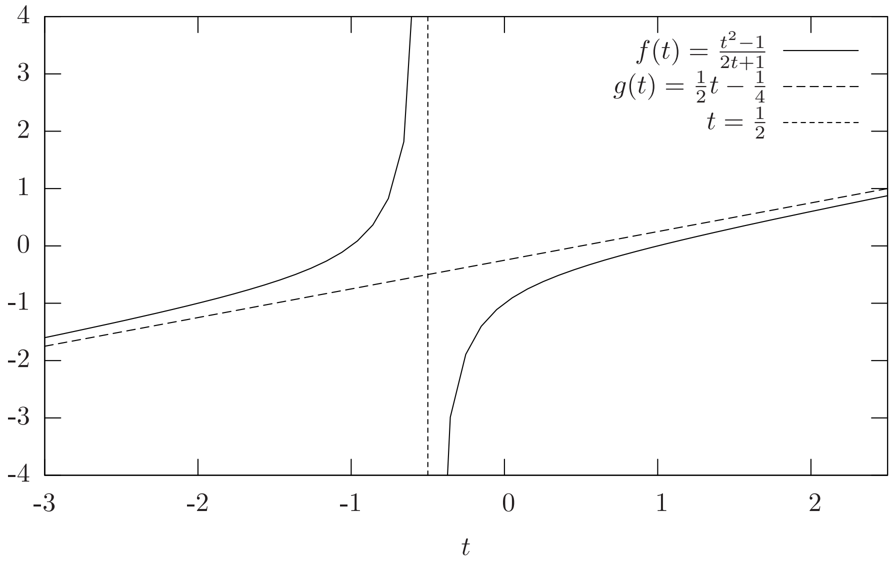
přičemž poslední integrál na pravé straně snadno spočteme

$$\int \left(\frac{1}{(2t+1)} - \frac{2}{(t-1)}\right)dt = \frac{1}{2}\ln|2t+1| - 2\ln|t-1|,$$

zbývá vrátit se k původní proměnné x a přidat integrační konstantu

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+\sqrt{x^2+x+1}}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx \\ &\quad = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\ln\left|2\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)+1\right| - 2\ln\left|\left(x-\sqrt{x^2+x+1}\right)-1\right| + C. \end{aligned}$$

Vztah platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.



Obrázek 1: Graf funkce $f(t) = \frac{t^2-1}{1+2t}$.

Řešení:

Následující alternativní postup je vhodný pro zoufalce, kteří nevědí nic o Eulerových substitucích. Předchozí postup lze zopakovat až do bodu, kdy je potřeba spočítat integrál

$$\int \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx,$$

což lze bez znalosti Eulerových substitucí spočítat například s použitím následujícího triku.

$$\frac{1}{(1+x)+\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{1}{(1+x)+\sqrt{x^2+x+1}}\frac{(1+x)-\sqrt{x^2+x+1}}{(1+x)-\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{(1+x)-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

V tomto případě ovšem musí být $x \neq 0$, hledejme tedy primitivní funkci pouze pro $x > 0$. Pokračujme ve výpočtu

$$\int \frac{(1+x)-\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx = x + \ln|x| - \int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx,$$

zbývá najít primitivní funkci k $\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}$, což provedeme takto

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx &= \int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx \\ &= \int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx + \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx \qquad (2)\end{aligned}$$

První integrál přepíšeme jako

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx,\end{aligned}$$

zbylý integrál lze zřejmě přičíst k prostřednímu integrálu v (2).
Prostřední integrál v (2) v spočteme snadno doplněním na čtverec

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}}dx = \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Poslední integrál v (2) rozepíšeme jako

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}dx,$$

nyní stačí zavést substituci $u = \frac{1}{x}$ a výpočet se zjednoduší na

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx = -\int \frac{1}{\sqrt{1+u+u^2}}du,$$

což je integrál, který již máme spočtený, celkem tedy máme

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}}dx = -\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\right).$$

Dospěli jsme tedy k výsledku

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) - \operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\right),$$

který ještě s použitím identity

$$\operatorname{arcsinh} y = \operatorname{arctanh} \frac{y}{1+y^2}$$

přepíšeme do konečné podoby

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}dx = \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) - \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\frac{2+x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right).$$

Celkem tedy

$$\int \frac{1}{1+x+\sqrt{x^2+x+1}}dx$$
$$= x + \ln|x| - \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\frac{2+x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) + C.$$

Vztah lze snadno rozšířit pro všechna $x \in \mathbb{R}$, stačí nalezenou primitivní funkci spojitě rozšířit do bodu $x = 0$, což je možné, neboť výše uvedená funkce má v tomto bodě vlastní limitu

$$\lim_{x\to 0\pm}\left(x + \ln|x| - \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{arcsinh}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\frac{2+x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right) + C\right)$$
$$= -\frac{3}{4}\ln(3) - 1 + 2\ln(2) + C.$$

K výpočtu klíčové části limity, tedy

$$\lim_{x\to 0\pm} \ln|x| + \operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{2}\frac{2+x}{\sqrt{x^2+x+1}}\right),$$

lze použít vztah

$$\operatorname{arcsinh} y = \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right).$$

2. Spočtěte následující primitivní funkci:

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$$

Řešení:

Definiční obor integrandu je zřejmě $\mathcal{D}_f = \cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Soustřeďme se nyní na interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Na tomto intervalu zvolíme substituci $y = \cos(x)$. Je-li $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, pak je $y \in (0, 1]$ a substituce splňuje všechny podmínky věty o substituci.

Provedeme technický výpočet

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \sin x dx = \left| \begin{matrix} y = \cos(x) & x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ dy = -\sin(x) dx & \end{matrix} \right| = -\int \frac{1 - y^2}{y^4} dy$$
$$= -\int \frac{1}{y^4} dy + \int \frac{1}{y^2} dy = \frac{1}{3y^3} - \frac{1}{y}.$$

Zbývá přejít k původní proměnné x a přidat integrační konstantu

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

Uvedený vztah platí na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, je ovšem zřejmé, že ho lze snadno rozšířit (kvůli periodicitě) na celý definiční obor integrandu $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$. Konstanta C může být na každém intervalu $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ jiná, přes body $(2k + 1)\frac{\pi}{2}$ nelze primitivní funkce navázat.

3. Spočtěte následující primitivní funkci:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3}\,dx$$

Řešení:

Definiční obor integrandu je zřejmě $\mathcal{D}_f = (-1, 1)$. Zavedeme substituci $x = \sin(y)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Funkce sin zobrazuje interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na interval $(-1, 1)$ a navíc zcela jasně splňuje ostatní podmínky věty o substituci.

Provedeme technický výpočet

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3}dx = \begin{vmatrix} x = \sin(y) & y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ dx = \cos(y)dy & \end{vmatrix} = \int \frac{\cos(y)}{\sqrt{1-\sin^2 y}^3}dy = \int \frac{\cos(y)}{\sqrt{\cos^2(y)}^3}dy$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 y}dy.$$

Díky zvolenému definičnímu oboru jsme při odstraňování odmocniny mohli ignorovat absolutní hodnotu při odstraňování odmocniny – výraz $\cos(x)$ je na uvažovaném definičním oboru vždy kladný.

Poslední integrál je rovný

$$\int \frac{1}{\cos^2 y}dy = \tan(y),$$

zbývá vrátit se k průvodní proměnné x

$$\tan(y) = \frac{\sin(y)}{\cos y} = \frac{\sin(y)}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

a přidat integrační konstantu, výsledkem je

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}^3}dx = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

Uvedený vztah platí na intervalu $(-1, 1)$.