

Příklady na 10. týden

**Limity funkcí v nevlastních bodech**

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + \dots a_1 x + a_0}{A_m x^m + \dots A_1 x + A_0}, a_n \neq 0, A_m \neq 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{3x^4 - 6x^2 + 5}}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}}(\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^2 - 1})$

**Limity funkcí l'Hospitalovým pravidlem**

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
9.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

**Symboly  $O$ ,  $o$ ,  $\sim$ ,  $\cong$**

Dokate platnost následujících tvrzení

10.  $\operatorname{arctg} x = O(1), x \rightarrow \infty$
11.  $x^2 e^{-x} = o(x^a), x \rightarrow \infty, a < 0$
12.  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} = O(\sqrt[8]{x}), x \rightarrow 0^+$
13.  $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \cong \sqrt{x}, x \rightarrow \infty$

Najděte reálné  $a$ , tak aby platilo

14.  $\frac{1+x}{1+x^4} \sim x^a, x \rightarrow \infty$   
15.  $e^x - \cos x \sim x^a, x \rightarrow 0$ .

### Limita posloupnosti

Vypočítejte

16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[3]{n^4 + 1}}{\sqrt[4]{n^6 - 6n^5 + 2} + \sqrt[5]{n^7 + n^3 + 1}}$   
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}, a \in \mathbb{R}$   
18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$   
19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$   
20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , kde  $a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}, n \geq 1$   
21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, a_1 > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n}), n \geq 1$   
22. Zjistěte, pro která  $x$  existuje  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx$ .

Najděte  $\limsup_{n \rightarrow \infty}$  a  $\liminf_{n \rightarrow \infty}$

23.  $a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2}{3}n\pi$   
24.  $a_n = n(2 + (-1)^n)$   
25.  $a_n = \cos^n \frac{2}{3}n\pi$

Najděte hromadné body následujících posloupností

26.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$   
27.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$